UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE HONDURAS



"USO DE TÉCNICAS CFD PARA EL ANÁLISIS Y D<mark>ISE</mark>ÑO DE SISTEMAS DE TUBERÍAS, CANALES Y VERTEDEROS EN UNA REPRESA CON RÉGIMEN DE FLUJOS LAMINARES-TURBULENTOS POR GRAVEDAD"

> Una disertación Enviada a la Escue<mark>la de cien</mark>cias y humanidades

> > de la

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE HONDURAS EN EL VALLE DE SULA

> Para completar parcialmente los requisitos necesarios y obtener el grado de

> > Má<mark>st</mark>er en Física general

Departmento de Física de la UNAH-VS

Herman Jahzeel Martínez Suazo

San Pedro Sula, Cortés, Honduras. AGOSTO 2022

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE HONDURAS ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES DEPARTMENTO DE FÍSICA DE LA UNAH-VS

COMITÉ DE DISERTACIÓN

Msc. Marco Antonio Reyes Pagoaga

Nombre Apellido, Ph.D./Master Coordinador

Nombre Apellido, Ph.D./Master

Nombre Apellido, Ph.D./Master

Nombre Apellido, Ph.D./Master

Examinador Externo, Ph.D./Máster Título del examinador externo Nombre de la institución donde trabaja

Msc. Marco Antonio Reyes Pagoaga

Nombre Apellido, Ph.D./Master Asesor de la disertación

Candidato: Herman Jahzeel Martínez Suazo Fecha para la Defensa: AGOSTO XX, 2022

Dedicatoria

Dedico este trabajo a todos aquellos que creen en que el universo es maravilloso y vale la pena estudiarlo, aquellos que aman la verdad y la buscan incansablemente.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco primeramente a Dios que es el que ha guiado mis pasos en este mundo y proporcionado lo que realmente necesito para salir adelante, me ha dado a mi familia que es lo más preciado que tengo. Agradezco el apoyo incondicional de mi familia, en especial a mi madre que es la mujer que más me ama. Por último agradezco el apoyo de todas aquellas personas que de una u otra manera hicieron posible este documento, sobre todo a mi asesor que ha desmostrado ser nuestro fiel apoyo en este programa.

RESUMEN

Las técnicas de Dinámica de fluidos computacional o mejor conocidas como las técnicas CFD con sus siglas en inglés (Computational Fluid Dynamics), son ampliamente usadas para aproximar el comportamiento de un flujo, encontrando la solución local de las ecuaciones de Navier-Stokes utilizando técnicas computacionales. Según Malalasekera, H K Versteeg (2007, página 1) se define el CFD como el análisis de sistemas que envuelven flujos de fluidos, transferencia de calor y fenómenos asociados usando técnicas computacionales. Actualmente, gracias al desarrollo de la computación, se ha logrado varios avances en esta rama de la Mecánica de fluidos, teniendo muchas aplicaciones en la Ingeniería civil para el diseño de puentes, edificios y estructuras expuestas a cargas debido a flujos externos (González Gutierrez, 2001; Sanches, 2004; Bozorgnia & Lee, 2012), en la Ingeniería marina y costera se utiliza para simular y modelar mareas y su efecto en las estructuras costeras (Díaz-Carrasco, Croquer, Tamimi, Lacey & Poncet, 2021), en la Ingeniería mecánica se usa para modelar piezas de una turbina (Rai, 1989), así de la misma manera o de forma similar para muchas otras ciencias. Este caso de estudio se ha enfocado en el análisis hidráulico de un sistema de tuberías con un flujo por gravedad (Uso, tanque elevado como fuente de abastecimiento, represa de abastecimiento de agua potable, son algunos ejemplos). El análisis se ha orientado a encontrar los esfuerzos resultantes del flujo a través de los sistemas hidráulicos y a partir de la información obtenida, proponer un diseño apropiado, esto usando las técnicas CFD apropiadas para resolver las ecuaciones diferenciales del modelo físico propuesto para el problema. Para ello se definió primero los fundamentos de la Dinámica de los fluidos y se revisó la literatura con los últimos enfoques adaptativos para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes, con este fin, se propuso un modelo teórico con la forma asintótica de las ecuaciones de Navier-Stokes que más se ajustó al problema de transporte en cuestión y luego se propuso un ensamble donde se pueda usar los métodos computacionales más apropiados para obtener una simulación a un bajo costo computacional.

