

Universidad Nacional Autónoma de Honduras

Facultad de Ciencias

Posgrado de la Facultad de Ciencias

Maestría en Física



TESIS SUSTENTADA PREVIO A OBTENER EL GRADO DE

MÁSTER EN FÍSICA:

**Estudio de las oscilaciones no radiales en las estrellas  
tipo  $\delta$  Scuti BR Cnc y BS Cnc observadas por el  
telescopio espacial KEPLER**

ELABORADO POR: **Marlon Javier Interiano Urquía**

ASESOR

DR. LESTER FOX-MACHADO

INSTITUTO DE ASTRONOMÍA, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, TEGUCIGALPA, HONDURAS. 7 DE JULIO, 2024

# **Autoridades Académicas**

---

**Dr.ODIR AARÓN FERNÁNDEZ FLORES**  
RECTOR

**MAE. ÓSCAR ARQUIMEDES ZELAYA**  
VICERRECTOR ACADÉMICO

**ABOG. JOSÉ ALEXANDER ÁVILA**  
SECRETARIO GENERAL

**Ph.D. RAÚL ARMANDO EUCEDA**  
DIRECTOR DE POSGRADOS

**Ph.D. BRYAN OBED LARIOS**  
DECANO FACULTAD DE CIENCIAS

**Ph.D. MELISSA MARIA CRUZ TORRES**  
COORDINADORA DEL POSGRADO MAESTRÍA EN FÍSICA - CU

# **Estudio de las oscilaciones no radiales en las estrellas tipo $\delta$ Scuti BR Cnc y BS Cnc observadas por el telescopio espacial KEPLER**

Elaborado por: Marlon Javier Interiano Urquía

**Tesis presentada como uno de los requisitos previo  
a la obtención del título de Máster en Física**

Asesor: Dr. Lester Fox-Machado  
Instituto de Astronomía/UNAM

## **TERNA EXAMINADORA**

Ph.D. David Abraham Espinoza Galeas  
Universidad Nacional Autónoma de Honduras, Honduras

Ph.D. Skarleth Melissa Motiño Flores  
Catholic University of America, EEUU

Ph.D. Edwin Alexander Delgado Insuasty  
Universidad de Nariño, Colombia

**TEGUCIGALPA, HONDURAS 7 DE JULIO, 2024**

**Dedicatoria**

*To Santiago,  
the driving mechanism of  
my hearts' pulsations.*

## **Agradecimientos**

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a mi familia, especialmente a mi madre María Isabel Urquía y a mi hermano Carlos Interiano, por su incondicional apoyo a lo largo de mi vida académica, incluso en los momentos más desafiantes y a pesar de la distancia.

Extendiendo mi agradecimiento especial al Dr. Lester Fox Machado, quien guió y apoyó este trabajo de tesis con paciencia y valiosas enseñanzas. Su orientación hizo que este proceso fuera más accesible y enriquecedor.

Agradecemos al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), específicamente al Proyecto PAPIIT IN117323, por respaldar esta investigación sobre binarias en cuasi-contacto observadas por TESS.

También quiero expresar mi gratitud al Instituto de Astronomía de la UNAM en Ensenada, donde tuve la oportunidad de fortalecer mis habilidades durante una estancia, facilitando la realización de este trabajo.

Mis agradecimientos se extienden a los profesores de la Escuela de Física en la Universidad Nacional Autónoma de Honduras por sus valiosas enseñanzas, tanto dentro como fuera de las aulas.



# Resumen

En este estudio se analizan las oscilaciones no radiales de las estrellas BR Cnc y BS Cnc en el cúmulo abierto del Pesebre. Las oscilaciones no radiales en las estrellas se refieren a vibraciones en las que diferentes partes de la superficie de la estrella se mueven en diferentes direcciones y con diferentes amplitudes. Utilizamos datos fotométricos de alta resolución obtenidos por el telescopio espacial Kepler en su segunda fase de vida (misión K2), junto con observaciones espectroscópicas terrestres del Observatorio de San Pedro Mártir en Baja California, México. Los datos fotométricos permitieron identificar las frecuencias de pulsación observacionales mediante el ajuste de las curvas de luz de alta resolución, revelando la naturaleza multiperódica de estas estrellas, como es de esperar en las variables pulsantes tipo Delta Scuti. La espectroscopía nos proporcionó parámetros físicos estelares, que fueron fundamentales para construir modelos de estructura estelar. Estos modelos fueron luego perturbados para simular los modos de pulsación. Las observaciones espaciales continuas nos permitieron detectar un número significativamente mayor de frecuencias de oscilación en comparación con las observaciones terrestres. La utilización de datos fotométricos espaciales de alta precisión, combinados con observaciones espectroscópicas terrestres, mejora significativamente la resolución espectral y la detección de modos de oscilación en estrellas variables. Este enfoque, inédito para estas estrellas, nos permite caracterizar con mayor precisión los modos de oscilación no radiales, proporcionando información valiosa sobre la estructura interna y la dinámica estelar de las estrellas tipo Delta Scuti en el cúmulo del Pesebre.

**Palabras clave:** *Astrosismología; Oscilaciones no radiales, Estrellas Delta Scuti, Telescopio Kepler, BR Cnc, BS Cnc, Cúmulo del Pesebre*

# Abstract

In this study, we analyze the non-radial oscillations of the stars BR Cnc and BS Cnc in the open cluster Praesepe. Non-radial oscillations in stars refer to vibrations in which different parts of the star's surface move in different directions and with different amplitudes. We used high-resolution photometric data obtained by the Kepler space telescope in its second phase (K2 mission), along with ground-based spectroscopic observations from the San Pedro Mártir Observatory in Baja California, Mexico. The photometric data allowed us to identify the observational pulsation frequencies by fitting the high-resolution light curves, revealing the multiperiodic nature of these stars, as expected in Delta Scuti-type pulsating variables. The spectroscopy provided us with stellar physical parameters, which were essential for constructing stellar structure models. These models were then perturbed to simulate the pulsation modes. Continuous space-based observations allowed us to detect a significantly higher number of oscillation frequencies compared to ground-based observations. The use of high-precision space-based photometric data, combined with ground-based spectroscopic observations, significantly enhances spectral resolution and the detection of oscillation modes in variable stars. This approach, novel for these stars, allows us to more accurately characterize non-radial oscillation modes, providing valuable information about the internal structure and stellar dynamics of Delta Scuti-type stars in the Praesepe cluster.

**Keywords:** *Asteroseismology, Non-radial oscillations, Delta Scuti stars, Kepler telescope, BR Cnc, BS Cnc, Praesepe cluster*

# Contenido

<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes del tema . . . . .	3
1.2. Justificación . . . . .	4
1.2.1. Necesidades Relacionadas . . . . .	5
1.3. Pregunta de Investigación . . . . .	5
1.4. Objetivos . . . . .	5
1.4.1. Objetivo General . . . . .	5
1.4.2. Objetivos Específicos . . . . .	6
<b>2. Fundamentación Teórica</b>	<b>7</b>
2.1. Las estrellas variables pulsantes . . . . .	7
2.2. Mecanismos de pulsación estelar . . . . .	13
2.2.1. Mecanismo Kappa . . . . .	13
2.2.2. Mecanismo Gamma . . . . .	14
2.2.3. Mecanismo epsilon . . . . .	14
2.3. Las estrellas Delta Scuti . . . . .	15
2.4. Teoría de pulsación estelar . . . . .	16
<b>3. Estrellas BR Cnc y BS Cnc</b>	<b>28</b>
3.1. Los cúmulos estelares abiertos . . . . .	28
3.2. El cúmulo del Pesebre . . . . .	29

3.3. Las estrellas Delta Scuti del cúmulo del Pesebre . . . . .	31
3.4. BS Cnc y BR Cnc . . . . .	31
<b>4. Frecuencias de pulsación observacionales</b>	<b>37</b>
4.1. El telescopio espacial Kepler . . . . .	37
4.2. K2: La segunda misión de Kepler . . . . .	39
4.3. Curvas de luz de BR Cnc y BS Cnc . . . . .	41
4.4. Obtención de frecuencias de pulsación . . . . .	44
<b>5. Espectroscopía y parámetros físicos estelares</b>	<b>51</b>
5.1. Observatorio astronómico de San Pedro Mártir . . . . .	51
5.2. Reducción de espectros . . . . .	55
5.3. Determinación de parámetros físicos . . . . .	56
<b>6. Modelos sismológicos</b>	<b>63</b>
6.1. El Código MESA . . . . .	63
6.1.1. Obtención de modelos de estructura estelar con MESA . . . . .	64
6.2. Código GYRE . . . . .	67
6.2.1. Obtención de los modelos de oscilación . . . . .	68
<b>7. Resultados</b>	<b>73</b>
<b>8. Conclusiones</b>	<b>76</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>78</b>

# Lista de Figuras

2.1. Se muestra una curva de luz genérica de una estrella binaria donde se observa como las variaciones en el brillo del sistema estelar, depende de la posición relativa de las estrellas. Tomado de Astronomy, the cosmic journey - Hartman (1987). . . . .	8
2.2. <i>Árbol de variabilidad</i> que muestra los diferentes tipos de fenómenos astronómicos que se manifiestan con la variación de su brillo. Gráfica tomada de [Catelan and Smith, 2015]. . . . .	8
2.3. Ilustración de una pulsación radial. Se indica el núcleo como un nodo (sin movimiento) y la superficie como un antinodo (máximo movimiento). . . . .	11
2.4. Ilustración de patrones de pulsación no radial. Los modos de pulsación son representados por las partes reales de las funciones armónicas esféricas $Y_l^m(\theta, \phi)$ . Tomado de [Carroll and Ostlie, 2007]. . . . .	11
2.5. Distribución esquemática de los diferentes tipos de variables pulsantes a través del diagrama HR. Tomada de [Catelan and Smith, 2015]. . . . .	12
3.1. Imagen de la parte central del cúmulo del Pesebre. Créditos: Stuart Hoggie/NASA. . . . .	30
3.2. Diagrama HR del cúmulo del Pesebre. Tomado de [Hernandez et al., 1998a].	30
3.3. Imagen de campo de la parte central del cúmulo del Pesebre, mostrando la ubicación de las estrellas BS Cn y BR Cnc. Tomada de la base de datos SIMBAD[Wenger et al., 2000]. . . . .	33
3.4. Curvas de luz presentadas por Breger en 1973[Breger, 1973] para las estrellas BS Cnc (KW154) y BR Cnc (KW045). . . . .	34

4.1.	Campo de visión de Kepler [ <a href="#">Aeronautics and Administration, 2009</a> ]. . . . .	38
4.2.	Esta ilustración muestra cómo se utilizó la presión solar para equilibrar la nave espacial Kepler, manteniendo el telescopio lo suficientemente estable como para continuar buscando planetas en tránsito alrededor de estrellas distantes. Créditos: NASA Ames / W Stenzel [ <a href="#">Johnson, 2013</a> ]. . . . .	39
4.3.	Límites aproximados del campo de visión para las campañas K2 0 a 19. La línea delgada es el plano de la eclíptica y la línea gruesa es el plano galáctico [ <a href="#">Van Cleve and Bryson, 2017</a> ]. . . . .	40
4.4.	Curvas de luz para BR Cnc observadas en (a) la campaña 5 y (b) la campaña 18, por K2. El flujo es medido en electrones por segundo (e-/sec) y el tiempo se muestra en fecha juliana baricéntrica (BJD). Obtenida del Mikulski Archive for Space Telescopes (MAST) [ <a href="#">NASA, 2012</a> ]. . . . .	42
4.5.	Curvas de luz para BS Cnc observadas en las campañas (a) 5, (b) 16 y (c) 18, por K2. El flujo es medido en electrones por segundo (e-/sec) y el tiempo se muestra en fecha juliana baricéntrica (BJD). Obtenida del Mikulski Archive for Space Telescopes (MAST) [ <a href="#">NASA, 2012</a> ]. . . . .	43
4.6.	Espectros de amplitud (en ciclos por día) para (a) BS Cnc y (b) BR Cnc, obtenidos en software <i>period04</i> . . . . .	46
4.7.	Serie temporal de BR Cnc, para las campañas 5 y 18 de Kepler K2 unidas, mostrando además el ajuste realizado por <i>Period04</i> . . . . .	47
5.1.	Vista del edificio que alberga al telescopio de 2.1 m en el OAN-SPM. Créditos: Ilse Plauchu-Frayn. Tomado del sitio oficial del OAN-SPM. . . . .	52
5.2.	Perspectiva del telescopio de 2.1 m en el OAN-SPM. Créditos: Ilse Plauchu-Frayn. Tomado del sitio oficial del OAN-SPM. . . . .	53
5.3.	Diseño esquemático de los componentes del espectrógrafo. Las líneas punteadas trazan el camino de la luz [ <a href="#">Levine and Chakrabarty, 1994</a> ]. . . . .	54
5.4.	Ajuste de los espectros sintéticos de las líneas Balmer (a) H-alfa y (b) H-beta para la estrella BR Cnc usando <i>iSpec</i> . . . . .	58

5.5. (a) Ajuste de MgII para encontrar el $v \sin i$ de BR Cnc. (b) Ajuste de MgII para encontrar el $v \sin i$ de BS Cnc. . . . .	61
5.6. Ajuste de isocrónas para BS Cnc y BR Cnc. . . . .	62
6.1. Gráficos de salida de MESA, durante la corrida del código de estructura estelar. Tomado del sitio web de MESA[Paxton, 2011]. . . . .	65
6.2. Perfil de Densidad-Temperatura para un modelo de $1.70 M_{\odot}$ . . . . .	67
6.3. Diferencias entre las frecuencias modeladas y observadas contra las frecuencias observadas para (a) BR Cnc y (b) BS Cnc, ciclos por día (c/d). Los círculos son usados para modos con $l = 0$ , triángulos para $l = 1$ , cuadrados para $l = 2$ y rombos para $l = 3$ . . . . .	72

# Lista de Tablas

<b>2-1.</b> Algunas clases de estrellas variables pulsantes, clasificadas de acuerdo a sus períodos de pulsación, el tipo de población estelar y al tipo de pulsación observada. Tomado de [Carroll and Ostlie, 2007]. . . . .	12
<b>3-1.</b> Estrellas $\delta$ Scuti del cúmulo del Pesebre. Tomados de la base de datos SIMBAD [Wenger et al., 2000]. . . . .	32
<b>3-2.</b> Principales parámetros estelares de BS Cnc y BR Cnc. Tomados de la base de datos SIMBAD [Wenger et al., 2000]. . . . .	33
<b>4-1.</b> Frecuencias obtenidas para BS Cnc en Period04. Los errores sobre las cantidades se calcularon directamente en el software y se muestra entre paréntesis. . . . .	48
<b>4-2.</b> Frecuencias obtenidas para BR Cnc en Period04. Los errores sobre las cantidades se calcularon directamente en el software y se muestra entre paréntesis. . . . .	50
<b>5-1.</b> Parámetros encontrados haciendo el ajuste de los espectros sintéticos para las estrellas BS y BR Cnc usando iSpec [Blanco-Cuaresma et al., 2014]. . . . .	57
<b>6-1.</b> Frecuencias identificadas para BR Cnc y BS Cnc, donde $f$ está expresado en ciclos por día, la Amplitud (Amp.) en mmag. . . . .	71

# Capítulo 1

## Introducción

Uno de los más grandes desafíos de la astrofísica estelar moderna es el modelado de interiores y la dinámica estelar. En las últimas décadas, una de las herramientas más exitosas ha resultado ser el estudio de las oscilaciones observadas en la superficie estelar mediante la astrosismología. La astrosismología es la ciencia que estudia la estructura interna de las estrellas a través del análisis de sus oscilaciones. Las oscilaciones estelares se dividen principalmente en dos tipos: radiales y no radiales. Las oscilaciones radiales implican que la estrella se expande y contrae uniformemente, manteniendo su forma esférica. Por otro lado, las oscilaciones no radiales ocurren cuando diferentes partes de la superficie de la estrella se mueven en direcciones y amplitudes distintas, generando patrones más complejos de vibración.

Cuando se estudia un sistema físico, primero se observan sus configuraciones de equilibrio. En el caso de las estrellas, que pasan la mayor parte de su vida en estructuras de equilibrio de evolución lenta, es importante averiguar si esas estructuras de equilibrio son estables o no. Muy a menudo, esta inestabilidad aparece como algún tipo de variabilidad que ocurre en una escala de tiempo mucho más pequeña que la escala de tiempo de evolución característica. Estudiar estas oscilaciones es crucial porque nos permiten conocer la estructura interna y las propiedades físicas de las estrellas. A través de la observación y el análisis de estas

oscilaciones, los astrónomos pueden inferir datos sobre la composición, la dinámica interna y la evolución de las estrellas.

El aumento de la precisión y de la resolución temporal de los instrumentos de observación permite la observación de un número creciente de oscilaciones. Aquí es donde las observaciones espaciales han venido a jugar un papel muy importante. El telescopio espacial Kepler, mediante sus estudios de tránsitos planetarios, ha proporcionado datos fotométricos valiosos para estudios sismológicos. Un ejemplo de casos donde se presentan ambos tipos de oscilaciones son las estrellas variables tipo Delta Scuti y las gigantes rojas. En estas estrellas, se observan tanto modos de oscilación radiales como no radiales, lo que proporciona una oportunidad única para estudiar en detalle su estructura interna y comprender mejor los procesos físicos que ocurren en su interior.

El objetivo de esta tesis es el estudio de las oscilaciones no radiales de las estrellas BR Cnc y BS Cnc en el cúmulo abierto de El Pesebre, utilizando datos fotométricos obtenidos por el telescopio espacial Kepler en su segunda fase de vida (misión K2) y observaciones espectroscópicas desde el Observatorio de San Pedro Mártir en Baja California, México. Estos objetos han sido estudiados anteriormente usando observaciones fotométricas terrestres, con series temporales cortas que se ven afectadas por el ciclo diurno, obteniéndose complejos espectros de oscilaciones que permitieron detectar unas pocas frecuencias de oscilación para cada estrella. Las observaciones espaciales, por el contrario, son continuas y permiten aumentar la resolución espectral para detectar un mayor número de modos de oscilación con mucha mejor precisión. Así, a partir de este trabajo, hemos detectado un mayor número de frecuencias de oscilación que se contrastaron con modelos teóricos de oscilación estelar, permitiéndonos caracterizar adecuadamente los modos de vibración asociados a estas estrellas pulsantes del tipo Delta Scuti.

Esta tesis está estructurada de la siguiente manera: En el capítulo 1 se presenta el problema planteado en este proyecto de tesis. El capítulo 2 hace una breve descripción de los aspectos

teóricos relacionados con nuestro análisis. El capítulo 3 ofrece una visión general de las estrellas estudiadas y del cúmulo del Pesebre. En el capítulo 4 se detallan los aspectos principales del telescopio espacial Kepler en su segunda vida, la obtención y tratamiento de los datos, así como la obtención de las frecuencias de pulsación. El capítulo 5 se centra en el proceso de espectroscopía y la obtención de parámetros estelares. Finalmente, los resultados de los modelos sismológicos se presentan en el capítulo 6, en el capítulo 7 un resumen de los resultados de la investigación y las conclusiones se discuten en el capítulo 7.

## 1.1. Antecedentes del tema

El estudio de los interiores estelares y su dinámica es uno de los grandes desafíos de la astrofísica moderna. Las estrellas, en su mayoría, se encuentran en un estado de equilibrio de evolución lenta, y es esencial entender la estabilidad de estas estructuras. Las oscilaciones estelares, que se manifiestan como variaciones en el brillo y la velocidad de la superficie, ofrecen una ventana única para explorar la estructura interna de las estrellas. La astrosismología, que estudia estas oscilaciones, ha demostrado ser una herramienta poderosa para avanzar en nuestra comprensión de la física estelar.

La mejora en la precisión y resolución temporal de los instrumentos de observación ha permitido detectar un número creciente de oscilaciones. En particular, las observaciones espaciales han sido revolucionarias en este campo. El telescopio espacial Kepler, diseñado inicialmente para buscar exoplanetas, ha proporcionado datos fotométricos de alta calidad para estudiar las oscilaciones estelares. Estos datos permiten detectar frecuencias de oscilación con mucha mayor precisión que las observaciones terrestres, que están limitadas por el ciclo diurno y las condiciones atmosféricas.

Las estrellas BR Cnc y BS Cnc, en el cúmulo abierto del Pesebre, son ejemplos de estrellas variables pulsantes del tipo Delta Scuti. Anteriormente, estas estrellas se han estudiado con observaciones fotométricas terrestres, que, aunque valiosas, están limitadas por la

duración de las series temporales. Las observaciones continuas desde el espacio, como las proporcionadas por la misión K2 de Kepler, permiten una cobertura ininterrumpida y una mayor resolución espectral, facilitando la detección de un mayor número de modos de oscilación con mejor precisión.

La combinación de datos fotométricos espaciales de alta resolución con observaciones espectroscópicas terrestres ofrece una oportunidad única para mejorar nuestra comprensión de las oscilaciones no radiales en estas estrellas. Este enfoque integrado no solo permite detectar y caracterizar más frecuencias de oscilación, sino que también proporciona los parámetros físicos necesarios para construir modelos teóricos detallados de oscilación estelar. Comparar estos modelos con las observaciones puede revelar nueva información sobre la estructura y dinámica internas de las estrellas del tipo Delta Scuti, contribuyendo significativamente al campo de la astrosismología.

## **1.2. Justificación**

El estudio de las oscilaciones estelares mediante la astrosismología es crucial para comprender la estructura interna y la dinámica de las estrellas. A pesar de los avances tecnológicos en instrumentación, la precisión y resolución de los datos fotométricos obtenidos desde la Tierra han sido limitados por factores como el ciclo diurno y las condiciones atmosféricas. La misión K2 del telescopio espacial Kepler ha revolucionado este campo al proporcionar observaciones continuas y de alta resolución, permitiendo detectar un mayor número de modos de oscilación con una precisión sin precedentes. Al estudiar las estrellas BR Cnc y BS Cnc en el cúmulo del Pesebre, se espera obtener una caracterización detallada de sus oscilaciones no radiales, lo que contribuirá significativamente a la astrofísica estelar y a nuestra comprensión de las estrellas variables del tipo Delta Scuti.

### 1.2.1. Necesidades Relacionadas

- **Alta precisión en datos fotométricos:** Para detectar y analizar con precisión las oscilaciones estelares, se requieren datos fotométricos de alta calidad, como los proporcionados por el telescopio Kepler.
- **Observaciones continuas:** La necesidad de superar las limitaciones impuestas por las observaciones terrestres discontinuas subraya la importancia de datos continuos obtenidos desde el espacio.
- **Análisis espectroscópico detallado:** Complementar los datos fotométricos con observaciones espectroscópicas permite obtener parámetros físicos esenciales para construir modelos teóricos precisos.
- **Modelos teóricos avanzados:** Es fundamental desarrollar y utilizar modelos teóricos detallados de oscilación estelar para interpretar correctamente las observaciones y comprender la estructura interna de las estrellas estudiadas.

## 1.3. Pregunta de Investigación

1. ¿Cuáles son los modos de oscilación no radiales predominantes en las estrellas BR Cnc y BS Cnc?
2. ¿Cómo se comparan las frecuencias observacionales con las modeladas mediante los modelos de oscilación estelar?
3. ¿Qué ventaja presentan estudios astrosismológicos con datos desde el espacio respecto a los obtenidos en Tierra?

## 1.4. Objetivos

### 1.4.1. Objetivo General

Caracterizar las oscilaciones no radiales de las estrellas BR Cnc y BS Cnc en el cúmulo abierto de El Pesebre utilizando datos fotométricos de alta resolución obtenidos por el telescopio

espacial Kepler (misión K2) y complementados con observaciones espectroscópicas terrestres.

### **1.4.2. Objetivos Específicos**

1. Identificar y analizar las frecuencias de oscilación no radiales en las estrellas BR Cnc y BS Cnc a partir de los datos fotométricos proporcionados por la misión K2.
2. Realizar observaciones espectroscópicas de las estrellas estudiadas para obtener parámetros físicos precisos que complementen los datos fotométricos.
3. Desarrollar modelos teóricos de oscilación estelar basados en los datos observacionales para caracterizar los modos de vibración en las estrellas del tipo Delta Scuti.
4. Contrastar las frecuencias de oscilación detectadas con estudios simulados realizados desde Tierra.