ABSTRACT

The Computational Fluid Dynamics techniques or better known as the CFD techniques with its acronym in English (Computational Fluid Dynamics), are widely used to approximate the behavior of a flow, finding the local solution of the Navier-Stokes equations using computational techniques. According to Malalasekera, H K Versteeg (2007, page 1), CFD is defined as the analysis of systems involving fluid flows, heat transfer and associated phenomena using computational techniques. Currently, thanks to the development of computation, several advances have been made in this branch of Fluid Mechanics, having many applications in Civil Engineering for the design of bridges, buildings, and structures exposed to loads due to external flows (González Gutierrez, 2001; Sanches, 2004; Bozorgnia & Lee, 2012), in Marine and Coastal Engineering it is used to simulate and model tides and their effect on coastal structures (Díaz-Carrasco y col., 2021), in Mechanical Engineering it is used to model turbine parts (Rai, 1989), among other sciences. This case study focuses on the hydraulic analysis of a piping system with a gravity flow. (Use Elevated tank as source of supply, Dam for drinking water supply are some examples). The analysis will be oriented to find the efforts resulting from the flow through the hydraulic systems and from the information obtained propose an appropriate design, this using the appropriate CFD techniques to solve the differential equations of the physical model proposed for the trouble. The foundations of fluid dynamics were defined first, and the literature was reviewed with the latest adaptive approaches to solve the Navier-Stokes equations, this in order to propose a theoretical model where the form of the equations of Navier-Stokes that best suits the transportation problem to be solved and then use the most appropriate computational methods to obtain a simulation at a low computational cost.

TABLA DE CONTENIDO

Agr	rade	cimientos			
Res	sum	$\mathbf{e}\mathbf{n}$			
Abs	stra	ct VI			
Índ	ice	de cuadros			
Índ	ice	de figuras			
List	Lista de abreviaciones xv				
List	ta d	e símbolos			
1.]	Intro	oducción			
-	1.1.	Justificación del trabajo			
-	1.2.	Necesidades relacionadas			
-	1.3.	Objetivos			
-	1.4.	Hipótesis			
-	1.5.	Descripción del objeto de estudio y contexto de la investigación 10			
2.]	Mar	co teórico			
6 4	2.1.	Introduccíon			

	2.2.	Funda	mentos de la Dinámica de fluidos usados en CFD	14
	2.3.	Model	ado de campos en el análisis de flujo con CFD	18
	2.4.	Princij	pios de conservación usados en CFD	24
		2.4.1.	Ecuación de continuidad	27
		2.4.2.	Ecuación de la conservación del momentum lineal	28
		2.4.3.	Ecuación de la conservación de energía	33
		2.4.4.	Resumen de los principios de conservación	37
	2.5.	Anális	is dimensional y adimensional de flujos con técnicas CFD	38
	2.6.	Anális	is de flujos importantes para el uso de técnicas CFD	43
	2.7.	Ecuaci	iones de Navier-Stokes	47
		2.7.1.	Ecuaciones de vorticidad y energía	50
		2.7.2.	Condiciones de frontera para el modelado del movimiento de un fluido	53
		2.7.3.	Análisis adimensional y las ecuaciones de Navier-Stokes	57
		2.7.4.	Las ecuaciones de Navier-Stokes con promedio de Reynolds (RANS) .	59
3.	Pro	cedimi	ento experimental	62
	3.1.	Metod	ología general	62
	3.2.	Métod	o de los elementos finitos	67
		3.2.1.	Método de los volúmenes finitos	69
		3.2.2.	Método de Galerkin	77
	3.3.	Model	os de turbulencia	92
		3.3.1.	Uso del Modelo de turbulencia K-Epsilon	97
		3.3.2.	Uso del Modelo de turbulencia K-Omega	104

	3.4.	Impler	nentación de OpenFOAM para simular flujos turbulentos	107
		3.4.1.	Diseño de geometría y mallado del problema	111
		3.4.2.	Proceso de diseño y construcción de mallados para un problema en específico	112
		3.4.3.	Uso de librerías de OpenFOAM y su estructura	113
		3.4.4.	Uso de ParaView con OpenFOAM	114
		3.4.5.	Programación en OpenFOAM	114
	3.5.	Formu	lación de ensambles en OpenFOAM	116
		3.5.1.	Método de Monte Carlo en OpenFOAM	116
		3.5.2.	Método de transformada rápida de Fourier en OpenFOAM $\ .\ .\ .\ .$	121
4.	Res	ultado	S	124
	4.1.	Definio	ción del problema de transporte de fluidos	124
	4.2.	Config	uración de la simulación usando similitud dinámica	126
		4.2.1.	Primera simulación	126
		4.2.2.	Segunda simulación	131
5.	Disc	cusión		135
6.	Con	clusióı	1	139
7.	API Stol	ÉNDIC œs	CE A: Modelamiento asintótico de las ecuaciones de Navier-	140
8.	AP	ÉNDI	CE B: Integral de Monte Carlo	142
9.	AP	ÉNDI	CE C: Transformada de Fourier	144