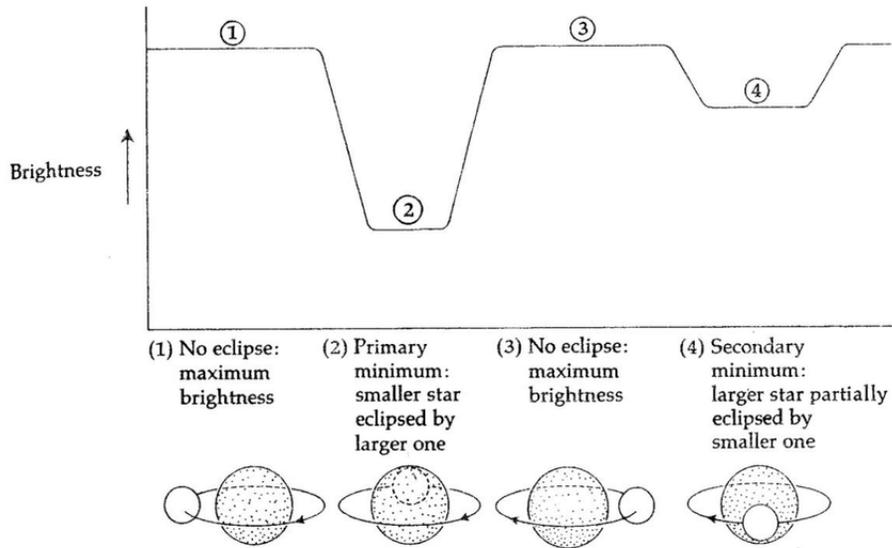
# Capítulo 2

## Fundamentación Teórica

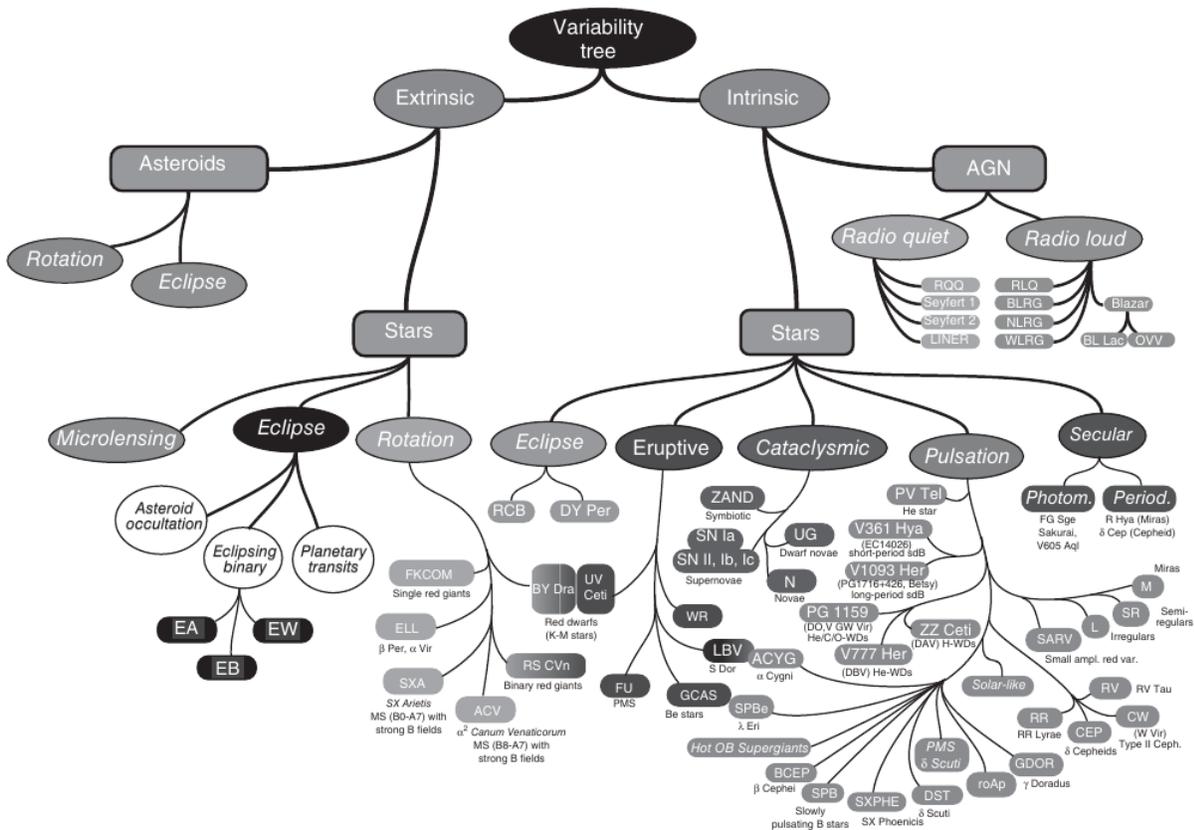
### 2.1. Las estrellas variables pulsantes

En astronomía, los fenómenos que presentan variabilidad en su brillo se pueden distinguir en dos tipos, intrínsecos y extrínsecos [Carroll and Ostlie, 2007]. Las variables intrínsecas son aquella para las cuales un mecanismo interno provoca el cambio en su brillo, y en contraste, las variables extrínsecas, son aquellas en las cuales el cambio en su brillo es debido a un mecanismo externo que no afecta las propiedades del objeto, tal como un ocultamiento en las estrellas binarias (ver la Figura 2.1). El subtipo de variables intrínsecas de interés en este trabajo son las estrellas variables pulsantes, que son aquellas donde el cambio de brillo se debe a un mecanismo físico de excitación interno que genera expansiones y contracciones periódicas de las capas superficiales lo cual implica que la estrella aumente y disminuya de tamaño periódicamente (o cuasiperiódicamente) [Catelan and Smith, 2015]. En la Figura 2.2 se presenta un árbol de variabilidad, que es una representación general y clasificación de todos los fenómenos conocidos en la astronomía que se manifiestan como variables en su brillo.

Veamos un poco de historia, para conocer sobre como se identifica un fenómeno variable. La primera estrella pulsante de la que se tiene registro es *o Ceti* (en la constelación del monstruo marino Cetus), que fue observada por el astrónomo neerlandés David Fabricius



**Figura 2.1:** Se muestra una curva de luz genérica de una estrella binaria donde se observa como las variaciones en el brillo del sistema estelar, depende de la posición relativa de las estrellas. Tomado de Astronomy, the cosmic journey - Hartman (1987).



**Figura 2.2:** *Árbol de variabilidad* que muestra los diferentes tipos de fenómenos astronómicos que se manifiestan con la variación de su brillo. Gráfica tomada de [Catelan and Smith, 2015].

en 1596. Fabricius observó la estrella desde el 3 de agosto, cuando la usó como estrella de comparación para la determinación del planeta que asumía era Mercurio, hasta el 21 de Agosto, cuando incrementó de magnitud 2 a 3. En septiembre disminuyó, y para octubre desapareció completamente. Fabricius asumió que era una nova. Unos meses después reapareció y recuperó su brillo. En honor a este evento, *o Ceti* fue nombrada como *Mira*, procedente del latín, que significa *maravillosa, asombrosa*. En 1638 Fokkens Holwarda determinó su período en 11 meses [Hoffleit, 1997],[Carroll and Ostlie, 2007]. Este fue el precedente del estudio de las variaciones en el brillo de las estrellas y así, poco a poco, se fue cimentando una sólida teoría, aunado con los avances en la precisión de las observaciones, que permitió comprender más ampliamente el origen de las oscilaciones estelares.

Es así que se ha podido establecer una clasificación de los fenómenos que presentan variabilidad en su brillo y se resume en la Figura 2.2, notando que la rama de las estrellas pulsantes presenta una gran cantidad de subcategorías, cada una con características propias que pueden ser notadas a través del diagrama HR de la Figura 2.5. Entre las características que se usan para diferenciar entre tipos de estrellas pulsantes están:

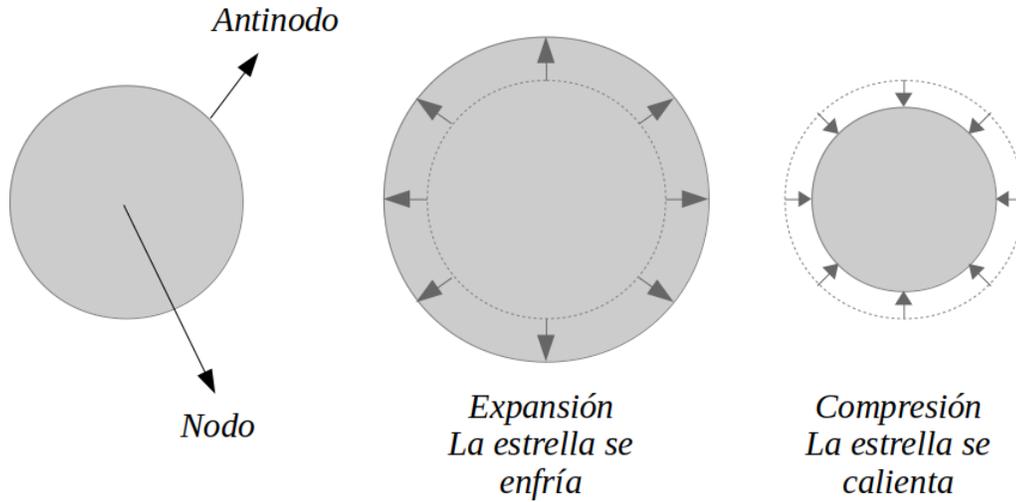
- El rango de sus **períodos de pulsación**, el cual se define como el intervalo de tiempo entre dos máximos o mínimos de luz sucesivos. En realidad, un comportamiento tan estrictamente periódico nunca se observa en astronomía, aunque algunos autores parecen esperar una secuencia de eventos que se repite perfectamente. En realidad se trata de ciclos, ritmos, ondas y pseudoperíodos o tiempos característicos, en definitiva, de procesos que se repiten de forma más o menos regular. Sin embargo, algunos sistemas son casi periódicos y se desvían de la periodicidad estricta sólo en momentos en que el sistema sufre perturbaciones [Sterken, 2005].
- El **tipo de población estelar** a la que corresponde. Una población estelar es un grupo de estrellas dentro de una galaxia que comparten propiedades similares, como edad, composición química y ubicación. Los astrónomos suelen categorizar las poblaciones estelares en diferentes tipos según estas características: Población I, estrellas relativamente jóvenes, con edades de hasta unos pocos miles de millones de

años; y Población II, estrellas más viejas, típicamente con más de 10 mil millones de años, y tienen un contenido metálico menor en comparación con las estrellas de la Población I [Carroll and Ostlie, 2007].

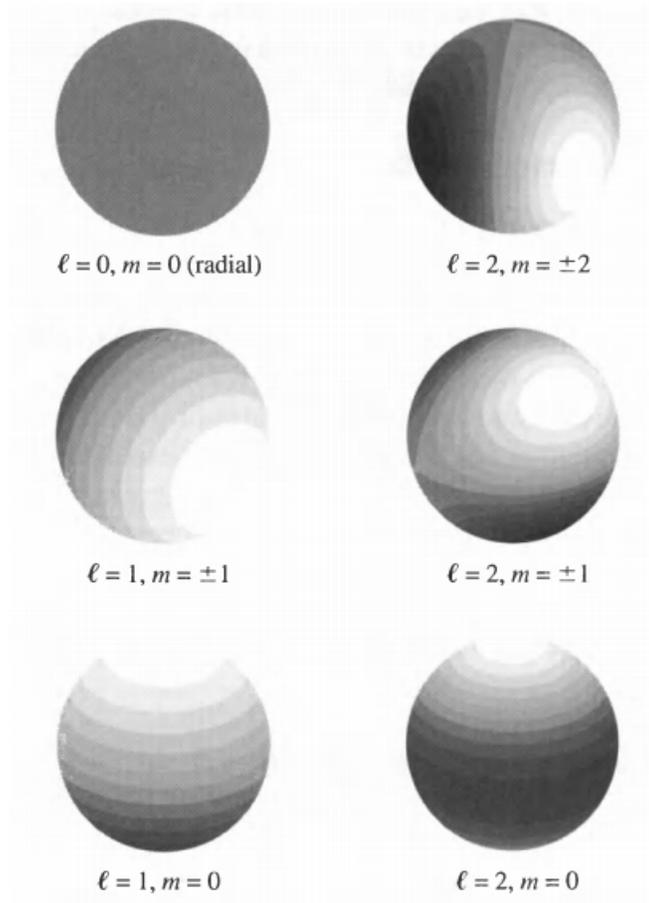
- El **tipo de pulsación**, radial o no radial. En una oscilación **radial**, la estrella se hincha y se contrae, se calienta y se enfría, de forma esféricamente simétrica, con el núcleo como nodo y la superficie como antinodo de desplazamiento. En contraste, una oscilación **no radial** en una estrella es un tipo de pulsación en la que la estrella no solo se expande y contrae de manera esférica simétrica, sino que también experimenta movimientos complejos en diferentes partes de su superficie y su interior. En estas oscilaciones, distintas regiones de la estrella se mueven con diferentes fases y amplitudes. Esto significa que hay múltiples nodos tanto en la superficie de la estrella como en su interior [Aerts et al., 2010]. En la Figura 2.3 se ilustra una pulsación radial, mostrando como la superficie entera se extiende y contrae; mientras que la Figura 2.4 muestran algunos patrones de pulsación no radial, donde se observa con las variaciones de todo que partes se expanden y cuales se contraen en cada caso.

En la Tabla 2-1 se enlistan algunos de los tipos de variables pulsantes más conocidos. Entre las estrellas que presentan pulsaciones radiales se encuentran las Cefeidas clásicas y las de tipo II, las estrellas RR Lyrae y las Miras. Los pulsadores no radiales incluyen, por ejemplo,  $\beta$  Cep,  $\gamma$  Dor, GW Vir y ZZ Ceti. Además existen estrellas con pulsaciones radiales y no radiales presentes, apreciables en la velocidad radial de la estrella; entre las más notables están las  $\delta$  Scuti, de las cuales hablaremos ampliamente en la siguiente sección [Clancy and Cox, 1982].

Muchas otras características diferencian a los diferentes pulsadores, y para muestra podemos observar su distribución a través del diagrama Hertzsprung-Russell de la Figura 2.5. La secuencia principal de edad cero, que muestra dónde se pueden encontrar estrellas de diferentes masas pero composición química similar cuando comienzan a fusionar hidrógeno, se muestra como una línea sólida y las secuencias evolutivas para diferentes masas etiquetadas (en unidades solares) están dadas como líneas discontinuas. La rama horizontal de edad cero se muestra como una línea discontinua-punteada. Las regiones sombreadas diagonales



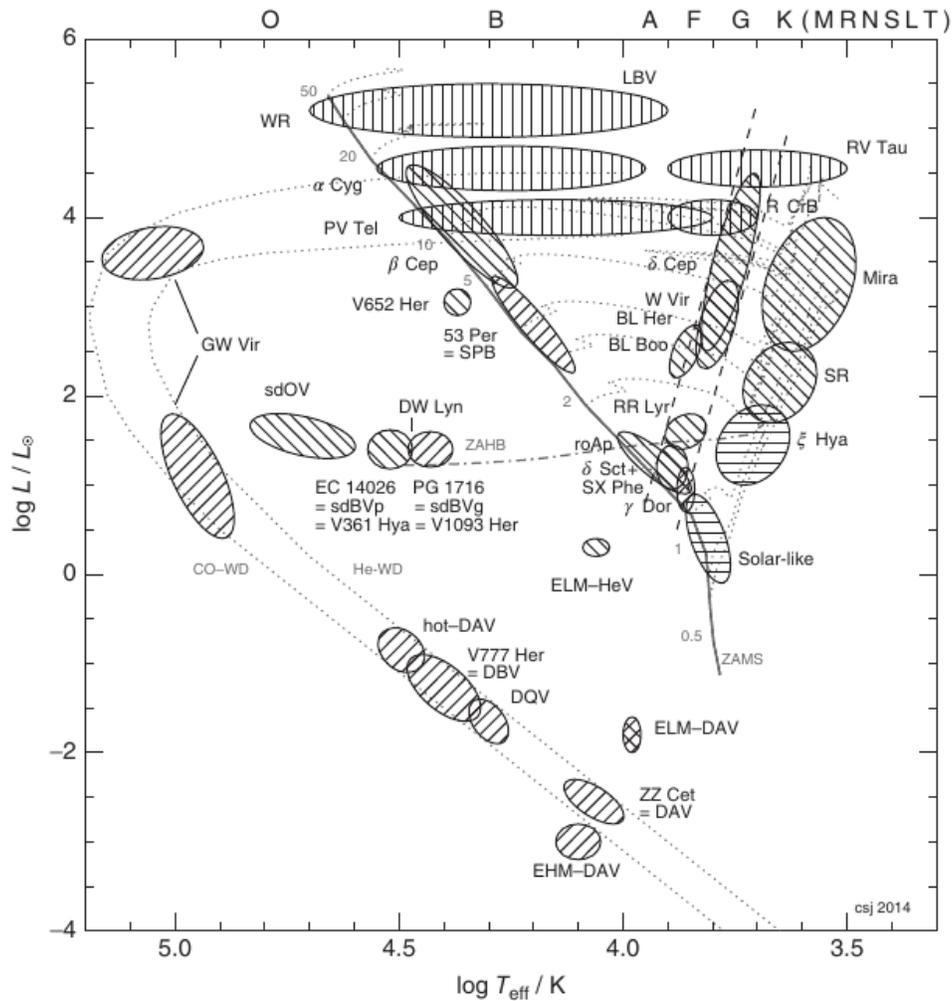
**Figura 2.3:** Ilustración de una pulsación radial. Se indica el núcleo como un nodo (sin movimiento) y la superficie como un antinodo (máximo movimiento).



**Figura 2.4:** Ilustración de patrones de pulsación no radial. Los modos de pulsación son representados por las partes reales de las funciones armónicas esféricas  $Y_l^m(\theta, \phi)$ . Tomado de [Carroll and Ostlie, 2007].

Tipo	Rango de períodos	Tipo de población	Radial o No radial
LPV	100-700 días	I,II	R
Cefeidas clásicas	1-50 días	I	R
W Virginis	2-45 días	II	R
RR Lyrae	1.5-24 horas	II	R
$\delta$ Scuti	1-3 horas	I	R,NR
$\beta$ Cephei	3-7 horas	I	R,NR
ZZ Ceti	100-1000 seg	I	NR

**Tabla 2-1:** Algunas clases de estrellas variables pulsantes, clasificadas de acuerdo a sus períodos de pulsación, el tipo de población estelar y al tipo de pulsación observada. Tomado de [Carroll and Ostlie, 2007].



**Figura 2.5:** Distribución esquemática de los diferentes tipos de variables pulsantes a través del diagrama HR. Tomada de [Catelan and Smith, 2015].

corresponden a variables que pulsan debido a los mecanismos  $\kappa$  y  $\gamma$  [Osaki, 1993]; aquellos que apuntan de arriba a la izquierda son primordialmente pulsadores de modos  $p$  y de arriba a la derecha son pulsadores de modos  $g$ . Las regiones sombreadas horizontalmente corresponden a pulsadores tipo solar. Las regiones sombreadas verticalmente corresponden a pulsaciones altamente no adiabáticas.

## 2.2. Mecanismos de pulsación estelar

### 2.2.1. Mecanismo Kappa

El mecanismo  $\kappa$ , también conocido como el mecanismo de opacidad kappa o la válvula de Eddington, es un proceso que ocurre en zonas de una estrella donde un aumento en la temperatura provoca un aumento en la opacidad<sup>1</sup>. Este aumento de opacidad atrapa la energía radiativa, lo que lleva a pulsaciones cíclicas en la estrella. Se puede describir siguiendo el siguiente proceso:

- **Fase de Compresión:** Una capa de la atmósfera estelar se comprime, aumentando su temperatura y densidad. En estas zonas, la opacidad aumenta con la temperatura, atrapando la energía radiativa. Esto lleva a una acumulación de presión que empuja la capa hacia afuera.
- **Fase de Expansión:** La capa se expande, disminuyendo su temperatura y densidad, lo que reduce la opacidad. La energía atrapada se libera, disminuyendo la presión y haciendo que la capa vuelva a contraerse.

La capa alterna entre compresión y expansión, impulsando las pulsaciones. Algunas estrellas que pulsan por este mecanismo son las Variables Cefeidas, las estrellas RR Lyrae y las Beta Cephei [Carroll and Ostlie, 2007].

---

<sup>1</sup>La opacidad en astronomía se refiere a la medida de cómo un material dentro de una estrella impide el paso de la radiación.

### 2.2.2. Mecanismo Gamma

El mecanismo  $\gamma$ , también conocido como el mecanismo de modulación térmica, opera en regiones donde el exponente adiabático  $\Gamma_3$  es pequeño. Este mecanismo está relacionado con la capacidad de una región para almacenar y liberar calor durante los ciclos de compresión y expansión. Esto puede entenderse en términos del comportamiento del exponente adiabático  $\Gamma_3$  (de ahí el nombre), ya que es  $\Gamma_3$  el que realmente controla el grado en que una determinada capa de una estrella puede calentarse durante la compresión. Se puede describir siguiendo el siguiente proceso:

- **Fase de Compresión:** Durante la compresión, la región con un  $\Gamma_3$  bajo no se calienta tanto como lo haría normalmente. Esto permite que se almacene energía térmica en la región comprimida.
- **Fase de Expansión:** Durante la expansión, la región no se enfría tanto, liberando la energía almacenada.

La región alterna entre almacenar y liberar energía, contribuyendo a las pulsaciones. Este mecanismo puede contribuir a las pulsaciones en combinación con el mecanismo  $\kappa$  en estrellas de la franja de inestabilidad clásica [Catelan and Smith, 2015].

### 2.2.3. Mecanismo epsilon

El mecanismo  $\epsilon$  se relaciona con las zonas de una estrella donde ocurren las reacciones nucleares. Las pulsaciones resultan de las fluctuaciones de temperatura en estas áreas, afectando la tasa de generación de energía. Se puede describir siguiendo el siguiente proceso:

- **Variación en la Producción de Energía:** Las fluctuaciones de temperatura en las zonas nucleares cambian la tasa de generación de energía. Un aumento en la temperatura puede aumentar la tasa de fusión, lo que lleva a un aumento de presión y expansión de la capa.
- **Retroalimentación Positiva:** Este proceso puede ser autolimitante, ya que un aumento en la tasa de fusión puede eventualmente conducir a una disminución de la temperatura y la presión, estabilizando la capa.

Las fluctuaciones de temperatura y la producción de energía resultan en pulsaciones cíclicas. El mecanismo  $\epsilon$  no es significativo en pulsadores típicos como las Cefeidas y las RR Lyrae, pero puede jugar un papel en estrellas masivas y en algunos casos de estrellas de baja masa [Catelan and Smith, 2015].

## 2.3. Las estrellas Delta Scuti

El tipo de estrellas variables pulsantes de especial interés para este trabajo, son las estrellas  $\delta$  Scuti. El prototipo de este grupo de variables es la cuarta estrella más brillante de la constelación *Scutum* o del escudo, a quien deben su nombre.

Las estrellas  $\delta$  Scuti están situadas en la parte baja de la secuencia principal del diagrama HR ahí donde ésta intercepta la franja de inestabilidad de las Cefeidas. También se encuentran en estados evolutivos entre la secuencia principal a la rama de las gigantes. El rango de sus períodos de pulsación está entre 0.02 d y 0.25 d. También pueden estar presentes períodos más largos (modos de gravedad). Las estrellas generalmente pulsan con un gran número de modos radiales y no radiales excitados simultáneamente. Esto las hace muy adecuadas para estudios astrosismológicos [Breger, 2000][Breger, 2007].

La vasta mayoría de las estrellas  $\delta$  Scuti son variables de amplitud corta, pulsando principalmente con modos  $p$  no radiales. Pero adicionalmente a este comportamiento ordinario, podemos definir dos subgrupos de estrellas  $\delta$  Scuti: (i) Las estrellas  $\delta$  Scuti de gran amplitud (*High Amplitude  $\delta$  Scuti Stars – HADS*) son estrellas  $\delta$  Scuti con amplitudes  $V \geq 0.30$  mag; y (ii) Las variables SX Phe que son estrellas  $\delta$  Scuti de población II [Breger, 2000].

El mecanismo de excitación de las oscilaciones en las estrellas  $\delta$  Scuti es el mismo que las otras estrellas en la banda de inestabilidad: el mecanismo  $\kappa$  [Zhevakin, 1963]. Durante cada ciclo la energía cinética de pulsación es suministrada de la energía interna de la mezcla de gas

y radiación en las zonas de ionización de abundantes elementos como He e H. La excitación de la pulsación en estas zonas, en particular la zona de ionización de HeII cercana a 4800 K, es suficiente como contrapeso del amortiguamiento en las capas subyacentes [Breger, 2000].

## 2.4. Teoría de pulsación estelar

### Ecuaciones básicas de hidrodinámica

Inicialmente asumimos que el gas puede ser tratado como un continuo, donde las propiedades se especifican como funciones de la posición  $\mathbf{r}$  y el tiempo  $t$ . Cuando las propiedades son representadas en función de un vector de posición  $\mathbf{r}$  para un punto dado en el espacio, correspondiendo a lo que vería un observador estacionario, se conoce como la *descripción Euleriana*. A veces es conveniente usar la *descripción lagrangiana*, para un observador que sigue el movimiento del gas [Batchelor, 1967].

La derivada temporal de una cantidad  $\phi$ , observada al seguir el movimiento es

$$\frac{d\phi}{dt} = \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)_{\mathbf{r}} + \nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\phi, \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = d\mathbf{r}/dt$  es la velocidad instantánea local. La derivada temporal  $d/dt$  siguiendo el movimiento es conocida como la derivada material y  $\partial/\partial t$  es la derivada local [Christensen-Dalsgaard, 1997].

### La ecuación de continuidad

La conservación de masa [Kippenhahn et al., 2012] viene expresada por

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0, \quad (2.2)$$

donde  $\rho$  es la densidad. La ecuación 2.2, conocida como la ecuación de continuidad, expresa que la razón de cambio de la masa dentro de un volumen debe ser igual, pero con signo

opuesto, a la masa cruzando la superficie que encierra ese volumen, por unidad de tiempo. Usando la ecuación 2.1 obtenemos la razón de cambio de la densidad siguiendo el movimiento

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.3)$$

### Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento pueden ser escritas como

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{f}, \quad (2.4)$$

donde  $\mathbf{f}$  es una fuerza de cuerpo por unidad de masa (o también llamada fuerza corporal, que es una fuerza que actúa en todo el volumen de un cuerpo), en nuestro caso solo vamos a considerar la gravedad como fuerza corporal. La ecuación 2.4 expresa que el cambio en el momento lineal de un elemento de fluido debe ser igual a la fuerza actuando sobre él por los alrededores. Usando la ecuación 2.1 obtenemos [Cunha, 2017]:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{f}. \quad (2.5)$$

La fuerza por unidad de masa para la gravedad es la aceleración gravitacional  $\mathbf{g}$ , que puede ser escrita como

$$\mathbf{g} = -\nabla \Phi, \quad (2.6)$$

donde  $\Phi$ , el potencial gravitacional, satisface la ecuación de Poisson [Evans, 2010]

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad (2.7)$$

### Ecuación de energía

Una relación entre  $p$  y  $\rho$  puede ser expresada a partir de la primera ley de la termodinámica y a partir de ella, usando otras propiedades termodinámicas, encontrar la ecuación de energía

[Christensen-Dalsgaard, 1997]:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho(\Gamma_3 - 1)} \left( \frac{dp}{dt} - \frac{\Gamma_1 p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right), \quad (2.8)$$

donde  $dq/dt$  es la tasa de ganancia o pérdida de calor por unidad de masa. En términos de los calores específicos a presión  $c_p$  y volumen constante  $c_V$ , por unidad de masa:

$$\frac{dq}{dt} = c_p \left( \frac{dT}{dt} - \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \frac{T}{p} \frac{dp}{dt} \right), \quad (2.9)$$

$$= c_V \left[ \frac{dT}{dt} - (\Gamma_3 - 1) \frac{T}{p} \frac{d\rho}{dt} \right]. \quad (2.10)$$

Los exponentes adiabáticos [Cox and Giuli, 1968][Chandrasekhar, 1939] están definidos por:

$$\Gamma_1 = \left( \frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right)_{ad}, \quad \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} = \left( \frac{\partial \ln T}{\partial \ln p} \right)_{ad}, \quad \Gamma_3 - 1 = \left( \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right)_{ad}, \quad (2.11)$$

donde  $T$  es la temperatura del fluido. Considerando la ganancia de calor podemos escribir [Aerts et al., 2010]:

$$\rho \frac{dq}{dt} = \rho \epsilon - \nabla \cdot \mathbf{F}, \quad (2.12)$$

donde  $\epsilon$  es la tasa de generación de energía por unidad de masa (por ejemplo, las reacciones nucleares), y  $\mathbf{F}$  es el flujo de energía. En la mayoría de los casos el único que contribuye al flujo de energía local es la radiación. El transporte de energía radiativa puede ser tratado como un proceso de difusión [Cunha, 2017]:

$$\mathbf{F} = -\frac{4a\tilde{c}T^3}{3\kappa\rho} \nabla T, \quad (2.13)$$

donde  $\kappa$  es la opacidad,  $\tilde{c}$  la rapidez de la luz y  $a$  es la constante de densidad de radiación.

Adicionalmente necesitamos una relación entre  $p$ ,  $\rho$ , y  $T$ , así como los  $\Gamma$ 's, con el estado termodinámico y la composición del gas, una ecuación de estado. Una primera aproximación

útil, despreciando los efectos de degeneración y presión de radiación, es:

$$p = \frac{k_B \rho T}{\mu m_H}, \quad (2.14)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann,  $m_H$  la masa del átomo de hidrógeno y  $\mu$  es la masa molecular media [Carroll and Ostlie, 2007].

Para propósitos de calcular frecuencias de oscilación estelar, se puede despreciar el término de calor (aproximación adiabática) en la ecuación de energía

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\Gamma_1 p}{\rho} \frac{d\rho}{dt}. \quad (2.15)$$

Esta ecuación, junto con la ecuación de continuidad 2.2, las ecuaciones de movimiento 2.5, la ecuación de Poisson 2.7, forman el conjunto de ecuaciones para el movimiento adiabático.

## Estados de equilibrio y análisis de perturbación

Obtener una solución general de las ecuaciones anteriores puede ser extremadamente difícil, y solo se tienen soluciones exactas para casos especiales. Con el objetivo de hacer el problema más tratable, vamos a realizar *perturbaciones* alrededor de un estado de equilibrio de la estrella pulsante y considerar que pasa con las ecuaciones de la sección 2.4 cuando esas perturbaciones son pequeñas (teoría lineal). Lo anterior está bien fundamentado ya que las oscilaciones observadas de tipo solar para estrellas de la secuencia principal tienen amplitudes muy pequeñas en comparación con las escalas características de la estrella. Incluso en estrellas pulsantes clásicas, donde las amplitudes superficiales pueden ser grandes, la mayor parte de la energía en el movimiento se encuentra en regiones donde las amplitudes son relativamente pequeñas; por lo tanto, muchas de las propiedades de estas oscilaciones, incluidos sus períodos, pueden entenderse en términos de la teoría de las pequeñas perturbaciones. [Aerts et al., 2010].

## La estructura de equilibrio

Se asumen que para este estado, todas la derivadas temporales son cero. Adicionalmente, asumimos que no hay velocidades. Las ecuaciones de movimiento se reducen al soporte hidrodinámico[Christensen-Dalsgaard, 1997]:

$$\nabla p_0 = \rho_0 \mathbf{g}_0 = -\rho_0 \nabla \Phi_0, \quad (2.16)$$

el subíndice cero indica cantidades en equilibrio. La ecuación de Poisson no cambia:

$$\nabla^2 \Phi_0 = 4\pi G \rho_0, \quad (2.17)$$

y finalmente la ecuación 2.12

$$0 = \frac{dq}{dt} = \epsilon_0 - \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{F}_0. \quad (2.18)$$

## Análisis de perturbaciones

Considere, por ejemplo, una perturbación pequeña alrededor del estado de equilibrio para la presión

$$p(\mathbf{r}, t) = p_0(\mathbf{r}) + p'(\mathbf{r}, t), \quad (2.19)$$

donde  $p'$  es una pequeña perturbación Euleriana (perturbación local). Se dice que la ecuaciones son *linealizadas* en las perturbaciones, si se expanden en las perturbaciones y se conservan solo los términos que no contienen productos de las perturbaciones. También es conveniente usar una descripción que involucra un marco de referencia siguiendo el movimiento, una perturbación Lagrangiana. Si el gas se mueve de  $\mathbf{r}_0$  a  $\mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r}$ , para la presión [Aerts et al., 2010]

$$\delta p(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r}) - p_0(\mathbf{r}_0) = p(\mathbf{r}_0) + \delta\mathbf{r} \cdot \nabla p_0 - p_0(\mathbf{r}_0) = p'(\mathbf{r}_0) + \delta\mathbf{r} \cdot \nabla p_0. \quad (2.20)$$

Esta relación es equivalente a la ecuación 2.1. Notamos además, que la velocidad está dada por la derivada temporal del desplazamiento  $\mathbf{v} = \partial\delta\mathbf{r}/\partial t$ . Las ecuaciones para las perturbaciones son obtenidas insertando las expresiones anteriores en todas las ecuaciones, restando las ecuaciones de equilibrio y despreciando las cantidades de orden superior en  $p'$ ,  $\rho'$ ,  $\mathbf{v}$ , etc [Cunha, 2017][Cox, 1980]:

$$\rho' + \nabla \cdot (\rho_0 \delta\mathbf{r}) = 0 \quad \text{o} \quad \delta\rho + \rho_0 \nabla \cdot (\delta\mathbf{r}), \quad (2.21)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \delta\mathbf{r}}{\partial t^2} = \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p' + \rho_0 \nabla \Phi' + \rho' \nabla \Phi_0, \quad (2.22)$$

$$\nabla^2 \Phi' = 4\pi G \rho', \quad (2.23)$$

$$p' + \delta\mathbf{r} \cdot \nabla p_0 = \frac{\Gamma_{1,0} p_0}{\rho_0} (\rho' + \delta\mathbf{r} \cdot \nabla \rho_0). \quad (2.24)$$

## Ecuaciones de oscilaciones estelares lineales

A continuación se hará la derivación de las ecuaciones que describen las pequeñas oscilaciones para un estado de equilibrio esférico. Tales ecuaciones en general describen las oscilaciones no radiales con simetría esférica de las perturbaciones.

### Separación de variables

El desplazamiento  $\delta\mathbf{r}$  puede ser separado en componentes radial y horizontal [Aerts et al., 2010]:

$$\delta\mathbf{r} = \xi_r \mathbf{a}_r + \xi_h, \quad (2.25)$$

y notamos que la componente horizontal de la ecuación de movimiento 2.22 es

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial t^2} = -\nabla_h p' - \rho_0 \nabla_h \Phi', \quad (2.26)$$

y tomando la divergencia horizontal

$$\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla_h \cdot \xi_h = -\nabla_h^2 p' - \rho_0 \nabla_h^2 \Phi'. \quad (2.27)$$

La ecuación de continuidad 2.21 puede ser escrita como

$$\rho' = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} - \rho_0 \nabla_h \cdot \xi_h, \quad (2.28)$$

usando el operador nabla en coordenadas esféricas. La última ecuación puede usarse para eliminar  $\nabla_h \cdot \xi_h$  de la ecuación 2.27:

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \rho' + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (r^2 \rho_0 \xi_r)}{\partial r^2} \right] = -\nabla_h^2 p' - \rho_0 \nabla_h^2 \Phi'. \quad (2.29)$$

Mientras la componente radial de la ecuación 2.22 es

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = -\frac{\partial p'}{\partial r} - \rho' g_0 - \rho_0 \frac{\partial \Phi'}{\partial r}. \quad (2.30)$$

La ecuación de Poisson 2.23 sería [\[Christensen-Dalsgaard, 1997\]](#)

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( r^2 \frac{\partial \Phi'}{\partial r} \right) + \nabla_h^2 \Phi' = 4\pi G \rho'. \quad (2.31)$$

Se puede notar en las últimas tres ecuaciones que las derivadas con respecto a las variables angulares  $\theta$  y  $\phi$  solo aparecen en la combinación  $\nabla_h^2$  (algo similar puede ser probado para las ecuaciones de energía).

El objetivo ahora es factorizar la variación de las perturbaciones con  $\theta$  (la coordenada de colatitud) y  $\phi$  (la coordenada de latitud) como una función  $f(\theta, \phi)$ . Se puede notar, por la forma de las ecuaciones, que si  $f$  es una autofunción (*eigenfunction*) del operador horizontal de Laplace en coordenadas esféricas,

$$\nabla_h^2 f = -\frac{1}{r^2} \Lambda f, \quad (2.32)$$

donde  $\Lambda$  es una constante y la solución puede ser escrita como

$$f(\theta, \phi) = f_1(\theta) f_2(\phi). \quad (2.33)$$

El procedimiento para encontrar esta solución es el mismo para resolver la ecuación de Schrödinger en coordenadas esféricas [Griffiths, 1995]. Incluyendo un factor de escala apropiado podemos escribir finalmente:

$$f(\theta, \phi) = (-1)^m c_{lm} P_l^m(\cos \theta) \exp(im\phi) \equiv Y_l^m(\theta, \phi), \quad (2.34)$$

donde  $Y_l^m$  es un armónico esférico,  $c_{lm}$  es una constante de normalización,  $Y_l^m$  está caracterizado por su *orden*  $l$  ( $\Lambda = l(l+1)$ ) y su *orden azimutal*  $m$  ( $m \leq l$ ) [Arfken, 1985].

Entonces

$$\nabla_h^2 f = -\frac{l(l+1)}{r^2} f. \quad (2.35)$$

Las variables dependientes en las ecuaciones 2.29 a 2.31 pueden ahora ser escritas como [Cunha, 2017][Saio, 1993]

$$\xi_r(r\theta, \phi, t) = \sqrt{4\pi} \tilde{\xi}_r(r) Y_l^m(\theta, \phi) \exp(-i\omega t), \quad (2.36)$$

$$p'(r\theta, \phi, t) = \sqrt{4\pi} \tilde{p}'_r(r) Y_l^m(\theta, \phi) \exp(-i\omega t), \quad (2.37)$$

etc. Entonces las ecuaciones 2.29 a 2.31 quedan como

$$\omega^2 \left[ \tilde{\rho}' + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho_0 \tilde{\xi}_r) \right] = \frac{l(l+1)}{r^2} (\tilde{p}' + \rho_0 \tilde{\Phi}'), \quad (2.38)$$

$$-\omega^2 \rho_0 \tilde{\xi}_r = -\frac{d\tilde{p}'}{dr} - \tilde{\rho}' g_0 - \rho_0 \frac{d\tilde{\Phi}'}{dr}, \quad (2.39)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\tilde{\Phi}'}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \tilde{\Phi}' = 4\pi G \tilde{\rho}', \quad (2.40)$$

junto a la ecuación de energía

$$\left( \delta\tilde{p} - \frac{\Gamma_{1,0} p_0}{\rho_0} \delta\tilde{\rho} \right) = \rho_0 (\Gamma_{3,0} - 1) \delta\tilde{q}. \quad (2.41)$$

### Oscilaciones adiabáticas lineales

Por simplicidad se omitirá la virgulilla en las funciones de amplitud y el subíndice cero en las cantidades de equilibrio. Para oscilaciones adiabáticas, la ecuación 2.41 puede ser escrita como [Christensen-Dalsgaard, 1997]

$$\rho' = \frac{\rho}{\Gamma_1 p} p' + \rho \xi_r \left( \frac{1}{\Gamma_1 p} \frac{dp}{dr} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right), \quad (2.42)$$

donde por ejemplo  $\delta\tilde{p} = \tilde{p}' + \delta\mathbf{r} \cdot \nabla\tilde{p}_0 = p' + \xi_r dp/dr$ . Usando esta ecuación, las ecuaciones 2.38 a 2.40 se pueden escribir como

$$\frac{d\xi_r}{dr} = -\left( \frac{2}{r} + \frac{1}{\Gamma_1 p} \frac{dp}{dr} \right) \xi_r + \frac{1}{\rho c^2} \left( \frac{S_l^2}{\omega^2} - 1 \right) p' + \frac{l(l+1)}{\omega^2 r^2} \Phi', \quad (2.43)$$

$$\frac{dp'}{dr} = \rho(\omega^2 - N^2) \xi_r + \frac{1}{\Gamma_1 p} \frac{dp}{dr} p' - \rho \frac{d\Phi'}{dr}, \quad (2.44)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) = 4\pi G \left( \frac{p'}{c^2} + \frac{\rho \xi_r}{g} N^2 \right) + \frac{l(l+1)}{r^2} \Phi'. \quad (2.45)$$

Donde se ha introducido  $S_l$  la *frecuencia acústica característica* (frecuencia de Lamb) [Lamb, 1881] y  $N$  la *frecuencia de flotabilidad* (o de Brunt-Väisälä) [Walker, 1995], las cuales están

definidas respectivamente como

$$S_l^2 = \frac{l(l+1)c^2}{r^2}, \quad (2.46)$$

$$N^2 = g \left( \frac{1}{\Gamma_1 p} \frac{dp}{dr} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right). \quad (2.47)$$

### Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno en el centro estelar son derivadas imponiendo que las soluciones son regulares ahí. Expandiendo las ecuaciones cerca de  $r = 0$  se encuentra que las soluciones regulares requieren  $p' \sim \mathcal{O}(r^l)$ ,  $\phi' \sim \mathcal{O}(r^l)$ , y  $\xi_r \sim \mathcal{O}(r^\alpha)$ , donde  $\alpha = 1$  para  $l = 0$  y  $\alpha = l - 1$  para  $l > 0$ . Esto significa que, para  $r \rightarrow 0$ ,

$$\frac{d\Phi'}{dr} - \frac{l}{r}\Phi' \rightarrow 0, \quad \frac{dp'}{dr} - \frac{l}{r}p' \rightarrow 0, \quad \frac{d\xi_r}{dr} - \frac{\alpha}{r}\xi_r \rightarrow 0. \quad (2.48)$$

También es posible encontrar que para modos no radiales  $\xi_r = l\xi_h$  en  $r = 0$  [Cunha, 2017].

Fuera de la estrella la perturbación de la densidad desaparece y la ecuación de Poisson debe resolverse analíticamente, la solución que desaparece en el infinito es  $\Phi' = Ar^{-l-1}$ , donde  $A$  es una constante. Como consecuencia:

$$\frac{d\Phi'}{dr} - \frac{l+1}{r}\Phi' = 0, \quad \text{en } r = R. \quad (2.49)$$

Si asumimos una frontera libre, entonces consideramos que la presión en la frontera es constante y, por tanto, que la perturbación Lagrangiana de la presión es cero. En este caso:

$$\delta p = p' + \xi_r \frac{dp}{dr} = 0, \quad \text{en } r = R. \quad (2.50)$$

Este resultado es razonable para bajas frecuencias [Aerts et al., 2010].

## Autovalores

El sistema de ecuaciones 2.43 a 2.45 y las condiciones de contorno asociadas constituyen un problema de autovalores que necesita ser resuelto numéricamente. Solamente para valores discretos de los autovalores  $\omega$ , el sistema admite soluciones no triviales. Esas soluciones discretas pueden ser asociadas a un número entero  $n$ , el orden radial.

Los autovalores  $\omega(n, l, m)$  del conjunto de ecuaciones de pulsación 2.21 a 2.24 son caracterizados por tres números cuánticos,  $n$ ,  $l$  y  $m$ , donde el valor absoluto del primero,  $|n|$ , está relacionado al número de nodos de la perturbación a lo largo de la dirección radial, mientras los otros dos, están relacionados con la dependencia angular de las soluciones, en particular a la escala horizontal de la perturbación y su orientación sobre la superficie estelar [Cunha, 2017].

## Modos $p$ y modos $g$

Con el objetivo de hacer la discusión más simple, vamos a despreciar la perturbación Euleriana  $\Phi'$ , esta aproximación es llamada la aproximación de Cowling [Cowling, 1941]. Al aplicarla se obtiene [Aerts et al., 2010][Saio, 1993]

$$\frac{d^2 \xi_r}{dr^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{N^2}{\omega^2}\right) \left(\frac{S_l^2}{\omega^2} - 1\right) \xi_r. \quad (2.51)$$

Para analizar el comportamiento de las oscilaciones se escribirá de la siguiente manera

$$\frac{d^2 \xi_r}{dr^2} = -K_s(r) \xi_r, \quad (2.52)$$

donde

$$K_s(r) = \frac{\omega^2}{c^2} \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1\right) \left(\frac{S_l^2}{\omega^2} - 1\right). \quad (2.53)$$

El comportamiento local de  $\xi_r$  depende del signo de  $K_s$ . Donde  $K_s$  es positivo,  $\xi_r$  es una función localmente oscilatoria de  $r$ , y donde  $K_s$  es negativo la solución es localmente un exponencial creciente o decreciente como función de  $r$ . De particular interés es la primera situación, lo cual ocurre cuando (i)  $|\omega| > |N|$  y  $|\omega| > S_l$  o (ii)  $|\omega| < |N|$  y  $|\omega| < S_l$ . Del comportamiento observado para el Sol y las condiciones para una solución oscilatoria, se esperan dos clases de modos[Cowling, 1941][Saio, 1993]:

- Los modos con altas frecuencias satisfacen (i), y son llamados **modos p**. Los modos de presión son ondas acústicas, muy parecidas a las ondas de sonido en el aire; el mecanismo de propagación es el mismo.
- Los modos con bajas frecuencias satisfacen (ii), y son llamados **modos g**. Los modos de gravedad son restaurados por la gravedad y actúan de la siguiente manera. Si un elemento de fluido se mueve hacia arriba y aún es más pesado que el fluido desplazado, la flotabilidad lo empujará de regreso a su posición original. Aquí podemos ver de nuevo el carácter no radial de los modos  $g$ . Para moverse verticalmente, un elemento fluido tiene que desplazar la materia horizontalmente, lo que introduce una componente de perturbación no radial.

# Capítulo 3

## Estrellas BR Cnc y BS Cnc

En este capítulo profundizaremos en las estrellas que han sido estudiadas y en el cúmulo donde se encuentran, el Pesebre. Hablaremos de sus principales características y, además, las razones por las que se vuelve de especial interés para estudios sismológicos en sus estrellas.

### 3.1. Los cúmulos estelares abiertos

Tradicionalmente se ha reconocido que los cúmulos estelares son un excelente laboratorio para probar los modelos de evolución estelar y la determinación de parámetros físicos. La escala de tiempo evolutiva estelar muy larga hace que sea casi imposible seguir la evolución de las estrellas individuales mediante la observación [de La Fuente Marcos and de La Fuente Marcos, 2000]. Sin embargo, si nos fijamos en los cúmulos, es posible imponer restricciones a las teorías de la evolución estelar, ya que se puede suponer una edad, una distancia y una abundancia química inicial comunes para todas las estrellas del cúmulo. Esto es crucial ya que podemos usar el brillo relativo de las estrellas para probar las teorías evolutivas estelares incluso si la distancia al cúmulo está mal determinada [Kroupa, 1995].

Además, los cúmulos abiertos son herramientas importantes en el estudio del disco galáctico, por ejemplo el estudio de la estructura del brazo espiral, para investigar los mecanismos de formación estelar y su historia reciente, y para restringir la luminosidad inicial y las

funciones de masa de las estrellas [Spina et al., 2021]. Desafortunadamente, muchas de las investigaciones que utilizan datos sobre cúmulos abiertos sufren de parámetros de observación muy poco restringidos de enrojecimiento, metalicidad, distancia y edad [Casamiquela, L. et al., 2021]. Por lo tanto, un importante trabajo de observación es obtener valores mucho mejores para estos parámetros.

Los cúmulos abiertos proveen una base para estudiar la formación y evolución estelar, distancias, y así como el estudio pequeños sistemas dinámicos. Los cúmulos abiertos pueden ser modelados directamente con simulaciones numéricas de  $N$  cuerpos [Aarseth, 1999]. Por lo general, estas simulaciones modelan el papel de múltiples sistemas, la segregación de masas y la distribución de velocidades, la estructura del halo y, en última instancia, la evolución de la función de masa a partir de la pérdida de estrellas a través de procesos de escape.

## 3.2. El cúmulo del Pesebre

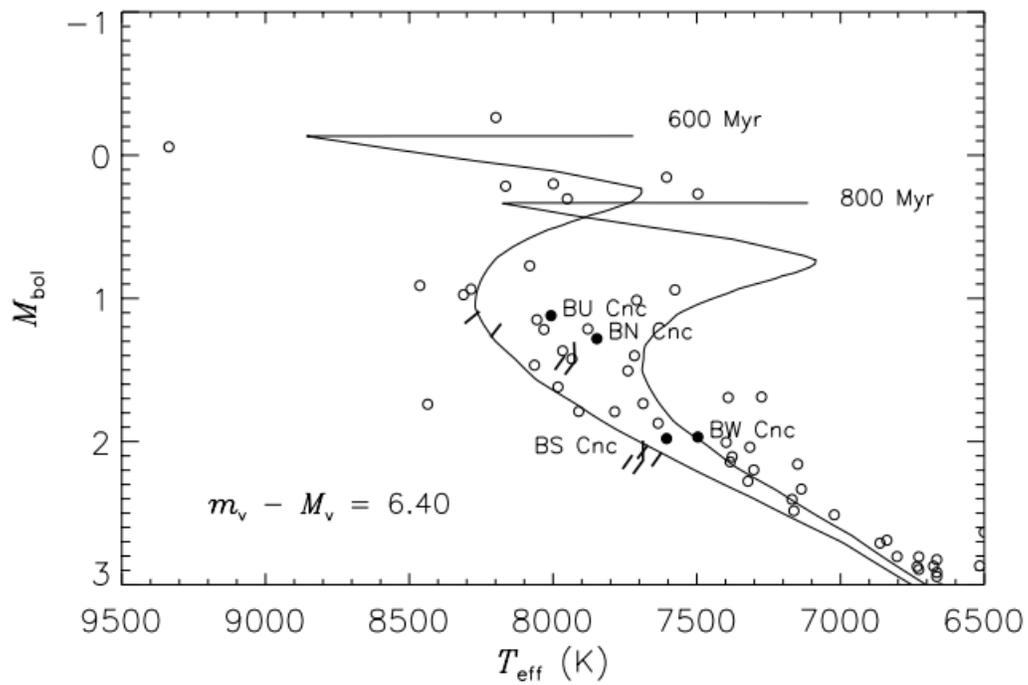
El cúmulo del Pesebre (M44, NGC 2632) es un cúmulo abierto muy cercano a la tierra que se puede ubicar en la constelación de Cáncer, concretamente en las coordenadas  $\alpha(2000) \sim 8^h40^{min}$  y  $\delta(2000) \sim 19^\circ47'$ , en la Figura 3.1 se muestra una imagen de campo de la parte central de cúmulo. Su distancia ha sido estimada en 187 pc [Kharchenko et al., 2005]. Su abundancia es  $[Fe/H]=0.16$  dex y su edad de  $0.73 \pm 0.19$  Gyr [Netopil et al., 2016].

Los cúmulos del Pesebre y Hyades son muchas veces considerados cúmulos abiertos gemelos, debido a que esencialmente tienen la misma edad y metalicidad. Algunos autores atribuyen estas similitudes a que los dos cúmulos han nacido dentro de la misma nube molecular o complejo de nubes. Los movimientos espaciales parecen reforzar esta idea.

Se ha observado segregación masiva en el cúmulo del Pesebre, lo que significa que las estrellas más masivas y brillantes se acumulan en el centro del cúmulo, y las estrellas más débiles y menos masivas se ubican en el halo. Esto se hace investigando la función de masa del cúmulo



**Figura 3.1:** Imagen de la parte central del cúmulo del Pesebre. Créditos: Stuart Heggie/NASA.



**Figura 3.2:** Diagrama HR del cúmulo del Pesebre. Tomado de [\[Hernandez et al., 1998a\]](#).

y la dependencia de la masa estelar con su radio [Kraus and Hillenbrand, 2007].

El cúmulo contiene unas mil estrellas, estimando una masa de  $\sim 600 M_{\odot}$  [Adams et al., 2002]. Recientemente se ha confirmado la presencia de once enanas blancas [Dobbie et al., 2006], que representan la etapa final de evolución para estrellas masivas del cúmulo.

### 3.3. Las estrellas Delta Scuti del cúmulo del Pesebre

El punto de giro en el diagrama HR (ver Figura 3.2) para el cúmulo del Pesebre se encuentra en la banda de inestabilidad, por ello tiene una población estelar elevada. Esto lo hace uno de los cúmulos abiertos con más estrellas  $\delta$  Scuti conocido hasta ahora. En la figura se muestran dos ajustes de isocrónas para diferentes edades del cúmulo y se señala la posición de algunas  $\delta$  Scuti. En la tabla **3-1** se enlistan las estrellas  $\delta$  Scuti conocidas del cúmulo, junto a sus coordenadas, magnitud aparente y el tipo espectral.

Muchas de las estrellas  $\delta$  Scuti del Pesebre han sido objeto de diferentes campañas de observación: BN y BU Cnc [Belmonte et al., 1994], BV Cnc [Arentoft et al., 1997], BQ y BW Cnc [Alvarez et al., 1998], BT Cnc [Kim and Lee, 1995], EP Cnc [Breger et al., 1994], BX Cnc [Li, 2007]. Estos trabajos han aportado a una mejor comprensión de la naturaleza de estas estrellas, mostrando su multiperiodicidad, su progresión en el estado evolutivo y en consonancia con las teorías que explican las frecuencias de excitación por el mecanismo  $\kappa$ .

### 3.4. BS Cnc y BR Cnc

BS Cancri (HD 73450) y BR Cancri (HD 73175) son dos de las estrellas variables pulsantes del tipo  $\delta$  Scuti del cúmulo del Pesebre (Figura 3.3). Fueron identificadas por primera vez por Klein Wassink [Klein Wassink, 1927] con el identificador KW 154 y 45, respectivamente, donde se presentó un catálogo de 577 estrellas del cúmulo con sus datos de posición, magnitud fotométrica y movimiento propio.

Nombre	HD	AR	DEC	$m_v$	TE
BU Cnc	73576	08 39 44.6	+19 16 30.7	7.65	A7V
BN Cnc	73763	08 40 39.2	+19 13 41.8	7.80	A9V
BW Cnc	73798	08 40 52.4	+20 15 59.4	8.48	F0V
BS Cnc	73450	08 39 09.0	+19 35 32.6	8.59	A9V
BT Cnc	73575	08 39 42.6	+19 46 42.4	6.66	F0IV
EP Cnc	73819	08 40 56.2	+19 34 49.2	6.78	A6V
BR Cnc	73175	08 37 40.7	+19 31 06.3	8.25	F0V
BX Cnc	74028	08 42 06.4	+19 24 40.5	7.97	A7V
BQ Cnc	73729	08 40 26.7	+20 10 55.2	8.19	F2V
BY Cnc	74050	08 42 10.8	+18 56 03.7	7.91	A7V
BV Cnc	73746	08 40 32.9	+19 11 39.5	8.72	F0V
CY Cnc	73345	08 38 37.8	+19 59 23.0	8.14	F0V
HI Cnc	73890	08 41 18.3	+19 15 39.5	8.82	A7V
–	73712	08 40 20.1	+19 20 56.3	6.78	A9V

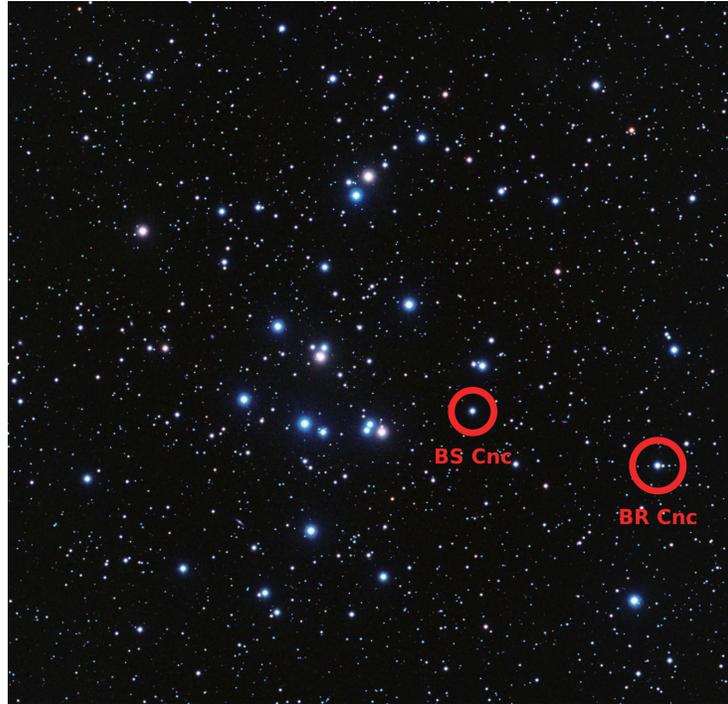
**Tabla 3-1:** Estrellas  $\delta$  Scuti del cúmulo del Pesebre. Tomados de la base de datos SIMBAD [Wenger et al., 2000].

Desde entonces estas estrellas han sido objeto de múltiples estudios que han arrojado gran cantidad de información valiosa para entender su composición. En la tabla **3-2** se resumen algunos parámetros importantes. Donde se puede notar una gran similitud entre ellas, lo que refuerza nuestro interés para realizar este trabajo.

Nuestro principal interés en esta sección es recabar toda la información sismológica con que se cuenta hasta ahora de este par de estrellas, por lo que en las siguientes subsecciones se resumirá dicha información.

## BS Cnc

Fue identificada por primera vez como pulsante del tipo delta Scuti por Breger en 1973 [Breger, 1973], quien reportó un periodo de pulsación de 0.051 d y una amplitud de 0.02 mag. La Figura 3.4 muestra las curvas de luz obtenidas por Breger.



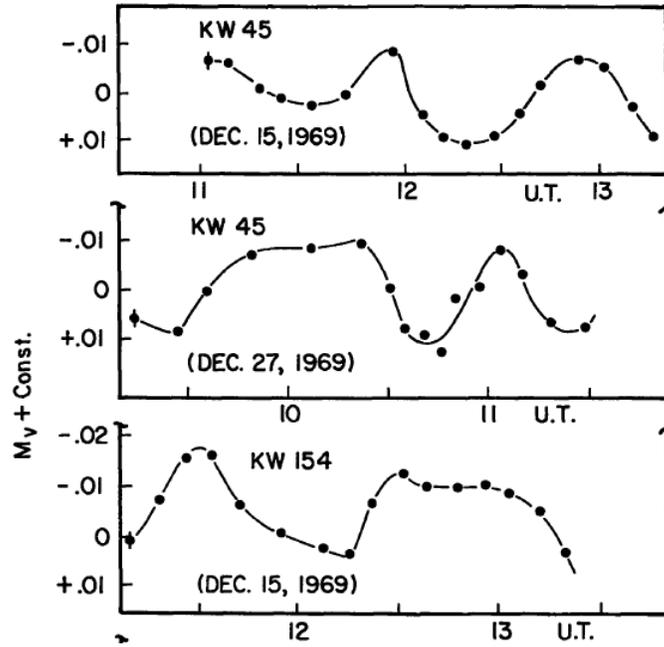
**Figura 3.3:** Imagen de campo de la parte central del cúmulo del Pesebre, mostrando la ubicación de las estrellas BS Cnc y BR Cnc. Tomada de la base de datos SIMBAD [Wenger et al., 2000].

Nombre	Periodo (d)	Distancia (pc)	$T_e$ (K)	$v \sin i$ (kms $^{-1}$ )	[Fe/H]
BS Cnc	0.05870	176	7270	166	-0.03
BR Cnc	0.04004	187	7660	175	0.07

**Tabla 3-2:** Principales parámetros estelares de BS Cnc y BR Cnc. Tomados de la base de datos SIMBAD [Wenger et al., 2000].

En 1998, Peña y colaboradores [Pena et al., 1998] usaron fotometría fotoeléctrica en el telescopio de 1.5 m del observatorio de San Pedro Mártir (Baja California, México). Emplearon un fotómetro que permite las observaciones simultáneas en los filtros *uvby* de el sistema de Strömgren y, casi simultáneamente, en el Filtros N y W que definen  $H\beta$ . Haciendo un análisis comparativo de códigos de cómputo para el análisis de períodos, reportaron dos frecuencias de pulsación para BS Cnc: 17.04 c/d (197.22  $\mu$ Hz) y 16.3 c/d (188.66  $\mu$ Hz).

También en 1998, Hernández y colaboradores [Hernandez et al., 1998b] realizaron



**Figura 3.4:** Curvas de luz presentadas por Breger en 1973 [Breger, 1973] para las estrellas BS Cnc (KW154) y BR Cnc (KW045).

observaciones de BS Cnc durante la campaña multisitio STEPHI VII (Stellar PHotometry International) desde tres observatorios: San Pedro Mártir (México), Estación Xing Long (China) y Teide (España). Fotómetros de cuatro canales fueron usados en cada sitio, con filtros interferométricos azules en cada canal. Diferentes métodos fueron usados para obtener el espectro de amplitud de Fourier para la serie temporal, y así reportar cuatro frecuencias de pulsación: 197.167, 179.683, 481.829 y 396.165  $\mu\text{Hz}$ .

En 2017, Rebull y colaboradores [Rebull et al., 2017] realizaron un análisis de Fourier de 941 curvas de luz de K2 (de larga cadencia) para miembros del Presebre. Reportaron los periodos para BS Cnc: 0.05870 y 0.0644 d.

Hernández y colaboradores además, en 1998 [Hernandez et al., 1998a] realizaron un estudio sismológico, donde identificaron modos radiales de oscilación y sus parámetros estelares para cuatro estrellas delta Scuti multi-periódicas en el cúmulo del Presebre. Dos modos radiales fueron identificados para BS Cnc.

En 2012, Breger y colaboradores [Breger et al., 2012] presentaron los resultados de un estudio para determinar las frecuencias de pulsación de cuatro estrellas  $\delta$  Scuti del cúmulo del Pesebre usando mediciones fotométricas por el satélite MOST (Microvariability and Oscillations of STars). Las estrellas fueron observadas entre los años 2008 y 2009, y el análisis de frecuencias se realizó mediante Period04 [Lenz and Breger, 2014], encontrando 34 frecuencias de pulsación registradas por separado en cada año.

## BR Cnc

Fue identificada por primera vez como pulsante del tipo delta Scuti por Breger en 1973 [Breger, 1973], quien reportó un periodo de pulsación de 0.038 d y una amplitud de 0.02 mag. La Figura 3.4 muestra las curvas de luz obtenidas por Breger.

En 2017, Rebull y colaboradores [Rebull et al., 2017] realizaron un análisis de Fourier de 941 curvas de luz de K2 (de larga cadencia) para miembros del Presebre. Reportaron tres periodos para BR Cnc: 0.0872, 0.1219, 0.0965 d.

En 1997, Zhou [Zhou, 1997] realizó observaciones fotométricas durante diez noches desde la estación Xinglong del Observatorio Astronómico de Beijing y mediante análisis de frecuencias usando Period04 [Lenz and Breger, 2014] reportó las siguientes frecuencias: 26.0023, 10.4776 y 10.8994 ciclos/d. Sin embargo, Zhou concluyó que la segunda y tercer frecuencia podrían estar influenciadas por un solapamiento de 1 ciclo/d observador en la ventana espectral, así que sugirió un estudio más exhaustivo.

En 1998, Peña y colaboradores [Pena et al., 1998] en el estudio citado anteriormente para BS Cnc, también reportaron tres frecuencias de pulsación para BR Cnc: 24.957, 26.902 y 9.102 ciclos/d.

En 2001, Zhou [Zhou et al., 2001] presentó los resultados de un estudio fotométrico (Johnson

$V$  y Strömgren  $uvbyH\beta$ ) de tres años de BR Cnc desde la estación Xinglong del Observatorio Astronómico de Beijing. El análisis de Fourier de los datos arrojó cuatro frecuencias de pulsación: 24.978, 11.358, 11.808 y 27.914 ciclos/d. Además, se presentó evidencia de que la primera frecuencia mantuvo su amplitud  $V$  constante en alrededor de 6 mmag, pero su amplitud  $v$  mostró cambios. También se observaron cambios en la amplitud para las otras frecuencias.

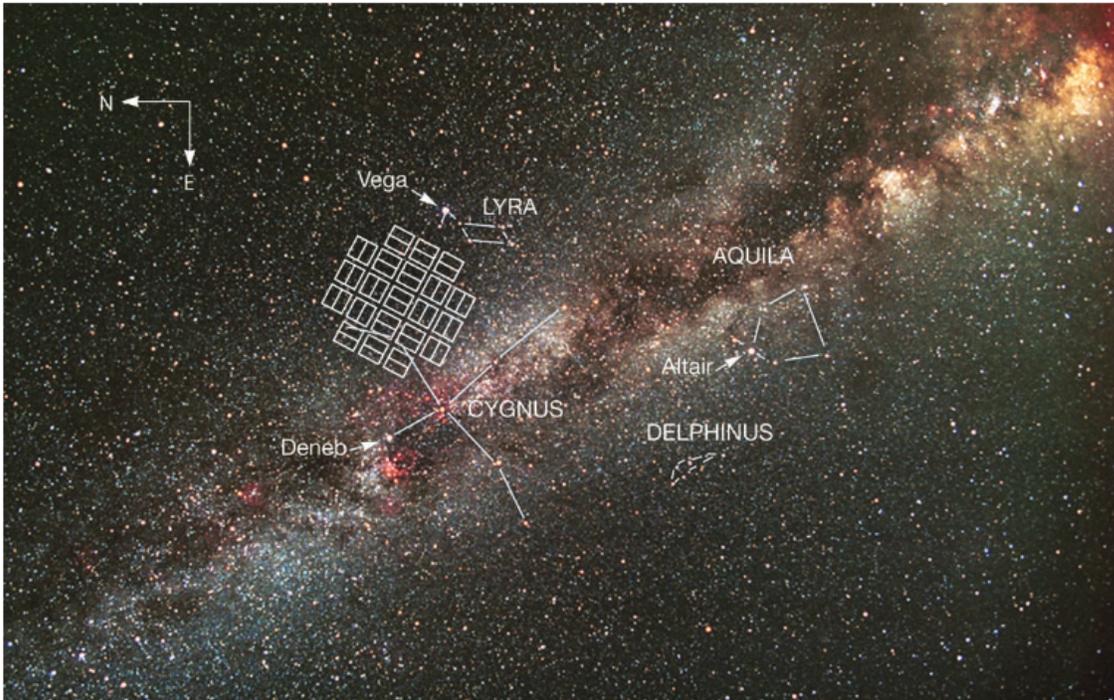
# Capítulo 4

## Frecuencias de pulsación observacionales

### 4.1. El telescopio espacial Kepler

La misión Kepler fue lanzada el 6 de marzo de 2009, para detectar y caracterizar planetas de tamaño similar o más pequeños que la Tierra, dentro o cerca de la zona de habitabilidad, en un campo amplio entre las constelaciones de Cygnus y Lyra [Howell et al., 2014] (ver Figura 4.1). Para este propósito usaba la fotometría de tránsito, que proporciona el período orbital y el tamaño del planeta en relación con su estrella [Holman and Murray, 2004]. El Telescopio Espacial Kepler se encontraba en una órbita heliocéntrica de seguimiento de la Tierra de 372.5 d, recopilaba datos fotométricos de luz blanca para alrededor de 150,000 estrellas simultáneamente en su campo de visión de  $115 \text{ deg}^2$  y con una precisión cercana a la micromagnitud [Murphy, 2014].

El telescopio Kepler tiene un tamaño total de aproximadamente 2.7 metros de diámetro y 4.7 metros de altura. La energía era proporcionada por cuatro paneles no coplanares con un área total de 10.2 metros cuadrados de superficie de captación solar. Combinadas, las 2860 células solares individuales producen más de 1100 vatios. El único instrumento de Kepler es



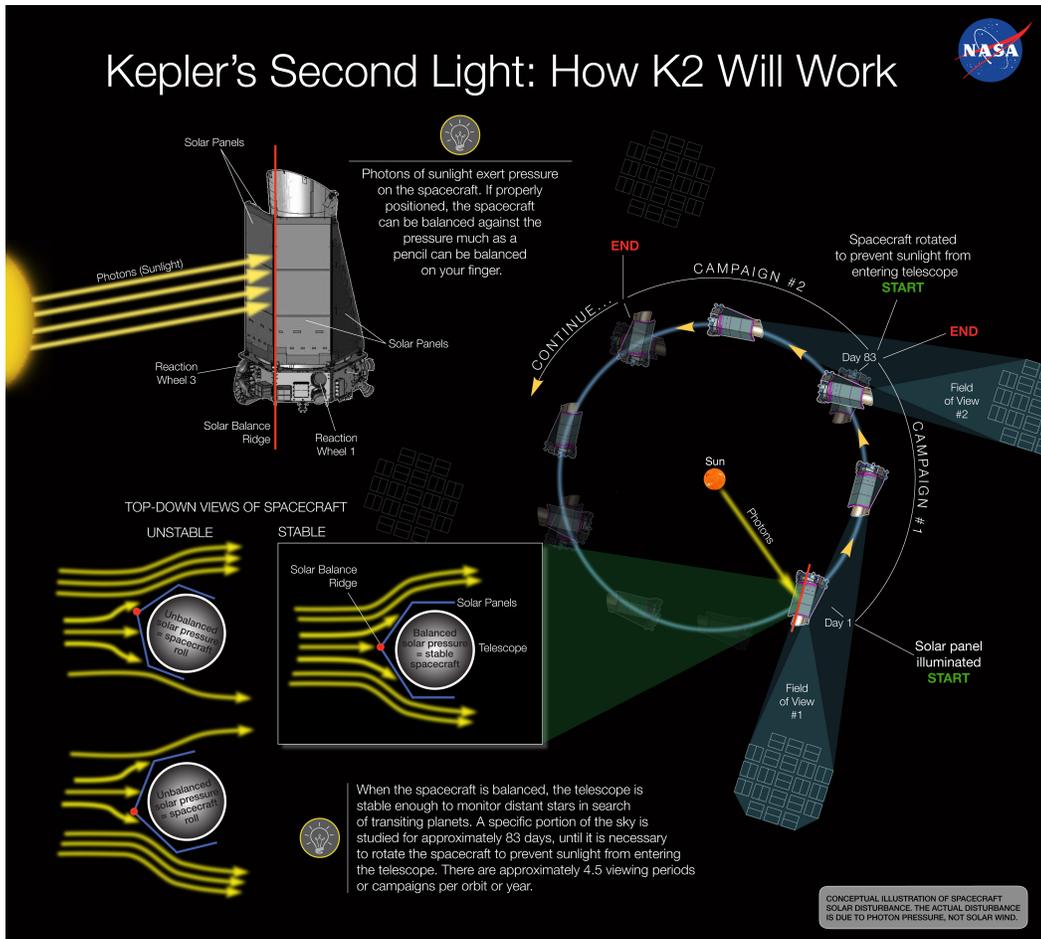
**Figura 4.1:** Campo de visión de Kepler [Aeronautics and Administration, 2009].

un fotómetro. Tiene un telescopio tipo Schmidt<sup>1</sup> de apertura de 0.95 metros con un espejo primario de 1.4 metros. El fotómetro de Kepler tiene un campo de visión muy amplio para un telescopio astronómico de unos 15 grados de diámetro. El fotómetro presenta una matriz de plano focal con 95 millones de píxeles [Aeronautics and Administration, 2009].

El propósito principal de la Misión Kepler fue detectar planetas del tamaño de la Tierra en la zona habitable de estrellas de tipo solar (enanas F a K), determinar su frecuencia e identificar sus características. Cuando se combina con parámetros estelares y mediciones de velocidad radial, se obtienen la masa, el radio y la densidad del planeta [Koch et al., 2010].

La fotometría de tránsito requiere una alta precisión fotométrica con datos de series temporales continuas de un gran número de estrellas durante un período de tiempo prolongado. Aunque estaba diseñada con el propósito explícito de la detección de planetas

<sup>1</sup>Este telescopio combina un espejo esférico con una lente correctora especial, llamada placa de Schmidt, situada en el frente del tubo. La placa correctora corrige la aberración esférica introducida por el espejo esférico, permitiendo obtener imágenes nítidas y de amplio campo.



**Figura 4.2:** Esta ilustración muestra cómo se utilizó la presión solar para equilibrar la nave espacial Kepler, manteniendo el telescopio lo suficientemente estable como para continuar buscando planetas en tránsito alrededor de estrellas distantes. Créditos: NASA Ames / W Stenzel [Johnson, 2013].

terrestres, la naturaleza del conjunto de datos de Kepler también es de gran valor para la astrofísica estelar. Astrosismología, girocronología y astrometría, los estudios de estrellas de tipo solar, binarias eclipsantes y variables clásicas; todos dependen de series de tiempo de flujo continuo, extendido y preciso. Los resultados de muchos de estos campos, a su vez, se relacionan con la interpretación de la ciencia de los exoplanetas [Koch et al., 2010].

## 4.2. K2: La segunda misión de Kepler

La pérdida de dos de las cuatro ruedas de reacción a bordo de la nave espacial Kepler en mayo de 2013 puso fin a la misión científica de cuatro años de Kepler, en su primera etapa.

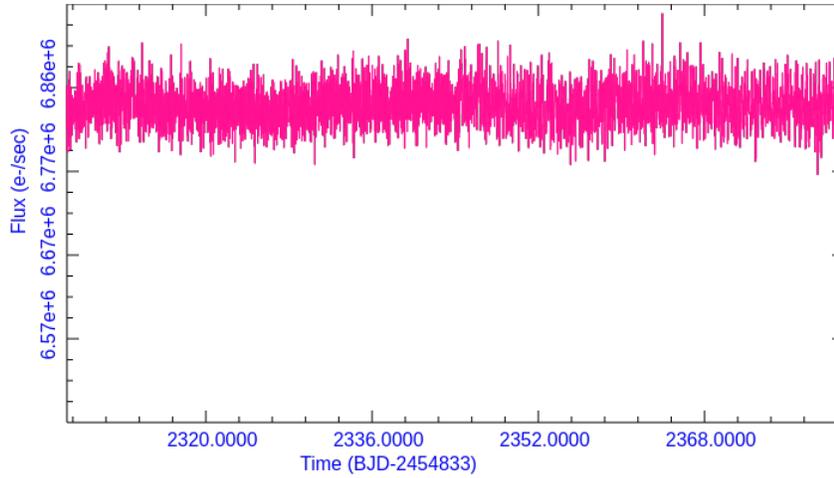


entrada del plano eclíptico). En cada año de funcionamiento, K2 observó aproximadamente 40000 objetivos ( $\sim 10000$  por campo de visión) distribuidos en cuatro campos de visión. K2 recopiló datos a cadencias de 30 minutos y 1 minuto, y produjo una fotometría de 80 ppm para estrellas de magnitud 12 en escalas de tiempo de 6 horas. K2 observó tanto en el cielo del norte como del sur, dentro y fuera del plano de la Galaxia y, durante su funcionamiento, cubrió diez veces más área del cielo que la misión original de Kepler [Howell et al., 2014].

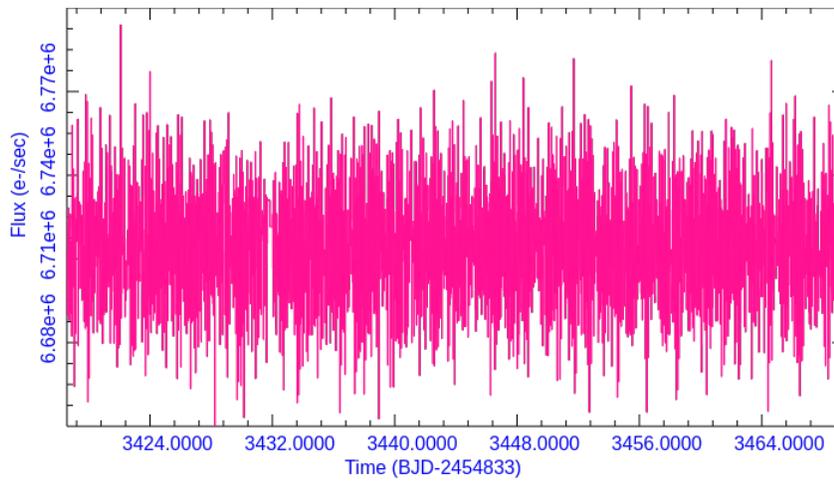
Los datos de Kepler están disponibles en dos cadencias, larga cadencia (LC: *long cadence*) y corta cadencia (SC: *short cadence*). Cada cadencia se compone de múltiples exposiciones de 6.02 s con tiempos de lectura asociados de 0.52 s. Los datos de LC integran más de 270 exposiciones para dar observaciones de 29.45 min, mientras que los datos de SC contienen nueve exposiciones que dan un punto de datos cada 58.85 s. Ambas cadencias se almacenaban a bordo y se conectaban a la Tierra aproximadamente cada 32 d, lo que introducía brechas de hasta 24 h de duración mientras el fotómetro no recopilaba datos. Kepler completaba un cuarto de su órbita después de tres enlaces descendentes, y luego debía realizar un giro trimestral para mantener sus paneles solares apuntando hacia el Sol y su radiador apuntando al espacio profundo. Por lo tanto, los datos de Kepler se organizaban en cuartos y tercios alrededor de esos rollos y enlaces descendentes. Los trimestres de datos de LC se indicaban con  $Q_n$  y los trimestres de SC con  $Q_{n.m}$  para indicar a qué tercio (o "mes") de ese trimestre correspondían los datos. Aunque los datos de LC no se dividen en meses, las brechas de enlace descendente aún se pueden ver en los datos. El hardware de Kepler limita las ranuras de observación de SC a 512 en cualquier momento.

### 4.3. Curvas de luz de BR Cnc y BS Cnc

K2 observó a BR Cnc (*K2 ID: EPIC 211953002*) durante la campaña 5 con una duración de 74 días y la campaña 18 con una duración de 50 días, estos datos son de larga cadencia. Las figuras 4.4a y 4.4b muestran las curvas de luz obtenidas para estas campañas.



(a)

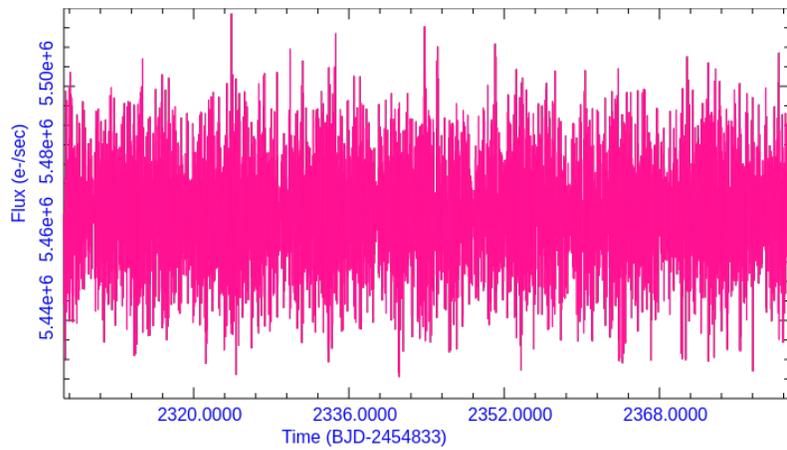


(b)

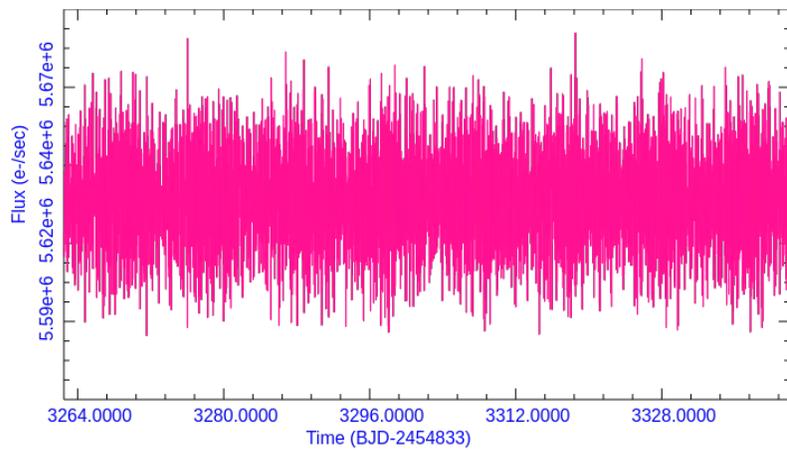
**Figura 4.4:** Curvas de luz para BR Cnc observadas en (a) la campaña 5 y (b) la campaña 18, por K2. El flujo es medido en electrones por segundo (e-/sec) y el tiempo se muestra en fecha juliana baricéntrica (BJD). Obtenida del Mikulski Archive for Space Telescopes (MAST) [NASA, 2012].

BS Cnc (*K2 ID: EPIC 211957791*) fue observado durante la campaña 5 con una duración de 74 días, campaña 16 con una duración de 80 días y en la campaña 18 (con una duración de 50 días, estos datos son de larga cadencia. Las figuras 4.5a, 4.5b y 4.5c muestran las curvas de luz obtenidas para estas campañas.

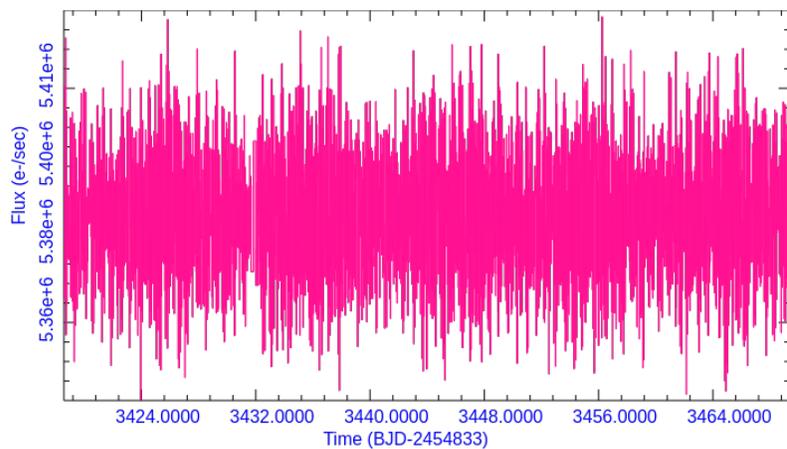
En el portal MAST (Mikulski Archive for Space Telescopes) [NASA, 2012] es posible



(a)



(b)



(c)

**Figura 4.5:** Curvas de luz para BS Cnc observadas en las campañas (a) 5, (b) 16 y (c) 18, por K2. El flujo es medido en electrones por segundo (e-/sec) y el tiempo se muestra en fecha juliana baricéntrica (BJD). Obtenida del Mikulski Archive for Space Telescopes (MAST) [[NASA, 2012](#)].

descargar las curvas de luz de SAP (Simple Aperture Photometry) y de PDCSAP (Pre-search Data Conditioning Simple Aperture Photometry). La curva de luz de SAP se calcula sumando el brillo de los píxeles que caen dentro de una apertura establecida por la misión Kepler. Esto a menudo se conoce como la apertura óptima, pero a pesar de su nombre, a veces se puede mejorar. Debido a que la curva de luz de SAP es una suma del brillo en píxeles elegidos, todavía está sujeta a artefactos sistemáticos de la misión. La curva de luz PDCSAP está sujeta a más tratamiento que la curva de luz SAP y está específicamente diseñada para detectar planetas. El ducto PDCSAP intenta eliminar los artefactos sistemáticos mientras mantiene intactos los tránsitos planetarios [Van Cleve and Bryson, 2017].

#### 4.4. Obtención de frecuencias de pulsación

Las curvas de luz obtenidas desde la base de datos MAST vienen directamente en formato FITS (Flexible Image Transport System), que es el formato de archivo más usado en astronomía. Para propósitos de la obtención de las frecuencias de pulsación es necesario convertir las curvas de luz a formato de texto, esto se realizó mediante el software *fv FITS Viewer* [Pence and Chai, 2012], que es un programa gráfico fácil de usar para ver y editar cualquier imagen o tabla en formato FITS. Las tablas de datos exportadas solamente contienen dos columnas, *TIME* y *PDCSAPFLUX*.

Para extraer las frecuencias de pulsación se usó el software *PERIOD04* [Lenz and Breger, 2014], el cual analiza estadísticamente grandes series temporales astronómicas que contienen espacios, calcula las incertidumbres formales, puede extraer las frecuencias individuales del contenido multiperiódico de las series temporales y proporciona una interfaz flexible para realizar ajustes de frecuencias múltiples con una combinación de ajuste de mínimos cuadrados y el algoritmo de transformada discreta de Fourier.

De *Period04* se usaron dos de sus módulos principales: el módulo de ajuste y el módulo de Fourier. A continuación se describe brevemente la función de cada módulo.

**El modulo de cadena temporal:** Dentro de este módulo, el usuario administra los datos de la cadena de tiempo. El módulo contiene herramientas para dividir un conjunto de datos en subcadenas, combinar conjuntos de datos, establecer pesos, etc.

**El modulo de ajuste (*fit*):** En este módulo se pueden realizar ajustes de mínimos cuadrados de varias frecuencias. Además de las técnicas de ajuste básicas, Period04 también contiene la posibilidad de ajustar variaciones de amplitud y/o fase, o tener en cuenta un cambio de tiempo periódico. Además, se encuentran disponibles varias herramientas para el cálculo de incertidumbres de parámetros de ajuste, como las simulaciones de Monte Carlo.

**El modulo de Fourier:** Para la extracción de nuevas frecuencias de los datos se proporciona este módulo. El análisis de Fourier en Period04 se basa en un algoritmo de transformada de Fourier discreta. No utiliza un algoritmo de Transformada Rápida de Fourier (FFT), ya que los conjuntos de datos de cadenas de tiempo astronómicos generalmente no están igualmente espaciados.

Se eliminaron algunos puntos alejados del grupo principal de mediciones. El punto cero promedio (magnitud promedio del objeto) se restó del conjunto de datos para evitar la aparición de artefactos centrados en una frecuencia 0.0 del periodograma. Con el modulo Fourier calculamos las frecuencias en un rango de 0 a 24 ciclos por día, que es la frecuencia Nyquist de larga cadencia<sup>2</sup>. Las figuras 4.6 muestran los espectros de frecuencias obtenidos con el modulo de Fourier de Period04 para las frecuencias principales de las estrellas.

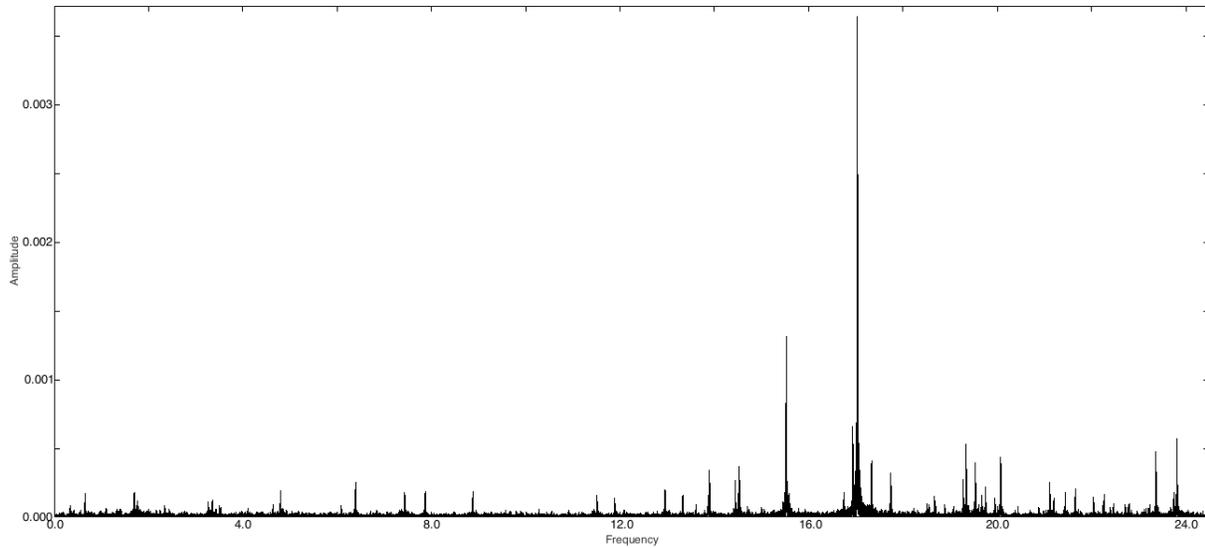
Luego usando el modulo de ajuste, se va ajustando cada frecuencia mediante un ajuste de mínimos cuadrados con la siguiente fórmula de ajuste:

$$f(t) = Z + \sum_i A_i \sin(2\pi(\Omega_i t + \Phi_i)). \quad (4.1)$$

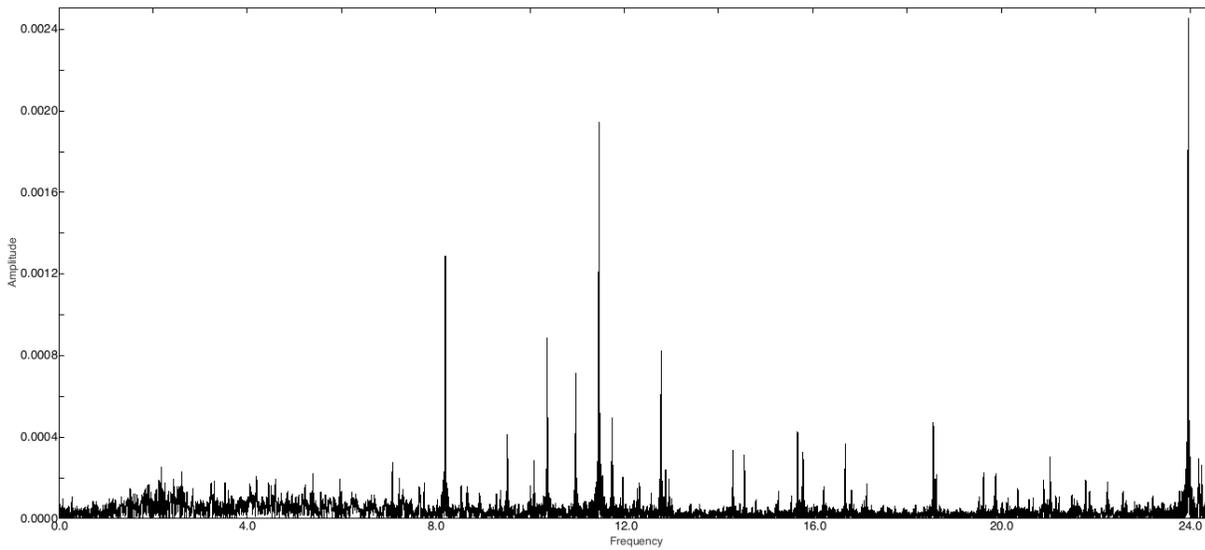
Para verificar la significancia de las frecuencias detectadas se usó el criterio empírico que

---

<sup>2</sup>La frecuencia de Nyquist es un concepto fundamental en el procesamiento de señales y en la teoría de muestreo. Se define como la mitad de la tasa de muestreo de una señal.

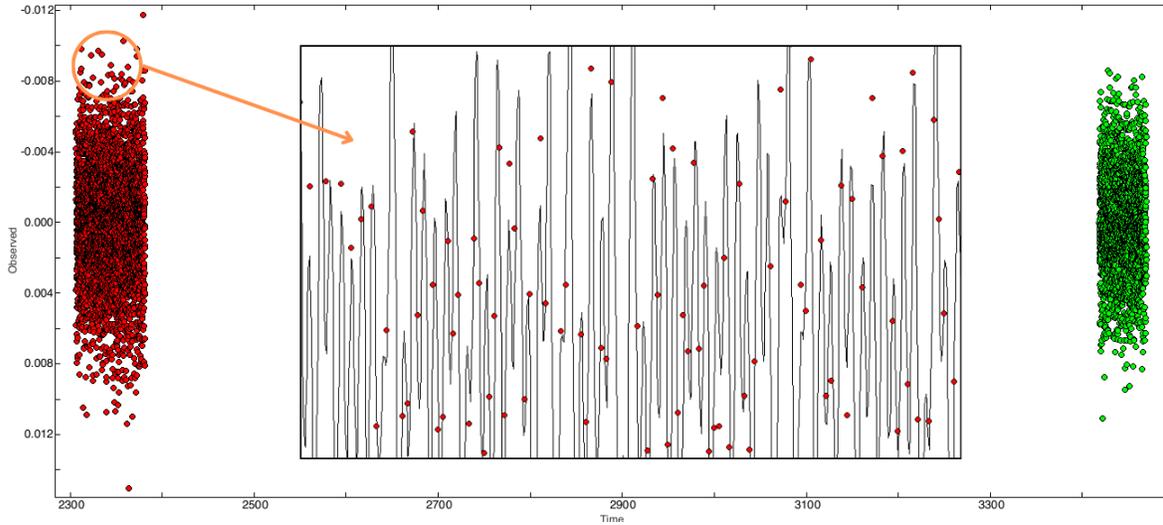


(a)



(b)

**Figura 4.6:** Espectros de amplitud (en ciclos por día) para (a) BS Cnc y (b) BR Cnc, obtenidos en software *period04*.



**Figura 4.7:** Serie temporal de BR Cnc, para las campañas 5 y 18 de Kepler K2 unidas, mostrando además el ajuste realizado por Period04.

una amplitud con una razón señal a ruido S/N (cociente entre la amplitud y el ruido de la señal) mayor a cuatro usualmente corresponde a un pico intrínseco al objetivo con una buena confianza [Breger, 2002]. Period04 también permite reconocer armónicos o combinaciones de frecuencias y fue posible encontrar algunas de estas combinaciones para ambas estrellas. Después de consecutivos blanqueos se obtuvieron las frecuencias mostradas en las Tablas 4-1 y 4-2.

En la Figura 4.7 se muestra la serie temporal, dentro del entorno gráfico de Period04, para BRCnc mostrando los datos de las campañas 5 y 18, y también se muestra un acercamiento del ajuste realizado por el software a los datos.

No	Frecuencia (c/d)	Amplitud (mmag)	S/N	Combinaciones
$f_1$	17.036(2)	3.66(1)	91	
$f_2$	15.527(0)	1.32(3)	67	
$f_3$	16.934(5)	0.71(4)	37	
$f_4$	23.811(6)	0.56(2)	33	
$f_5$	19.340(4)	0.53(3)	26	

$f_6$	23.364(2)	0.47(5)	32	
$f_7$	20.070(9)	0.44(5)	25	
$f_8$	17.334(8)	0.38(8)	23	
$f_9$	19.534(7)	0.38(4)	21	
$f_{10}$	14.527(8)	0.37(1)	28	$2f_3 - f_5$
$f_{11}$	17.341(6)	0.36(0)	23	$f_5 + 2f_{10} - 2f_2$
$f_{12}$	13.899(0)	0.34(5)	30	$f_1 + f_3 - f_7$
$f_{13}$	17.746(2)	0.31(0)	19	
$f_{14}$	19.282(9)	0.26(2)	16	
$f_{15}$	14.446(2)	0.25(9)	23	
$f_{16}$	6.391(0)	0.25(6)	28	
$f_{17}$	17.032(5)	0.27(7)	21	$f_1$
$f_{18}$	21.658(1)	0.21(5)	14	
$f_{19}$	20.080(8)	0.21(0)	14	$f_7$
$f_{20}$	23.832(2)	0.20(2)	16	$f_4 + 2f_{19} - 2f_7$
$f_{21}$	19.748(9)	0.19(6)	14	$f_{11} + f_3 - f_{10}$
$f_{22}$	21.114(4)	0.18(8)	13	$f_{17} + f_6 - f_{14}$
$f_{23}$	14.537(8)	0.19(2)	17	$2f_1 - f_9$
$f_{24}$	21.444(6)	0.17(7)	13	$f_{18} + f_9 - f_{21}$
$f_{25}$	22.268(0)	0.17(4)	15	$f_{18} + 2f_{11} - 2f_1$
$f_{26}$	1.6964(3)	0.17(2)	12	$f_{24} - f_{21}$
$f_{27}$	13.874(7)	0.17(2)	17	$2f_6 - f_7 - 2f_{16}$
$f_{28}$	7.8691(6)	0.16(8)	22	$f_{12} + f_8 - f_6$
$f_{29}$	14.513(2)	0.16(8)	16	$f_{23} + f_{27} - f_{12}$
$f_{30}$	19.545(6)	0.16(9)	13	$f_{23} + f_9 - f_{10}$

**Tabla 4-1:** Frecuencias obtenidas para BS Cnc en Period04. Los errores sobre las cantidades se calcularon directamente en el software y se muestra entre paréntesis.

No	Frecuencia (c/d)	Amplitud (mmag)	S/N	Combinaciones
$f_1$	23.966(4)	2.45(2)	45	
$f_2$	11.464(6)	1.94(0)	48	
$f_3$	8.204(1)	1.29(0)	29	
$f_4$	10.365(2)	0.88(7)	22	
$f_5$	12.785(5)	0.84(3)	27	
$f_6$	10.971(6)	0.72(65)	22	
$f_7$	11.745(4)	0.48(4)	16	
$f_8$	18.554(5)	0.46(6)	19	
$f_9$	9.517(6)	0.41(4)	12	
$f_{10}$	15.676(4)	0.41(4)	17	
$f_{11}$	16.690(6)	0.36(8)	16	
$f_{12}$	15.792(7)	0.35(8)	17	
$f_{13}$	14.305(1)	0.34(3)	14	
$f_{14}$	21.033(2)	0.31(4)	12	
$f_{15}$	14.547(1)	0.30(0)	14	
$f_{16}$	10.086(7)	0.28(8)	9	
$f_{17}$	7.084(5)	0.26(4)	6	$f_{12} + f_2 - 2f_{16}$
$f_{18}$	2.175(5)	0.25(8)	4	$2f_4 - f_8$
$f_{19}$	24.186(6)	0.25(3)	9	$f_1 + f_7 - f_2$
$f_{20}$	23.955(7)	0.25(9)	9	$f_{16} + f_9 + 2f_{18}$
$f_{21}$	12.877(6)	0.23(23)	10	
$f_{22}$	4.202(4)	0.28(7)	4	
$f_{23}$	18.618(6)	0.201(6)	9	$f_{12} + 2f_{22} - 2f_2$
$f_{24}$	11.969(3)	0.19(8)	8	$2f_{16} - f_3$
$f_{25}$	7.225(2)	0.19(8)	4	$f_{22} + 2f_{12} - 2f_{27}$
$f_{26}$	19.870(8)	0.19(5)	9	$f_{17} + f_5$

$f_{27}$	12.949(1)	0.18(7)	8	$2f_{16} - f_{29}$
$f_{28}$	7.754(6)	0.18(5)	5	$f_{26} + f_9 - f_{32}$
$f_{29}$	21.789(8)	0.18(3)	7	$f_1 + f_8 - 2f_{24}$
$f_{30}$	19.626(0)	0.18(0)	8	$f_{17} + f_{18} + f_4$

---

**Tabla 4-2:** Frecuencias obtenidas para BR Cnc en Period04. Los errores sobre las cantidades se calcularon directamente en el software y se muestra entre paréntesis.

# Capítulo 5

## Espectroscopía y parámetros físicos estelares

### 5.1. Observatorio astronómico de San Pedro Mártir

El Observatorio Astronómico Nacional de San Pedro Mártir, Baja California (OAN-SPM) es el más importante observatorio profesional con que cuenta México. El OAN-SPM se encuentra situado en la parte Noreste del parque nacional San Pedro Mártir, dentro de la sierra homónima en la península de Baja California. Se ubica a una latitud de  $31^{\circ}02'N$  y una longitud de  $115^{\circ}27'O$  y a una altitud de 2830 msnm. San Pedro Mártir es uno de los sitios más favorables en el mundo para observaciones astronómicas, debido a la baja turbulencia y las condiciones locales del viento, por mencionar dos características.

Diversos estudios climatológicos se han realizado para evaluar la calidad del cielo. Uno de los más importantes fue presentado por Tapia en 2003 [Tapia, 2003], quien compiló datos estadísticos acerca del uso por 20 años del telescopio de 2.1 m (ver Figura 5.1) y mostró que durante este tiempo la fracción de noches perdidas debido al mal clima fue de 22.22% en el periodo de julio de 1982 a diciembre de 2002. También se notó que en los últimos siete años de los estudios, catalogados como años secos, la calidad de noches para fotometría aumentó en

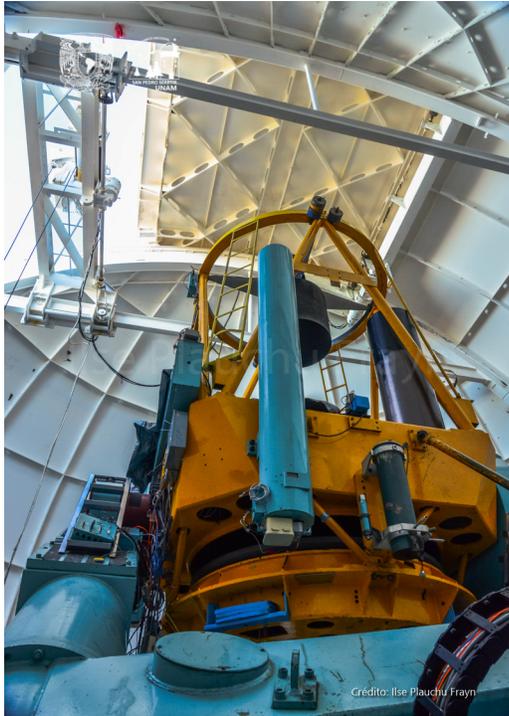


**Figura 5.1:** Vista del edificio que alberga al telescopio de 2.1 m en el OAN-SPM. Créditos: Ilse Plauchu-Frayn. Tomado del sitio oficial del OAN-SPM.

un 10% y para espectroscopía se mantuvo casi constante. Este trabajo además proporcionó evidencia que el OAN-SPM tiene la fracción más grande de noches claras que cualquier otro sitio existente o potencial en norte américa.

## Instrumentos

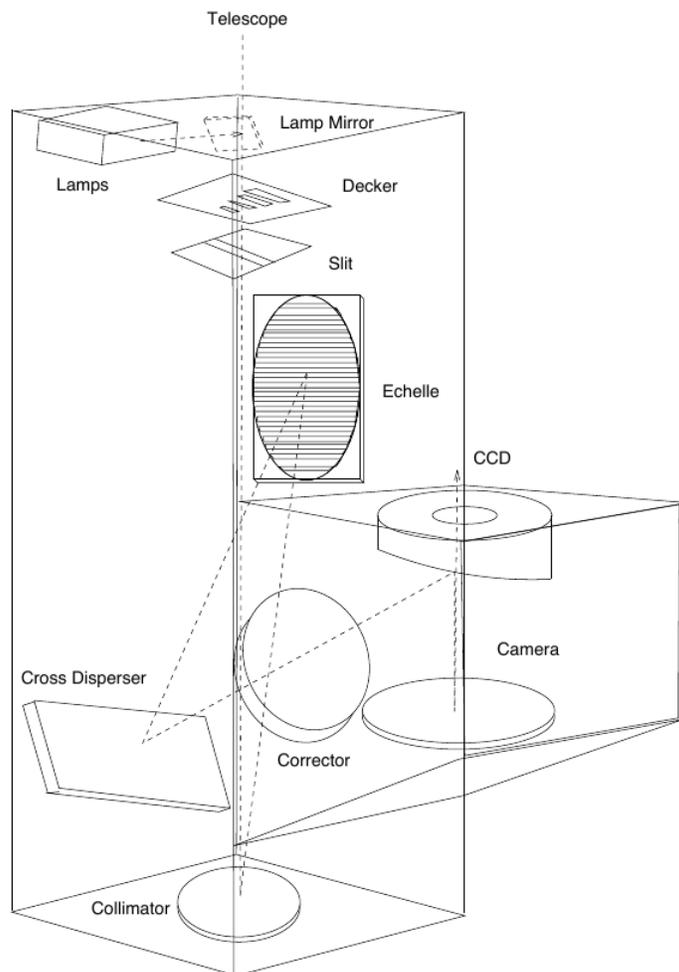
En el OAN-SPM existen diversos telescopios con diferentes objetivos y tecnologías: el telescopio de 2.1 m, el telescopio de 1.5 m que opera de manera robótica con el instrumento RATIR para imagen óptico/infrarroja, el telescopio de 0.84 m usado para espectroscopía óptica, imagen directa, fotometría y polarimetría; el telescopio BOOTES-5 (Burst Observer and Optical Transient Exploring System) para observar y monitorear destellos de rayos gamma, el telescopio DDOTI (Deca-Degree Optical Transient Imager) para la localización de trasientes estelares relativistas, el telescopio COATLI que es un telescopio robótico de 50 cm, el telescopio SAINT-EX que es un telescopio robótico destinado a la búsqueda de planetas terrestres orbitando estrellas ultra frías, y el telescopio TAOS II (The Trans-Neptunian Automated Occultation Survey) que operará con tres telescopios de 1.3 m.



**Figura 5.2:** Perspectiva del telescopio de 2.1 m en el OAN-SPM. Créditos: Ilse Plauchu-Frayn. Tomado del sitio oficial del OAN-SPM.

### Telescopio de 2.1 m

Es el mayor de los telescopios en el OAN-SPM (ver Figura 5.2), fue construido entre 1974 y 1979. Con un diseño Ritchey-Chretien, cuenta con tres espejos secundarios:  $f/7.5$  ( $\sim 13.0$  "/mm),  $f/13.5$  ( $\sim 7.15$  "/mm) y  $f/30$  ( $\sim 3.25$  "/mm). El límite AH  $\pm 5.5^h$  y Límites DEC:  $+69^\circ 40' 00''$  y  $-40^\circ 00' 00''$ . Cuenta con una platina giratoria manual y un domo con un gajo de dos segmentos que pueden moverse de arriba a abajo según la región del cielo. Los instrumentos disponibles para este telescopio son en Espectroscopía óptica: Espectrógrafo Boller & Chivens, Espectrógrafo Echelle clásico REOSC, Espectrógrafo Mezcal MES-SPM y Interferómetro Fabry-Perot PUMA; en infrarrojo: Camila (IR cercano - 1 a 2.5 micras detector NICMOS en modo imagen directa) y CID (Imagen y espectroscopia. Cercano y mediano infrarrojo (1 a 20 micras, InSb, BIB). También cuenta con una rueda de filtros italiana (datos tomados del sitio web del OAN-SPM).



**Figura 5.3:** Diseño esquemático de los componentes del espectrógrafo. Las líneas punteadas trazan el camino de la luz [Levine and Chakrabarty, 1994].

### Espectrógrafo Echelle

El espectrógrafo Echelle, de uso exclusivo en el Telescopio 2.1m del OAN-SPM, fue construido a fines de la década de los 70's por la firma francesa REOSC. Su máxima resolución es  $R=18000$  a  $5000\text{\AA}$ . Ello da una resolución de  $17\text{ km/s}$  con 2 pixeles [Levine and Chakrabarty, 1994]. En la Figura 5.3 se muestra el diseño esquemático de los componentes del espectrógrafo.

La rejilla echelle principal está sobre un área de  $254\text{ mm} \times 128\text{ mm}$ , y tiene  $79\text{ líneas/mm}$ . El ángulo de Blaze es  $63.433^\circ$  y el ángulo de incidencia es de  $71^\circ$ . Cuenta con seis lámparas de comparación (Ar, Cs, Rb, He-Ar, Th-Ar, Ne), el alojamiento de lamparas tiene montadas

tres permanentemente. El espectrografo tiene una rendija continuamente ajustable, con un rendija de anchura mínima de  $30 \mu\text{m}$ , y un máximo de  $900 \mu\text{m}$  [Levine and Chakrabarty, 1994].

## 5.2. Reducción de espectros

Los espectros usados en este estudio para las estrellas BS Cnc y BR Cnc fueron tomados por el telescopio de 2.12 m usando el espectrógrafo echelle REOSC con el CCD SITe3 (con una ganancia de 1.3 electrones/ADU) sin filtro y el dispersor cruzado de  $300 \text{ l/mm}$ , del 9 al 16 de febrero de 2009 con un tiempo de exposición de 600 segundos. En total se obtuvieron 11 espectros para BR Cnc y 6 para BS Cnc.

La reducción de los espectros se realizó en IRAF [Tody, 1986], cuyas siglas significan *Image Reduction and Analysis Facility*, es un programa multipropósitos para reducción y análisis de datos científicos. Para la reducción se contó con los espectros de los objetos y con los bias que son imágenes de calibración obtenidas sin tiempo de exposición real, solo contiene una señal no deseada debida a la electrónica que elabora los datos del sensor, y no una señal no deseada de la acumulación de carga (por ejemplo, de la corriente oscura) dentro del propio sensor.

Para cada espectro se tomaron un promedio de unos 10 bias para su calibración, así que el primer paso fue crear un *master bias*, que es el resultado de promediar el conjunto de bias. Además, para cada día de observación se tomaron los espectros de los denominados *arcos*, que son las lámparas de comparación ThAr cuyas líneas de emisión permiten la calibración en longitud de onda de los espectros. Posteriormente se le resta a todas las imágenes de los objetos y los arcos el master bias para hacer la corrección.

Los espectros fueron limpiados de rayos cósmicos usando la tarea de IRAF *lacos* (Laplacian cosmic ray identification). L.A.Cosmic es un algoritmo para la identificación robusta de

rayos cósmicos. Detecta rayos cósmicos de formas y tamaños arbitrarios, y distingue entre fuentes puntuales submuestreadas y rayos cósmicos. Luego es necesario extraer el espectro de los objetos de observación y los arcos, usando el comando *apall*. El arco no tiene un continuo definido, eso hace difícil encontrar las aperturas y trazarlas. Es por ello que se usó una estrella de referencia. Para la identificación de las líneas en el espectro del arco usamos *ecidentify*, se usaron aperturas del inicio, el final e intermedias y usando el atlas disponible en el sitio del OAN-SPM obtenemos el arco calibrado. Finalmente con el comando *dispcor* reemplazamos los píxeles por longitud de onda en cada apertura.

Normalizamos al continuo cada espectro reducido y calibrado con la tarea *continuum*, y luego extraemos las aperturas de los espectros normalizados con *wspectext*, herramienta usada para escribir los datos espectrales en formato FITS a un archivo ASCII, y nos devuelve un archivo de texto para cada apertura que contiene dos columnas de datos: la longitud de onda observada y el flujo. Estos archivos serán usados para la determinación de los parámetros físicos de las estrellas en la siguiente sección.

### 5.3. Determinación de parámetros físicos

#### Parámetros atmosféricos

La determinación de los parámetros atmosféricos se hizo con el software *iSpec* [Blanco-Cuaresma et al., 2014], que es una herramienta para el tratamiento y análisis de espectros estelares. *iSpec* es capaz de determinar parámetros atmosféricos (es decir, temperatura efectiva, gravedad superficial, metalicidad, micro/macroturbulencia, rotación) y abundancias químicas individuales para estrellas AFGKM utilizando dos enfoques diferentes: técnica de ajuste de espectro sintético o método de ancho equivalente.

En este proceso, se prestó especial atención a las líneas de absorción de Balmer, específicamente H-alfa con una longitud de onda de aproximadamente 656 nm y H-beta con una longitud de onda de alrededor de 486 nm. Estas líneas de absorción en los espectros

Objeto	$T_{\text{eff}}$	Error	$\log g$	Error
BS Cnc	7277.65	91.49	5.00	0.08
BR Cnc	7618.60	80.52	4.84	0.13

**Tabla 5-1:** Parámetros encontrados haciendo el ajuste de los espectros sintéticos para las estrellas BS y BR Cnc usando iSpec [Blanco-Cuaresma et al., 2014].

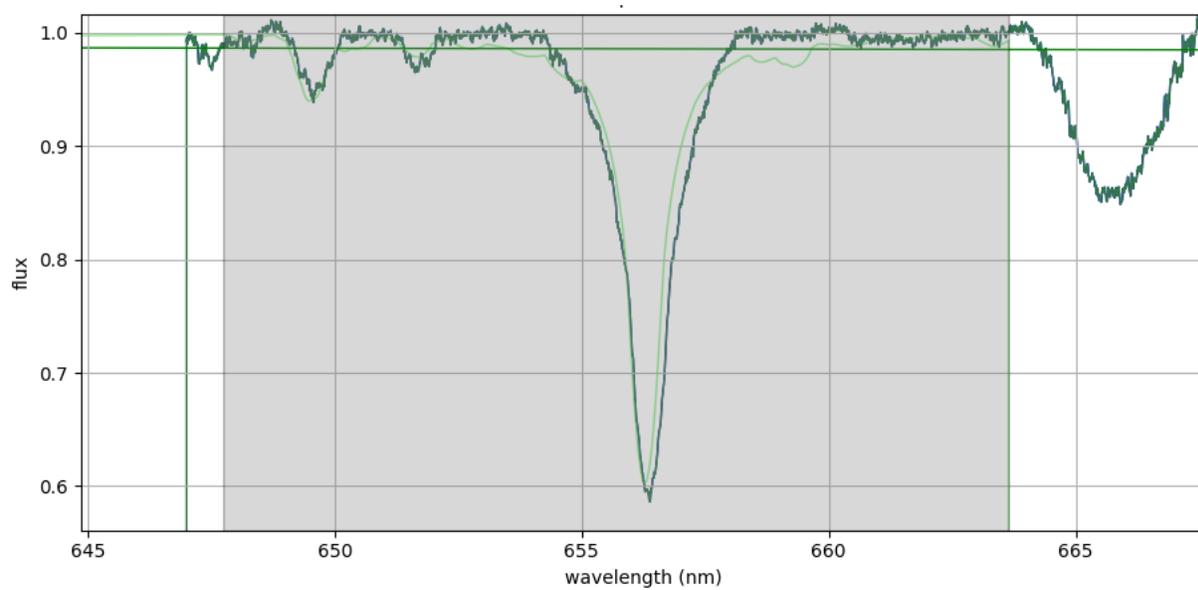
estelares son de gran importancia para comprender las características y la composición de las estrellas bajo estudio. Para abordar este análisis, se llevó a cabo la identificación precisa de las aperturas en los espectros que presentaban estas líneas de absorción. Es decir, se localizaron las regiones en los espectros donde las líneas de Balmer eran prominentes. Posteriormente, para optimizar la precisión y la fiabilidad del análisis, se procedió a combinar estas aperturas de los espectros que contenían las líneas de absorción de interés.

Para la determinación de parámetros se usó el código de transferencia radiativa MOOG (<http://www.as.utexas.edu/~chris/moog.html>), que desarrolla una variedad de análisis de líneas en LTE (Local Thermodynamic Equilibrium). El modelo de atmósfera elegido fue MARC.GES (<https://marcs.astro.uu.se/>). Para determinar la temperatura efectiva y la gravedad superficial se usaron los parámetros presentados por Fossati y colaboradores en 2008 [Fossati et al., 2008] para BS y BR Cnc, en la Figura 5.4 se muestra el ajuste para una línea H-beta y H-alfa para BR Cnc. En la tabla 5-1 se muestra la temperatura efectiva y el logaritmo de la gravedad obtenidos después de realizado el ajuste para ambas estrellas.

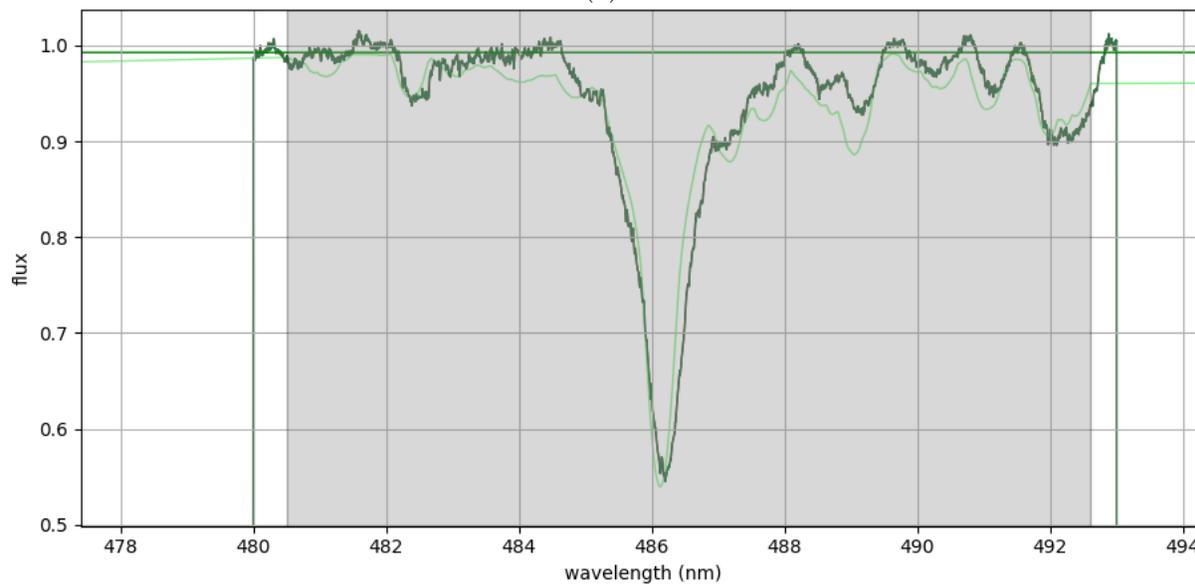
## Determinación de $v \sin i$

Para determinar la velocidad proyectada de rotación de las estrellas se usó el método de Fourier implementado en una rutina de PYTHON <sup>1</sup> por [Serna et al., 2021]. La idea principal de utilizar la transformada de Fourier en la determinación de la velocidad de rotación estelar consiste en considerar los espectros medidos como una convolución del perfil intrínseco de la estrella, con un perfil de rotación, un perfil de macroturbulencia y un perfil instrumental.

<sup>1</sup><https://github.com/javierserva/vsini>



(a)



(b)

**Figura 5.4:** Ajuste de los espectros sintéticos de las líneas Balmer (a) H-alfa y (b) H-beta para la estrella BR Cnc usando iSpec.

Dado que en el espacio de Fourier una convolución equivale a simplemente multiplicar, se utiliza el hecho de que entre los diferentes perfiles que componen el espectro medido, el perfil de rotación tiene los primeros ceros en el espacio de Fourier. Por lo tanto, estudiar los primeros ceros del perfil medido en el espacio de Fourier, equivale a estudiar el perfil de rotación aisladamente. Se utilizaron líneas de Fe I (423.6 nm) y las líneas Mg II (448.1 nm), como se puede ver en la Figura 5.5. Los valores promedios encontrados para  $v \sin i$  fueron  $157.1 \pm 2.91 \text{ km s}^{-1}$  y  $127.2 \pm 2.38 \text{ km s}^{-1}$  para BR Cnc y BS Cnc, respectivamente.

## Determinación de masas de las estrella

Finalmente se procedió a determinar los valores de masa para cada estrella, estos valores permitieron realizar el modelo de estructura estelar que veremos en siguiente capítulo. Para este propósito se hizo un ajuste de isocronas con datos obtenidos de la base de datos del Osservatorio Astronomico di Padova<sup>2</sup>. El ajuste de isocronas es una técnica crucial en la astrofísica para determinar las propiedades fundamentales de cúmulos estelares, como su edad, distancia y composición química. Las isocronas son líneas teóricas en un diagrama Hertzsprung-Russell (HR) que representan la distribución de estrellas de una determinada edad y composición química. A continuación, se explica el proceso de ajuste de isocronas [LeBlanc, 2010]:

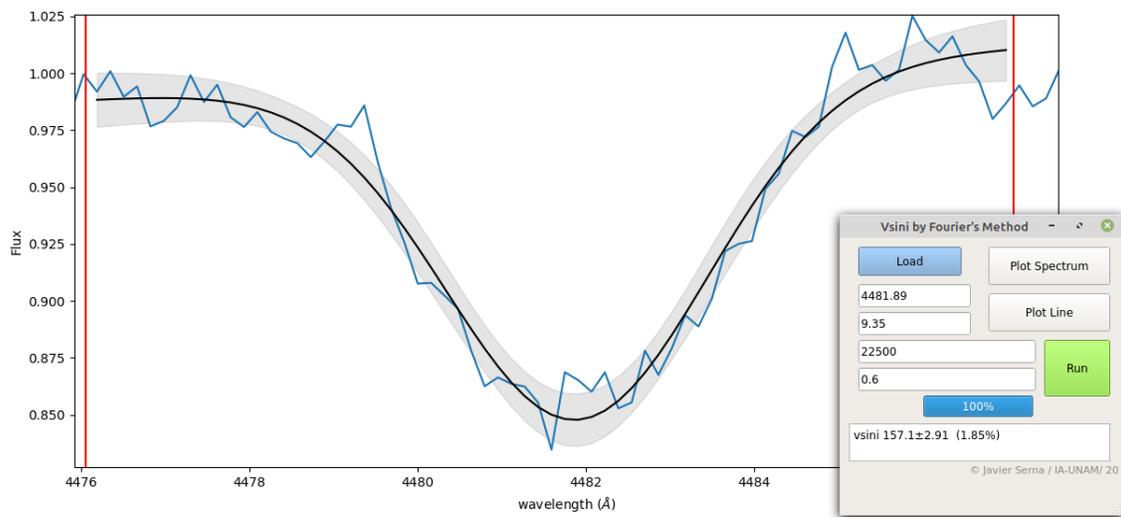
- Se recogen datos observacionales de un cúmulo estelar, que generalmente incluyen las magnitudes y colores de las estrellas. Estos datos se representan en un diagrama HR (magnitud absoluta vs. color) o en un diagrama de color-magnitud (CMD).
- Se seleccionan modelos teóricos de isocronas de una base de datos, como las isocronas de Padova, Dartmouth, o PARSEC. Estos modelos dependen de parámetros como la edad, la metalicidad (abundancia de elementos pesados) y, en algunos casos, la mezcla de elementos (alfa).
- Se realiza una superposición inicial de las isocronas teóricas sobre los datos

---

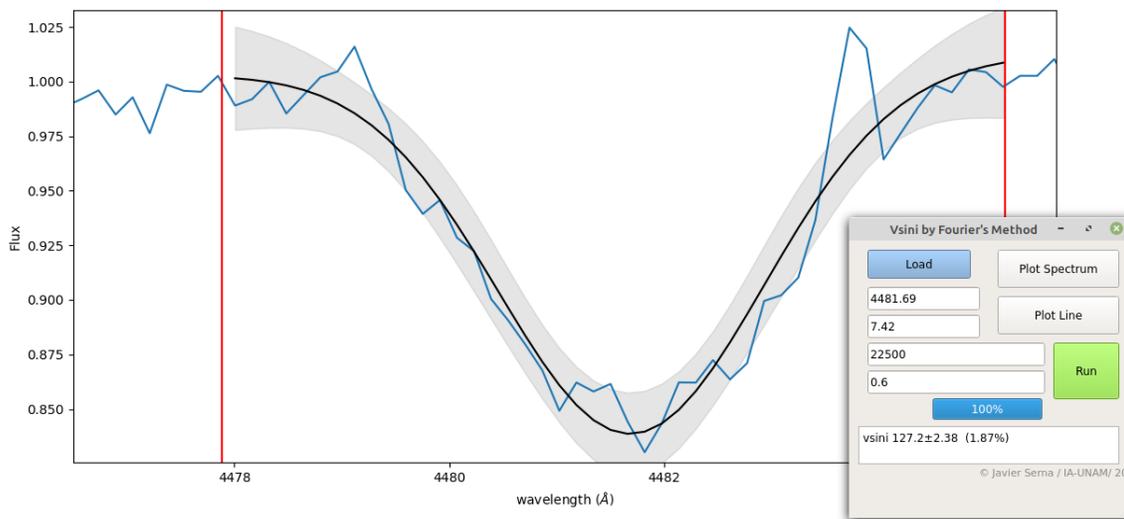
<sup>2</sup><http://stev.oapd.inaf.it/cgi-bin/cmd>

observacionales en el diagrama HR o CMD. Esto se hace ajustando parámetros como la distancia (modulus de distancia) y la extinción interestelar (enrojecimiento), que afectan las magnitudes y colores observados.

En la Figura 5.6 se muestra el resultado del ajuste, y la ubicación de las estrellas BS y BR Cnc, junto a su caja de error la cual se obtuvo promediando valores reportados por diversos autores para luminosidad y temperatura. De este ajuste se obtuvieron los siguientes valores de masa, BR Cnc:  $1.894 M/M_{\odot}$  y BS Cnc:  $1.795 M/M_{\odot}$ .



(a)



(b)

**Figura 5.5:** (a) Ajuste de MgII para encontrar el  $v \sin i$  de BR Cnc. (b) Ajuste de MgII para encontrar el  $v \sin i$  de BS Cnc.

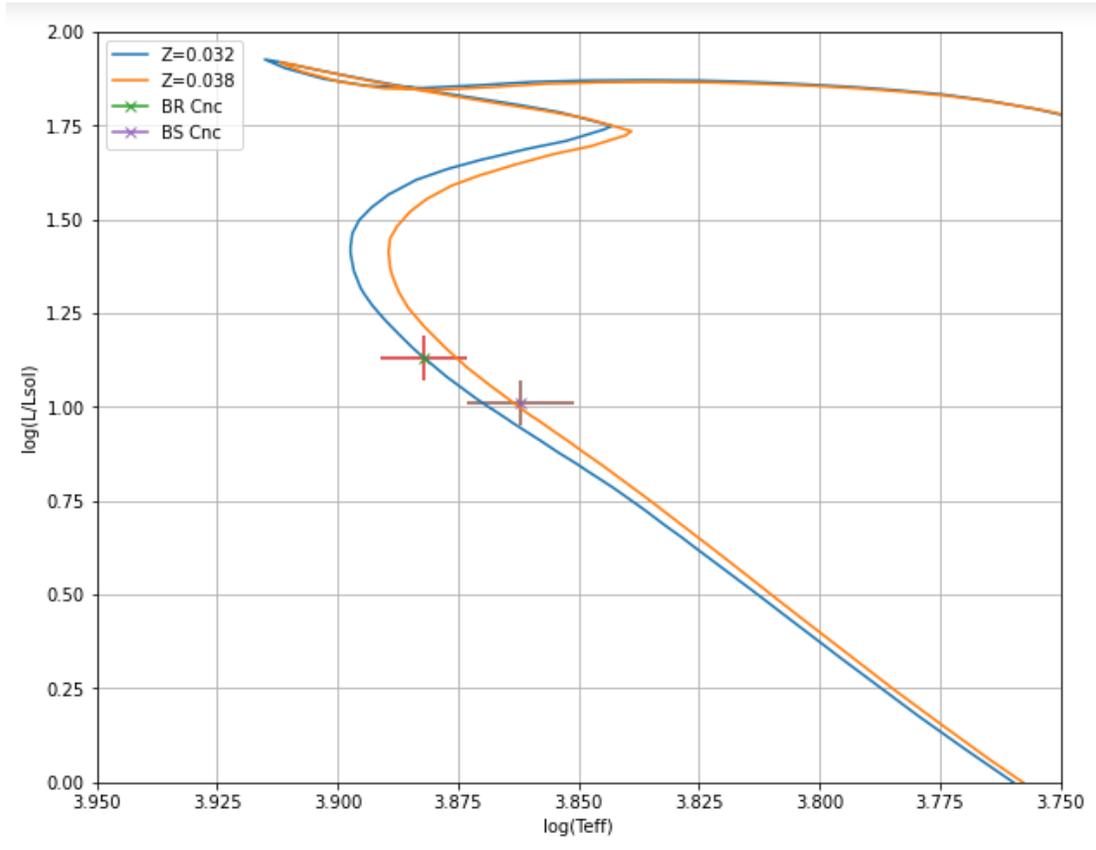


Figura 5.6: Ajuste de isocrónas para BS Cnc y BR Cnc.

# Capítulo 6

## Modelos sismológicos

En este capítulo, se abordan los códigos utilizados para buscar y obtener modelos teóricos que describen las pulsaciones de las estrellas bajo estudio. Estos modelos se construyen considerando la estructura interna de las estrellas, previamente determinada en el capítulo anterior mediante parámetros físicos. El proceso se basa en un enfoque riguroso de modelado numérico, empleando ecuaciones fundamentales de la física estelar, como las de estructura y pulsación. Una vez obtenidos, se compara las frecuencias de pulsación calculadas con las observaciones reales utilizando datos del satélite Kepler. Esta comparación valida la precisión de los modelos teóricos y representa un paso crucial en la investigación al integrar teoría y observación para comprender el comportamiento de las estrellas pulsantes. Los códigos y algoritmos presentados son herramientas valiosas para avanzar en el conocimiento de la física estelar y comprender fenómenos astrofísicos en el interior de estas esferas de plasma.

### 6.1. El Código MESA

El código MESA (*Modules for Experiments in Stellar Astrophysics*) es un software diseñado para modelar la estructura interna, la evolución y las propiedades observables de las estrellas. Es un paquete de software integral de código abierto utilizado para simular una amplia gama de fenómenos estelares, incluida la evolución estelar, la nucleosíntesis, las supernovas y las fuentes de ondas gravitacionales [Paxton et al., 2010].

MESA está escrito en Fortran y se basa en un marco modular que permite a los usuarios elegir entre una amplia gama de módulos físicos y computacionales para construir simulaciones personalizadas de estrellas. Una de las fortalezas clave de MESA es su flexibilidad y facilidad de uso [Paxton et al., 2013]. Los usuarios pueden personalizar sus simulaciones seleccionando entre una amplia gama de módulos y parámetros disponibles, y pueden modificar y adaptar fácilmente el código para satisfacer sus necesidades específicas de investigación. MESA también está activamente desarrollado y respaldado por una gran comunidad de investigadores y desarrolladores, lo que ayuda a garantizar que el código permanezca actualizado y relevante para los últimos avances en astrofísica estelar<sup>1</sup>.

### 6.1.1. Obtención de modelos de estructura estelar con MESA

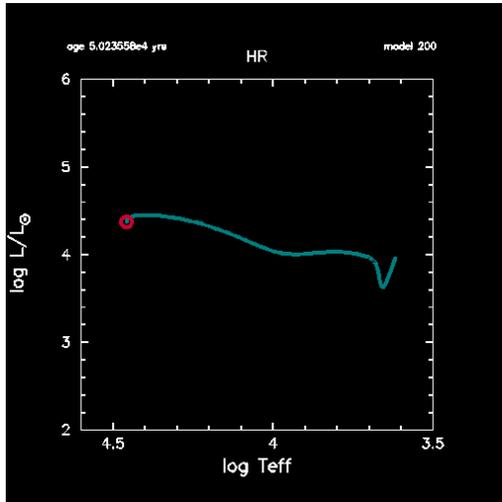
Una vez que MESA está instalado en nuestro ordenador, iniciamos el proceso de obtener modelos de estructura estelar para las estrellas de interés. El módulo central para llevar a cabo esta tarea es *star*, que integra las capacidades de otros módulos. En primer lugar, procedemos a organizar los archivos de configuración, conocidos como *inlist*, donde se definen las opciones para el programa que guía la evolución estelar, la ecuación de estado, las opacidades y otras configuraciones relevantes para el seguimiento del proceso.

Después de ejecutar el código, MESA generará diversos gráficos mediante PGStar, el módulo diseñado para la creación de representaciones visuales mientras se lleva a cabo un código de estructura estelar, como se ilustra en la Figura 6.1. En particular, la Figura 6.1a presenta el diagrama HR en tiempo real durante la ejecución, mientras que la Figura 6.1b exhibe el perfil  $T - \rho$  (temperatura versus densidad), mostrando las distintas etapas de la combustión del modelo.

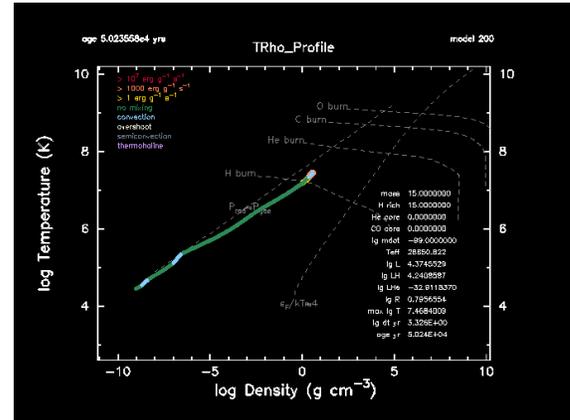
Considerando el error en el cálculo de la masa de las estrellas problema, evidenciado en la Figura 5.6 mediante las barras de error, se llevaron a cabo simulaciones para rangos de masa

---

<sup>1</sup><https://docs.mesastar.org/en/release-r23.05.1/contributing.html>



(a)



(b)

**Figura 6.1:** Gráficos de salida de MESA, durante la corrida del código de estructura estelar. Tomado del sitio web de MESA[Paxton, 2011].

que oscilan entre  $1.70$  y  $1.85 M_{\odot}$ . A continuación, se presenta la configuración del archivo *inlist\_project* correspondiente a una masa de  $1.70 M_{\odot}$ , donde se establecen las configuraciones generales para la ejecución:

```
&star_job
show_log_description_at_start = .false.
create_pre_main_sequence_model = .false.
save_model_when_terminate = .false.
set_initial_cumulative_energy_error = .true.
new_cumulative_energy_error = 0d0/
```

```
&controls
write_pulse_data_with_profile = .true.
pulse_data_format = 'GYRE'
max_number_backups = 0
max_number_retries = -1
max_model_number = 200
```

```

x_integer_ctrl(1) = 2
x_logical_ctrl(1) = .false.
x_integer_ctrl(2) = 2
x_logical_ctrl(2) = .false.
x_integer_ctrl(3) = 0
x_integer_ctrl(4) = 1 ! order
x_ctrl(1) = 0.2d-3
x_ctrl(2) = 1d99

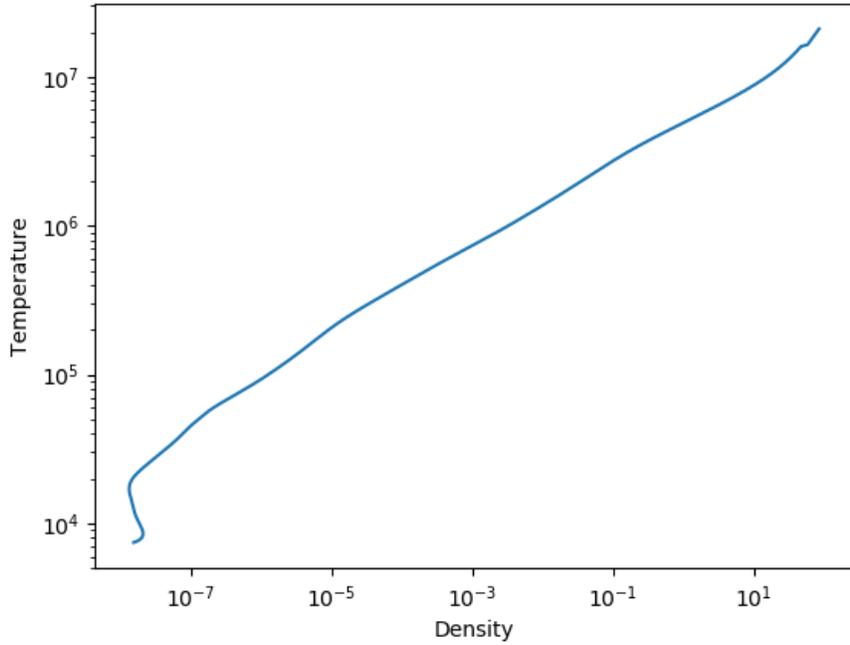
initial_mass = 1.70
max_age = 741d6

xa_central_lower_limit_species(1) = 'h1'
xa_central_lower_limit(1) = 1d-3
use_gold_tolerances = .true.
use_dedt_form_of_energy_eqn = .true.

num_trace_history_values = 2
trace_history_value_name(1) = 'rel_E_err'
trace_history_value_name(2) = 'log_rel_run_E_err'
    photo_interval = 50
    profile_interval = 50
    history_interval = 10
    terminal_interval = 10
    write_header_frequency = 10/

```

En esta configuración, se omite la creación de un modelo de pre-secuencia principal y se escriben datos de las pulsaciones estelares con el perfil, usando el formato para GYRE, que veremos en las siguientes secciones.



**Figura 6.2:** Perfil de Densidad-Temperatura para un modelo de  $1.70 M_{\odot}$ .

MESA registra sus resultados en tres tipos de archivos: *history.data*, que alberga el historial de la ejecución; *profiles.index*, que indica cómo traducir entre los números en los nombres de archivo por perfil y el número de modelos de MESA; y *profile.data*, que contiene información detallada sobre un conjunto seleccionado de modelos. Todos estos archivos se encuentran en el directorio *LOGS*. En la Figura 6.2, se presenta a modo de ejemplo un perfil de Densidad-Temperatura para un modelo de  $1.70 M_{\odot}$ .

## 6.2. Código GYRE

GYRE es un código de oscilación que resuelve las ecuaciones de pulsación estelar (adiabáticas y no adiabáticas) usando el esquema Magnus de disparo múltiple (*MMS: Magnus Multiple Shooting*), ideado para superar ciertas debilidades de los esquemas habituales de relajación y disparo que aparecen en la literatura. Dado un modelo estelar de entrada, GYRE calcula las frecuencias y funciones propias para los modos de oscilación normales del modelo. Estos datos pueden tener diversos usos; lo más común es compararlas con las frecuencias

de oscilación observadas de una estrella, lo que permite establecer restricciones sobre los parámetros fundamentales de la estrella (masa, radio, etc.)[\[Townsend and Teitler, 2013\]](#).

El esquema MMS implica dividir el dominio del tiempo del problema en una serie de subintervalos y luego resolver las ecuaciones diferenciales por separado para cada subintervalo. Luego, las soluciones se “unen” para obtener la solución general para todo el dominio del tiempo. Este enfoque tiene algunas ventajas sobre otros métodos numéricos, incluida una mejor estabilidad y precisión, y la capacidad de manejar problemas con condiciones de contorno no lineales y variables en el tiempo[\[Blanes et al., 2009\]](#).

### 6.2.1. Obtención de los modelos de oscilación

Una vez que contamos con los modelos de estructura estelar para diferentes masas, procedemos a realizar las corridas utilizando el código GYRE. El primer paso es configurar el archivo *namelist*, que es el archivo de entrada que contiene los parámetros necesarios para una corrida, como se muestra a continuación:

```
&constants/  
&model  
  model_type = 'EVOL'  
  file = 'profile5.data.GYRE'  
  file_format = 'MESA'/  
&mode  
  1 = 0 /  
&mode  
  1 = 1 /  
&mode  
  1 = 2 /  
&mode  
  1 = 3 /
```

```

&osc
    outer_bound = 'VACUUM' /
&rot/
&num
    diff_scheme = 'MAGNUS_GL4' /
&scan
    grid_type = 'INVERSE'
    freq_min = 0.5
    freq_max = 30
    freq_units = 'CYC_PER_DAY'
    n_freq = 500 /
&grid
    w_osc = 10
    w_exp = 2
    w_ctr = 10
&ad_output
    summary_file_format = 'TXT'
    detail_file_format = 'TXT'
    summary_file = 'summary.txt'
    summary_item_list = 'l,n_g,freq,freq_units,E_norm'
    detail_template = 'detail.l%l.n%n.txt'
    detail_item_list = 'l,n_pg,n_p,n_g,omega,x,xi_r,
                        xi_h,c_1,As,V_2,Gamma_1'
    freq_units = 'CYC_PER_DAY' /
&nad_output/

```

Cada grupo namelist se describe a continuación:

- `constants` que está vacío, lo que le indica a gyre que use valores predeterminados para las constantes fundamentales;
- `model` que le dice a gyre que lea un modelo evolutivo, en formato MESA;

- `mode` namelist le dicen a gyre que busque en esos modos azimutales;
- `osc` le dice a gyre que asuma, al establecer las condiciones de contorno exteriores en las ecuaciones de oscilación, que la densidad desaparece en la superficie estelar;
- `scan` le dice a gyre que escanee una región del espacio de frecuencia angular adimensional típicamente ocupada por modos de gravedad;
- `grid` le dice a gyre cómo refinar la cuadrícula espacial del modelo;
- `ad_output` namelist le dice a gyre qué datos adiabáticos escribir en qué archivos de salida; datos de resumen, y datos de modo individual;
- `nad_output` está vacío, lo que le indica a gyre que no escriba ningún dato no adiabático.

Una vez configurado el archivo `gyre.in`, la corrida es trivial y se obtiene un archivo de resumen con los datos configurados de salida, a continuación se muestran una par de líneas de una salida:

1	<code>n_g</code>	<code>Re(freq)</code>	<code>Im(freq)</code>
2	84	0.502187E+000	0.000000E+000
2	83	0.508415E+000	0.000000E+000
2	82	0.514734E+000	0.000000E+000

Donde la primera columna muestra el grado armónico  $l$ , y  $n_g$  es el número de enrollamiento para la onda de gravedad, `Re(freq)` es la parte real de la autofrecuencia adimensional, y `Im(freq)` es la parte imaginaria de la autofrecuencia adimensional (cero aquí porque hemos realizado un cálculo adiabático).

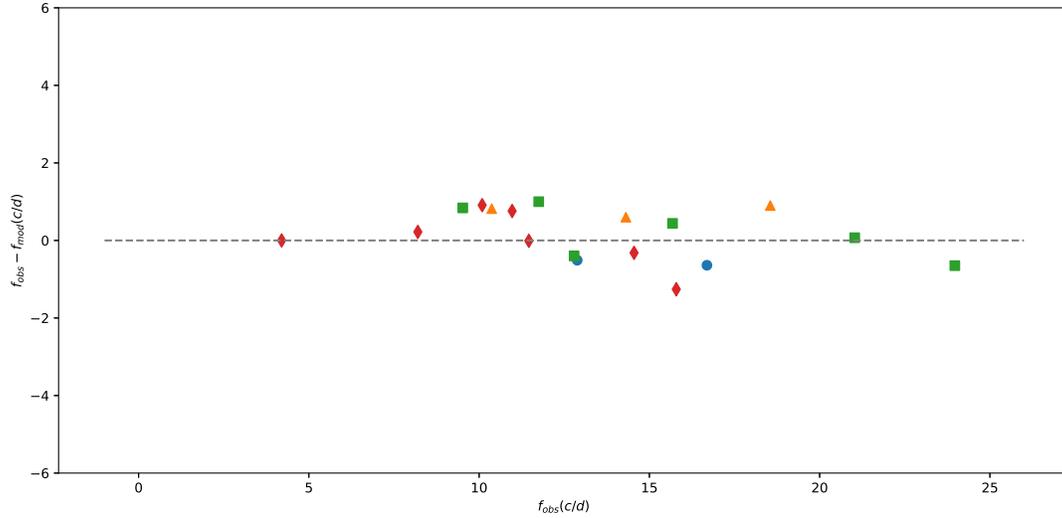
Con cada perfil de estructura estelar se encontró un modelo de oscilación, y para elegir el final se realizó un ajuste de Chi Cuadrado para obtener el modelo que arrojaba las frecuencias de pulsación más cercanas a las observadas.

En la tabla **6-1** se muestra la identificación de las frecuencias observadas. Notese que en la identificación se excluyen las frecuencias para las que `Period04` encontró que eran originadas por combinaciones de otras frecuencias fundamentales (ver tablas **4-2** y **4-1**).

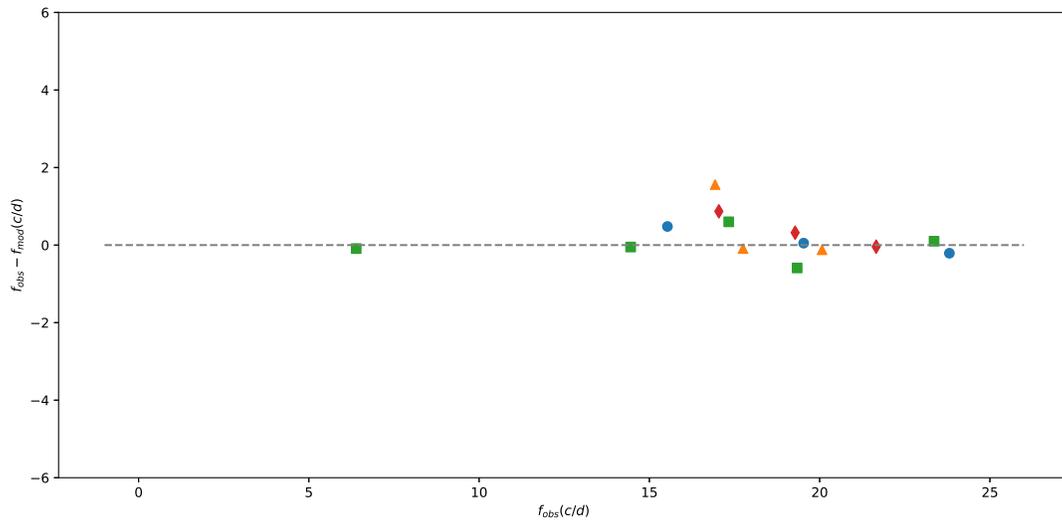
BR Cnc						BS Cnc					
No.	$f$	Amp.	S/N	l	$n_g$	No.	$f$	Amp.	S/N	l	$n_g$
1	16.69	0.37	15.74	0	0	1	15.53	1.32	66.97	0	0
2	12.88	0.23	9.63	0	0	2	23.81	0.56	32.58	0	0
3	18.55	0.47	18.85	1	1	3	19.53	0.38	21.50	0	0
4	14.31	0.34	14.52	1	1	4	20.07	0.45	24.92	1	0
5	10.37	0.89	22.33	1	2	5	16.93	0.71	37.19	1	1
6	23.97	2.45	45.28	2	1	6	17.75	0.31	19.39	1	1
7	21.03	0.31	12.53	2	1	7	19.34	0.53	26.32	2	1
8	12.79	0.84	26.63	2	2	8	23.36	0.48	31.87	2	1
9	15.68	0.41	17.49	2	2	9	17.33	0.39	22.81	2	2
10	11.75	0.48	16.40	2	3	10	14.45	0.26	22.60	2	2
11	9.52	0.41	12.16	2	4	11	6.39	0.26	27.99	2	6
12	15.79	0.36	16.70	3	2	12	21.66	0.21	14.27	3	1
13	14.55	0.30	13.91	3	2	13	17.04	3.67	90.93	3	2
14	11.46	1.94	47.92	3	4	14	19.28	0.26	16.01	3	2
15	10.97	0.73	22.09	3	5						
16	10.09	0.29	9.30	3	6						
17	8.20	1.29	28.92	3	7						
18	4.20	0.29	4.64	3	14						

**Tabla 6-1:** Frecuencias identificadas para BR Cnc y BS Cnc, donde  $f$  está expresado en ciclos por día, la Amplitud (Amp.) en mmag.

Con el objetivo de mostrar el acercamiento de las frecuencias observadas y las modeladas, en la figura 6.3 se grafican las diferencias de las frecuencias observadas y las modeladas ( $f_{obs} - f_{mod}$ ) versus las frecuencias observadas.



(a)



(b)

**Figura 6.3:** Diferencias entre las frecuencias modeladas y observadas contra las frecuencias observadas para (a) BR Cnc y (b) BS Cnc, ciclos por día (c/d). Los círculos son usados para modos con  $l = 0$ , triángulos para  $l = 1$ , cuadrados para  $l = 2$  y rombos para  $l = 3$ .

# Capítulo 7

## Resultados

En este trabajo de tesis se han presentado las técnicas y los métodos utilizados en el análisis sismológico de las estrellas tipo  $\delta$  Scuti BR CnC y BS CnC que pertenecen al cúmulo del Pesebre a partir de las curvas de luz del satélite KEPLER obtenidas en larga cadencia (29.4 min). Las series temporales analizadas son de superior calidad que las obtenidas de observaciones desde tierra para estos objetos. Adicionalmente, se analizaron espectros estelares obtenidos en el telescopio de 2.1m del Observatorio Astronómico Nacional en San Pedro Mártir (OAN-SPM), en Baja California, México que nos permitieron determinar los parámetros atmosféricos de las estrellas. Se utilizó el código de estructura y evolución estelar MESA para calcular los modelos de estructura en equilibrio y luego se utilizó el código GYRE para calcular las frecuencias teóricas de oscilaciones. Por medio de la minimización de ajustes del tipo  $\chi^2$ , se obtuvieron las mejores identificaciones de los modos de oscilación observados, lo cual indica que las estrellas son pulsadores no-radiales. A continuación presentamos los principales resultados de este trabajo.

1. Con el programa Period04 se realizó un análisis de Fourier de las curvas de luz de cada estrella. Para BR CnC se analizaron dos curvas con longitud de 74 días y 50 días. Para BS CnC se analizaron tres curvas de luz con longitud de 74 días, 80 días y 50 días. Para cada estrella se detectaron 30 frecuencias de oscilación con una señal a ruido superior a 4.0 que corresponde a un nivel de confianza del 99%. De las 30 frecuencias

de oscilación detectadas para BR CnC 14 corresponden a combinaciones. En el caso de BS CnC encontramos 12 combinaciones de frecuencias. Se listaron las frecuencias, amplitudes y fases de los modos de oscilación detectados en cada estrella. La mayor calidad de las observaciones espaciales nos han permitido detectar muchos más modos de oscilación para cada estrella, confirmado en otros estudios para estrellas de este tipo [Balona and Dziembowski, 2011].

2. Usamos el paquete IRAF para reducir los espectros ECHELLE obtenidos en el OAN-SPM. Luego, los espectros estelares se analizaron con el programa iSpec para obtener los parámetros atmosféricos de las estrellas, en particular  $T_{\text{eff}}$  y  $\log g$ . Adicionalmente, se determinó la velocidad proyectada de rotación  $v \text{ seni}$  para cada estrella. Los parámetros obtenidos están de acuerdo con los listados en la literatura y en la base de datos de SIMBAD [Wenger et al., 2000] como se observa en la Tabla No. **3-2**.
3. Con los parámetros atmosféricos obtenidos se determinó el estado evolutivo de las estrellas y sus masas, construyendo un diagrama HR con isocrónas teóricas del cúmulo del Pesebre usando los modelos estelares de Padova.
4. Se calcularon modelos sismológicos a partir de los cuales se obtuvieron las frecuencias teóricas de oscilaciones que se compararon con las frecuencias observacionales. Ver Tablas **4-2** y **4-1**. Finalmente, se listan las posibles identificaciones de los modos de oscilación detectados para cada estrella, Tabla **6-1**.
5. Detectamos 18 y 14 frecuencias de oscilación independientes en BR CnC y BS CnC, respectivamente. De la comparación de los modos de oscilación observados con los calculados teóricamente se deduce que ambos objetos son pulsadores no-radiales, con una alta rotación. Ambas estrellas están en plena secuencia principal. De acuerdo a las masas estimadas entre  $1.8 - 1.9 M_{\odot}$ , son estrellas de masa intermedia donde en el núcleo convectivo se produce la combustión del Hidrógeno en Helio que genera la energía radiada.
6. A continuación, se hace una comparación de las frecuencias encontradas con otros

estudios realizados desde Tierra para **BR Cnc**:

- Al igual que otros estudios previos, se ha podido comprobar la naturaleza multiperiodica de la estrella.
- Dos de las frecuencias encontradas por Ai-Ying Zhou en 1997 [Zhou, 1997] fueron replicadas,  $f = 10.97$  y  $f = 10.37$  ciclos por día.
- Dos de las frecuencias encontradas por Ai-Ying Zhou y colaboradores en 2001 [Zhou et al., 2001] fueron replicadas,  $f = 11.75$  y  $f = 11.46$  ciclos por día.

7. A continuación, se hace una comparación de las frecuencias encontradas con otros estudios realizados desde Tierra para **BS Cnc**:

- Al igual que otros estudios previos, se ha podido comprobar la naturaleza multiperiodica de la estrella.
- Dos de las frecuencias encontradas por M.M. Hernández y colaboradores en 1998 [Hernandez et al., 1998b] fueron replicadas,  $f = 17.03$  y  $f = 15.53$  ciclos por día.
- Una de las frecuencias encontradas por Peña y colaboradores en 1998 [Pena et al., 1998] fue replicada,  $f = 17.03$  ciclos por día.
- Once de las frecuencias encontradas por Breger y colaboradores en 2002 [Breger, 2002] fueron replicadas,  $f = 17.04$ ,  $f = 23.81$ ,  $f = 15.53$ ,  $f = 16.93$ ,  $f = 19.28$ ,  $f = 19.34$ ,  $f = 23.36$ ,  $f = 17.75$ ,  $f = 6.39$ ,  $f = 21.66$ ,  $f = 19.53$  ciclos por día. Esto muestra una alta fiabilidad de nuestro estudio.

# Capítulo 8

## Conclusiones

1. Se ha realizado un análisis detallado de las estrellas tipo  $\delta$  Scuti, BR CnC y BS CnC, pertenecientes al cúmulo del Pesebre, utilizando datos de alta calidad del satélite KEPLER y espectros obtenidos del Observatorio Astronómico Nacional en San Pedro Mártir (OAN-SPM). Los resultados y conclusiones de este estudio han permitido obtener una comprensión más profunda de estas estrellas pulsantes, ya que no se habían realizado previamente estudios similares usando datos fotométricos espaciales para las estrellas en cuestión.
2. Se detectaron 30 frecuencias de oscilación en ambas estrellas, con relaciones señal a ruido superiores a 4.0, lo que corresponde a un nivel de confianza del 99 %. Además, se encontraron frecuencias relacionadas con estas en forma de combinaciones, 14 para BR CnC y 12 para BS CnC. En el caso de BR CnC, el aporte es importante ya que en la bibliografía hay pocos estudios que registren las frecuencias de pulsación. Para BS CnC, la alta correlación de nuestros resultados con estudios similares que usan datos desde el espacio, como ser el Satélite MOST [Breger et al., 2012], muestran la fiabilidad de los resultados. La alta calidad de las observaciones espaciales permitió detectar muchos más modos de oscilación en comparación con observaciones desde tierra, proporcionando una base sólida para el análisis sismológico.
3. Los espectros estelares obtenidos y analizados con el programa iSpec permitieron

determinar parámetros atmosféricos clave como la temperatura efectiva ( $T_{\text{eff}}$ ) y la gravedad superficial ( $\log g$ ), así como la velocidad proyectada de rotación ( $v \sin i$ ). Estos parámetros están en concordancia con los datos disponibles en la literatura y en la base de datos SIMBAD, confirmando la precisión de las observaciones y análisis realizados.

4. Utilizando los parámetros atmosféricos obtenidos, se determinó el estado evolutivo de las estrellas y sus masas. Se construyeron diagramas HR con isocronas teóricas del cúmulo del Pesebre usando los modelos estelares de Padova, ubicando a las estrellas en plena secuencia principal. Esto permitió contextualizar las estrellas dentro de su cúmulo y comprender mejor su evolución estelar.
5. Se calcularon modelos sismológicos con el código MESA y se obtuvieron las frecuencias teóricas de oscilaciones con el código GYRE. La comparación entre las frecuencias observacionales y teóricas permitió identificar los modos de oscilación detectados, confirmando que ambas estrellas son pulsadores no-radiales con una alta rotación. Esta identificación es crucial para comprender las dinámicas internas y las características de oscilación de estas estrellas.
6. Las posibles identificaciones de los modos de oscilación detectados para cada estrella fueron listadas, destacando 18 frecuencias de oscilación independientes en BR CnC y 14 en BS CnC. Esto confirma la naturaleza no-radial de sus pulsaciones y proporciona un mapa detallado de sus modos de oscilación.
7. Finalmente, las estrellas BR CnC y BS CnC tienen masas estimadas entre 1.8 y 1.9  $M_{\odot}$ . Ambas estrellas están en plena secuencia principal, donde en el núcleo convectivo se produce la combustión del hidrógeno en helio, generando la energía radiada. Este estudio ha proporcionado una visión detallada de las propiedades sismológicas y atmosféricas de estas estrellas tipo  $\delta$  Scuti, contribuyendo significativamente al entendimiento de las pulsaciones estelares en estrellas de masa intermedia y al estudio de las estrellas del cúmulo del Pesebre.

# Bibliografía

- M. Catelan and H. A. Smith. *Pulsating Stars*. Wiley, 2015.
- B. Carroll and D. Ostlie. *An Introduction to Modern Astrophysics*. Pearson, 2nd edition, 2007.
- M. M. Hernandez, F. Perez Hernandez, E. Michel, J. A. Belmonte, M. J. Goupil, and Y. Lebreton. Seismology of delta Scuti stars in the Praesepe cluster. II. Identification of radial modes and their associated stellar parameters. *Astronomy and Astrophysics*, 338: 511–520, October 1998a.
- M. Wenger, F. Ochsenbein, D. Egret, P. Dubois, F. Bonnarel, S. Borde, F. Genova, G. Jasiewicz, S. Laloë, S. Lesteven, and R. Monier. The SIMBAD astronomical database. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 143(1):9–22, apr 2000. doi: 10.1051/aas:2000332. URL <https://doi.org/10.1051/2Faas/3A2000332>.
- M. Breger. Short-period variability of B, A and F stars. VI. New Delta Scuti stars in selected regions. *Astronomy and Astrophysics*, 22:247, January 1973.
- National Aeronautics and Space Administration. Kepler: Nasa’s first mission capable of finding earth-size planets, 2009.
- Michele Johnson. A sunny outlook for nasa kepler’s second light, November 2013. URL <https://www.nasa.gov/kepler/a-sunny-outlook-for-nasa-keplers-second-light>.
- Jeffrey E. Van Cleve and Stephen T. Bryson. K2 Handbook. Kepler Science Document KSCI-19116-001, September 2017.

- NASA. Mast: Mikulski archive for space telescopes, 2012. URL <https://archive.stsci.edu/>.
- S. Levine and D. Chakrabarty. A taste of espresso, or how to use the san pedro martir reosc echelle spectrograph, 1994.
- B. Paxton. Mesa: Modules for experiments in stellar astrophysics, 2011. URL <https://docs.mesastar.org/>.
- S. Blanco-Cuaresma, C. Soubiran, U. Heiter, and P. Jofré. Determining stellar atmospheric parameters and chemical abundances of FGK stars with iSpec. *Astronomy and Astrophysics*, 569:A111, September 2014. doi: 10.1051/0004-6361/201423945.
- D. Hoffleit. History of the discovery of mira stars. *The Journal of the American Association of Variable Star Observers*, 25(2):115–136, 1997.
- C. Sterken. The O-C Diagram: Basic Procedures. In C. Sterken, editor, *The Light-Time Effect in Astrophysics: Causes and cures of the O-C diagram*, volume 335 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, page 3, July 2005.
- Conny Aerts, Jørgen Christensen-Dalsgaard, and Donald W. Kurtz. *Asteroseismology*. Springer, 2010. ISBN 978-1-4020-5178-4. doi: 10.1007/978-1-4020-5803-5.
- S. P. Clancy and A. N. Cox. Radial and nonradial periods of Delta Scuti. In *Pulsations in Classical and Cataclysmic Variable Stars*, page 264, January 1982.
- Yoji Osaki. Excitation mechanisms of oscillations in stars. In Werner W. Weiss and Annie Baglin, editors, *IAU Colloq. 137: Inside the Stars*, volume 40 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, pages 512–520, January 1993.
- M. Breger.  $\delta$  Scuti stars (Review). In Michel Breger and Michael Montgomery, editors, *Delta Scuti and Related Stars*, volume 210 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, page 3, January 2000.
- M. Breger. Delta Scuti stars: Observational aspects. *Communications in Asteroseismology*, 150:25, June 2007. doi: 10.1553/cia150s25.

- S. A. Zhevakin. Physical Basis of the Pulsation Theory of Variable Stars. *ARAA*, 1:367, January 1963. doi: 10.1146/annurev.aa.01.090163.002055.
- G. K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- Jørgen Christensen-Dalsgaard. Lecture notes on stellar oscillations, 1997.
- Rudolf Kippenhahn, Alfred Weigert, and Achim Weiss. *Stellar Structure and Evolution*. Springer, 2012. doi: 10.1007/978-3-642-30304-3.
- Margarida S. Cunha. Theory of stellar oscillations. *Asteroseismology and Exoplanets: Listening to the Stars and Searching for New Worlds*, page 27–54, Jul 2017. ISSN 1570-6605. doi: 10.1007/978-3-319-59315-9\_2. URL [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-59315-9\\_2](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-59315-9_2).
- Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 2010. ISBN 9780821849743 0821849743.
- J. P. Cox and R. T. Giuli. *Principles of stellar structure*. Gordon and Breach, 1968.
- Subrahmanyan Chandrasekhar. *An introduction to the study of stellar structure*. Dover publications, Inc, 1939.
- John P. Cox. *Theory of stellar pulsation*. Princeton University Press, 1980.
- David Griffiths. *Introduction of Quantum Mechanics*. Prentice Hall, Inc., 1995.
- George Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, Inc., third edition, 1985.
- H. Saio. An Overview of Stellar Pulsation Theory. *Astrophysics and Space Science*, 210(1-2): 61–72, December 1993. doi: 10.1007/BF00657873.
- Horace Lamb. On the vibrations of an elastic sphere. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s1-13(1):189–212, 1881. doi: <https://doi.org/10.1112/plms/s1-13.1.189>. URL <https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/plms/s1-13.1.189>.
- J. M. Walker. Atmospheric convection, k. a. emanuel, oxford university press (new york),

1994. no. of pages: x+580. price: \$47.50. isbn: 0-19-506630-8. *International Journal of Climatology*, 15(7):821–822, 1995. doi: <https://doi.org/10.1002/joc.3370150709>. URL <https://rmets.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/joc.3370150709>.
- T. G. Cowling. The non-radial oscillations of polytropic stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 101:367, January 1941. doi: 10.1093/mnras/101.8.367.
- R. de La Fuente Marcos and C. de La Fuente Marcos. On the dynamical evolution of the brown dwarf population in open clusters. *Astrophysics and Space Science*, 271(2): 127–144, March 2000. doi: 10.1023/A:1002478119185.
- Pavel Kroupa. Star cluster evolution, dynamical age estimation and the kinematical signature of star formation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 277: 1522, December 1995. doi: 10.1093/mnras/277.4.1522.
- L Spina, Y-S Ting, G M De Silva, N Frankel, S Sharma, T Cantat-Gaudin, M Joyce, D Stello, A I Karakas, M B Asplund, T Nordlander, L Casagrande, V D’Orazi, A R Casey, P Cottrell, T Tepper-García, M Baratella, J Kos, K Čotar, J Bland-Hawthorn, S Buder, K C Freeman, M R Hayden, G F Lewis, J Lin, K Lind, S L Martell, K J Schlesinger, J D Simpson, D B Zucker, and T Zwitter. The GALAH survey: tracing the Galactic disc with open clusters. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 503(3):3279–3296, 02 2021. ISSN 0035-8711. doi: 10.1093/mnras/stab471. URL <https://doi.org/10.1093/mnras/stab471>.
- Casamiquela, L., Soubiran, C., Jofré, P., Chiappini, C., Lagarde, N., Tarricq, Y., Carrera, R., Jordi, C., Balaguer-Núñez, L., Carbajo-Hijarrubia, J., and Blanco-Cuaresma, S. Abundance–age relations with red clump stars in open clusters. *AA*, 652: A25, 2021. doi: 10.1051/0004-6361/202039951. URL <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202039951>.
- Sverre J. Aarseth. From NBODY1 to NBODY6: The Growth of an Industry. *The Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 111(765):1333–1346, November 1999. doi: 10.1086/316455.
- N. V. Kharchenko, A. E. Piskunov, S. Röser, E. Schilbach, and R. D. Scholz. Astrophysical

parameters of Galactic open clusters. *Astronomy & Astrophysics*, 438(3):1163–1173, August 2005. doi: 10.1051/0004-6361:20042523.

M. Netopil, E. Paunzen, U. Heiter, and C. Soubiran. On the metallicity of open clusters. III. Homogenised sample. *Astronomy & Astrophysics*, 585:A150, January 2016. doi: 10.1051/0004-6361/201526370.

Adam L. Kraus and Lynne A. Hillenbrand. The stellar populations of praesepe and coma berenices. *The Astronomical Journal*, 134(6):2340–2352, Oct 2007. ISSN 1538-3881. doi: 10.1086/522831. URL <http://dx.doi.org/10.1086/522831>.

Joseph D. Adams, John R. Stauffer, Michael F. Skrutskie, David G. Monet, Simon F. Portegies Zwart, Kenneth A. Janes, and Charles A. Beichman. Structure of the praesepe star cluster. *The Astronomical Journal*, 124(3):1570–1584, sep 2002. doi: 10.1086/342016. URL <https://doi.org/10.1086/342016>.

P. D. Dobbie, R. Napiwotzki, M. R. Burleigh, M. A. Barstow, D. D. Boyce, S. L. Casewell, R. F. Jameson, I. Hubeny, and G. Fontaine. New Praesepe white dwarfs and the initial mass–final mass relation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 369(1): 383–389, 05 2006. ISSN 0035-8711. doi: 10.1111/j.1365-2966.2006.10311.x. URL <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2006.10311.x>.

J. A. Belmonte, E. Michel, M. Alvarez, S. Y. Jiang, M. Chevreton, M. Auvergne, Y. Y. Liu, M. J. Goupil, A. Baglin, T. Roca Cortes, A. Mangeney, N. Dolez, J. C. Valtier, G. Massacrier, J. P. Sareyan, F. X. Schmider, and I. Vidal. Time-resolved photometry of BN and BU Cancri, two delta Scuti stars in Praesepe cluster. Fourth photometry campaign of the STEPHI network. *Astronomy and Astrophysics*, 283:121–128, March 1994.

T. Arentoft, J. Nuspl, H. Kjeldsen, A. Fronto, and S. Frandsen. BV Cnc: A multiperiodic Delta Scuti star. *Delta Scuti Star Newsletter*, 11:4, July 1997.

M. Alvarez, M. M. Hernandez, E. Michel, S. Y. Jiang, J. A. Belmonte, M. Chevreton, G. Massacrier, Y. Y. Liu, Z. P. Li, M. J. Goupil, T. Roca Cortes, A. Mangeney, N. Dolez, J. C. Valtier, I. Vidal, M. Sperl, and S. Talon. Pulsation, binarity and close frequency

- spacing in *deltaScutita* Scuti stars: BQ and BW Cancri. Results of the STEPHI VI campaign in Praesepe Cluster. *Astronomy and Astrophysics*, 340:149–159, December 1998.
- Seung-Lee Kim and See-Woo Lee. CCD Photometry of a Delta Scuti Star in an Open Cluster II. BT CNC in the Praesepe. *Journal of Korean Astronomical Society*, 28(2):197–208, October 1995.
- M. Breger, B. Martin, R. Garrido, Shi-Yang Jiang, Zhi-Ping Li, D. P. Hube, J. Stich, W. Ostermann, and M. Paparo. EP Cancri: a nonradially pulsating  $\delta$  Scuti star in the Praesepe cluster. *Astronomy and Astrophysics*, 281:90–94, January 1994.
- Z. P. Li. A Complicated Pulsation  $\delta$  Scuti Variable in Praesepe: HD 74028. *The Astronomical Journal*, 133(2):518–525, February 2007. doi: 10.1086/510126.
- W. J. Klein Wassink. The proper motion and the distance of the Praesepe cluster. *Publications of the Kapteyn Astronomical Laboratory Groningen*, 41:1–48, January 1927.
- J. H. Pena, R. Peniche, M. A. Hobart, A. Rolland, P. Lopez de Coca, M. Paparo, L. Parrao, C. de La Cruz, J. I. Olivares, V. Costa, C. Ibanoglu, A. Y. Ertan, O. Tumer, S. Evren, and Z. Tunca. Photoelectric photometry and period analysis of selected Delta Scuti stars in Praesepe. *Astronomy and Astrophysics Supplement*, 129:9–22, April 1998. doi: 10.1051/aas:1998170.
- M. M. Hernandez, E. Michel, J. A. Belmonte, S. Y. Jiang, M. Alvarez, M. Chevreton, M. Paparo, H. Kjeldsen, D. Bauduin, J. Fromage, M. J. Goupil, Z. P. Li, Y. Y. Liu, A. Mangeney, G. Massacrier, O. Ringot, T. Roca Cortes, B. Servan, and I. Vidal. New multi-site observations of the delta Scuti stars BS and BT Cancri. Results of the STEPHI VII campaign on the Praesepe cluster. *Astronomy and Astrophysics*, 337:198–206, September 1998b.
- L. M. Rebull, J. R. Stauffer, L. A. Hillenbrand, A. M. Cody, J. Bouvier, D. R. Soderblom, M. Pinsonneault, and L. Hebb. Rotation of Late-type Stars in Praesepe with K2. *The Astrophysical Journal*, 839(2):92, April 2017. doi: 10.3847/1538-4357/aa6aa4.

- M. Breger, M. Hareter, M. Endl, R. Kuschnig, W. W. Weiss, J. M. Matthews, D. B. Guenther, A. F. J. Moffat, J. F. Rowe, S. M. Rucinski, and D. Sasselov. Delta Scuti stars in the Praesepe cluster observed by the MOST satellite. *Astronomische Nachrichten*, 333(2): 131, February 2012. doi: 10.1002/asna.201111640.
- Patrick Lenz and Michel Breger. Period04: Statistical analysis of large astronomical time series. Astrophysics Source Code Library, record ascl:1407.009, July 2014.
- Aiying Zhou. Multiperiodicity of the delta Scuti Star BR Cancri. *Information Bulletin on Variable Stars*, 4497:1, July 1997.
- Ai-Ying Zhou, E. Rodríguez, A. Rolland, and V. Costa. Photometric properties of the  $\delta$  Scuti star BR Cancri. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 323(4):923–929, May 2001. doi: 10.1046/j.1365-8711.2001.04275.x.
- Steve B. Howell, Charlie Sobeck, Michael Haas, Martin Still, Thomas Barclay, Fergal Mullally, John Troeltzsch, Suzanne Aigrain, Stephen T. Bryson, Doug Caldwell, William J. Chaplin, William D. Cochran, Daniel Huber, Geoffrey W. Marcy, Andrea Miglio, Joan R. Najita, Marcie Smith, J. D. Twicken, and Jonathan J. Fortney. The K2 Mission: Characterization and Early Results. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 126(938):398, April 2014. doi: 10.1086/676406.
- Matthew J. Holman and Norman W. Murray. The use of transit timing to detect extrasolar planets with masses as small as earth, 2004.
- Simon J. Murphy. *Investigating the A-Type Stars Using Kepler Data*. PhD thesis, Jeremiah Horrocks Institute, University of Central Lancashire, Preston, UK, October 2014.
- David G. Koch, William J. Borucki, Gibor Basri, Natalie M. Batalha, Timothy M. Brown, Douglas Caldwell, Jørgen Christensen-Dalsgaard, William D. Cochran, Edna DeVore, Edward W. Dunham, III Gautier, Thomas N., John C. Geary, Ronald L. Gilliland, Alan Gould, Jon Jenkins, Yoji Kondo, David W. Latham, Jack J. Lissauer, Geoffrey Marcy, David Monet, Dimitar Sasselov, Alan Boss, Donald Brownlee, John Caldwell, Andrea K. Dupree, Steve B. Howell, Hans Kjeldsen, Søren Meibom, David Morrison, Tobias Owen, Harold Reitsema, Jill Tarter, Stephen T. Bryson, Jessie L. Dotson, Paul

- Gazis, Michael R. Haas, Jeffrey Kolodziejczak, Jason F. Rowe, Jeffrey E. Van Cleve, Christopher Allen, Hema Chandrasekaran, Bruce D. Clarke, Jie Li, Elisa V. Quintana, Peter Tenenbaum, Joseph D. Twicken, and Hayley Wu. Kepler Mission Design, Realized Photometric Performance, and Early Science. *APJL*, 713(2):L79–L86, April 2010. doi: 10.1088/2041-8205/713/2/L79.
- William Pence and Pan Chai. Fv: Interactive FITS file editor. Astrophysics Source Code Library, record ascl:1205.005, May 2012.
- M. Breger. Multiple frequencies of Theta 2 Tau: Comparison of ground-based and space measurements. *Communications in Asteroseismology*, 141:4–12, February 2002.
- Mauricio Tapia. Twenty years of weather and observing statistics in san pedro martir, baja california, méxico. *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica*, 2003. ISSN 0185-1101. URL <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=57101912>.
- Doug Tody. The IRAF Data Reduction and Analysis System. In David L. Crawford, editor, *Instrumentation in astronomy VI*, volume 627 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, page 733, January 1986. doi: 10.1117/12.968154.
- L. Fossati, S. Bagnulo, J. Landstreet, G. Wade, O. Kochukhov, R. Monier, W. Weiss, and M. Gebran. The effect of rotation on the abundances of the chemical elements of the A-type stars in the Praesepe cluster. *Astronomy and Astrophysics*, 483(3):891–902, June 2008. doi: 10.1051/0004-6361:200809467.
- Javier Serna, Jesus Hernandez, Marina Kounkel, Ezequiel Manzo-Martínez, Alexandre Roman-Lopes, Carlos G. Román-Zúñiga, Maria Gracia Batista, Giovanni Pinzón, Nuria Calvet, Cesar Briceño, Mauricio Tapia, Genaro Suárez, Karla Peña Ramírez, Keivan G. Stassun, Kevin Covey, J. Vargas-González, and José G. Fernández-Trincado. Stellar rotation of t tauri stars in the orion star-forming complex. *The Astrophysical Journal*, 923(2):177, dec 2021. doi: 10.3847/1538-4357/ac300a. URL <https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ac300a>.
- Francis LeBlanc. *An Introduction to Stellar Astrophysics*. Wiley, 2010.

- Bill Paxton, Lars Bildsten, Aaron Dotter, Falk Herwig, Pierre Lesaffre, and Frank Timmes. Modules for experiments in stellar astrophysics (mesa). *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 192(1):3, dec 2010. doi: 10.1088/0067-0049/192/1/3. URL <https://dx.doi.org/10.1088/0067-0049/192/1/3>.
- Bill Paxton, Matteo Cantiello, Phil Arras, Lars Bildsten, Edward F. Brown, Aaron Dotter, Christopher Mankovich, M. H. Montgomery, Dennis Stello, F. X. Timmes, and Richard Townsend. Modules for Experiments in Stellar Astrophysics (MESA): Planets, Oscillations, Rotation, and Massive Stars. *APSJ*, 208(1):4, September 2013. doi: 10.1088/0067-0049/208/1/4.
- R. H. D. Townsend and S. A. Teitler. GYRE: an open-source stellar oscillation code based on a new Magnus Multiple Shooting scheme. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 435(4):3406–3418, November 2013. doi: 10.1093/mnras/stt1533.
- S. Blanes, F. Casas, J. A. Oteo, and J. Ros. The Magnus expansion and some of its applications. *Physics Reports*, 470(5-6):151–238, January 2009. doi: 10.1016/j.physrep.2008.11.001.
- L. A. Balona and W. A. Dziembowski. Kepler observations of  $\delta$  Scuti stars. , 417(1):591–601, October 2011. doi: 10.1111/j.1365-2966.2011.19301.x.
- M. Breger. Asteroseismology of delta scuti stars. *Baltic Astronomy*, 9:149–163, 2000.
- H. Karttunen, P. Kroger, H. Oja, M. Poutanen, and K. Donner. *Fundamental Astronomy*. Springer, 5th edition, 2007.
- K. Schwarzschild. Ueber das gleichgewicht der sonnenatmosphäre. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1906: 41–53, 1906. URL <http://eudml.org/doc/58631>.
- John T. Cannon. *The evolution of dynamics : vibration theory from 1687 to 1742 : with 10 illustrations / John T. Cannon, Sigalia Dostrovsky*. Studies in the history of mathematics and physical sciences ; 6. Springer-Verlag, New York, 1981. ISBN 0387906266.

- P. Ledoux. Stellar Models with Convection and with Discontinuity of the Mean Molecular Weight. *APJ*, 105:305, March 1947. doi: 10.1086/144905.
- Donald D. Clayton. *Principles of stellar evolution and nucleosynthesis*. University of Chicago Press, 1968.
- G. Gamow. Nuclear Reactions in Stellar Evolution. *Nature*, 144(3648):575–577, September 1939. doi: 10.1038/144575a0.
- W.J. Maciel. *Introduction to Stellar Structure*. Springer Praxis Books. Springer International Publishing, 2015. ISBN 9783319161426. URL <https://books.google.hn/books?id=VoiQCgAAQBAJ>.
- D. W. Kurtz. Stellar pulsation: an overview. *Communications in Asteroseismology*, 147:6–30, January 2006. doi: 10.1553/cia147s6.
- Simon J. Murphy, Hiromoto Shibahashi, and Donald W. Kurtz. Super-nyquist asteroseismology with the kepler space telescope. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 430(4):2986–2998, feb 2013. doi: 10.1093/mnras/stt105. URL <https://doi.org/10.1093%2Fmnras%2Fstt105>.