10. APÉNDICE D: Polinomios de Sobolev	148
11. APÉNDICE E: Códigos en C++ de las librerías utilizadas en OpenFOAM $% \mathcal{A}$.	150
Referencias	165

ÍNDICE DE CUADROS

2.1	Principios de conservación	37
2.2	Números adimensionales más común mente usados en Mecánica de fluidos $\ .$.	39

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1	Detalle constructivo del corte transversal de la pieza que se quiere diseñar en tramo o conducto que conduce el flujo en una represa	10
2.1	La Dinámica de fluidos computacional, involucra la Mecánica de fluidos, Ciencias de la Computación y Matemáticas (Tu, Yeoh & Liu, 2018, página 2)	11
2.2	Ilustración de los esfuerzos axiales (a) y cortantes (b) sobre un volumen de control (Blazek, 2015, página 14)	17
2.3	El enfoque de volumen de control y una línea de campo de velocidad (John D. Anderson, 1995, página 41)	18
2.4	Línea de campo de velocidades (John D. Anderson, 1995, página 43)	19
2.5	El enfoque de volumen de control y la superficie de control en el modelado de un fluido (Blazek, 2015, página 6 y 10)	25
2.6	Ilustración de un enfoque euleriano y un enfoque lagrangiano (John D. Anderson, 1995, página 43)	26
2.7	Elemento infinitesimal de volumen que ilustra la conservación de masa y de flujo en todas las direcciones (John D. Anderson, 1995, página 54) \ldots .	27
2.8	La suma de fuerzas axiales debido a los esfuerzos viscosos del fluido generan el tensor de esfuerzos en la ecuación de conservación de momentum (John D. Anderson, 1995, página 61)	29
2.9	Ilustración del cambio de energía en un fluido (John D. Anderson, 1995, página 68)	36
2.10	Ilustración del cambio de energía en un flujo turbulento, creación de los vórtices en la medida aumenta el número de Reynolds	46

3.1	Ejemplo de una simulación realizada en Open ∇ FOAM [®] y renderizada en $ParaView^{\mbox{\ensuremath{\mathbb{R}}}}$	66
3.2	Malla bidimensional utilizada en el método de los volúmenes finitos (Fletcher, 1998, Página 106)	68
3.3	Malla de bloque estructurado empleada en el método de los volúmenes finitos (Ferziger, H & Peric, 2002, Página 298)	69
3.4	Celda utilizada en el modelado del alcantarillado (Celeita, 2016, Página 27 y 28)	71
3.5	Volumen de control usado en el artículo (Bustamante, Nieto & Giraldoa, 2008, Página53-56)	73
3.6	Volumen de control para la malla tridimensional no estructurada(Tuković, Karač, Cardiff, Jasak & Ivanković, 2018, Página 6)	75
3.7	Elemento tetraédrico empleado en un mallado de elementos finitos (Lewis, Nithiarasu & Seetharamu, 2004, Página 73)	77
3.8	Mallado implementado para resolver el problema de transporte (Karatzas, Stabile, Nouveau, Scovazzi & Rozza, 2019, Página 571)	83
3.9	Modelo esquemático de la burbuja modelada por medio del método de Galerkin con mínimos cuadrados (Tian, Liu, Zhang & Wang, 2018, Página 42) \ldots	84
3.10	Mallado computacional para la simulación de un flujo de sangre en una arteria carótida (Ateshian, Shim, Maas & Weiss, 2018, Página 27)	85
3.11	Mallado escalonado implementado en el esquema híbrido FVM/FEM (Busto, Dumbser & Río-Martín, 2021, Página 9)	86
3.12	Descripción del elemento finito en un mallado con gradiente refinado (T. He, Zhang & Zhang, 2018, Página 3)	89
3.13	Diseño de la interfaz para el uso de Galerkin con OpenFoam (Xu, Tang, Xu, Feng & Guo, 2017, Página 406)	90
3.14	Ilustración de un flujo laminar y turbulento con su respectivo número de Reynolds	96
3.15	Diseño de las mallas en $Blender^{\mathbb{R}}$	112

4.1	Represa hidroeléctrica Chief Joseph, véase más en https://en.wikipedia.org/ wiki/Chief_Joseph_Dam	124
4.2	Corte constructivo de la tubería de alimentación para una turbina Kaplan (Yaseen y col., 2020, Página 12)	125
4.3	IDE de la consola Salome 9.9 para eleborar mallados que puedan ser usados en Open ∇ FOAM [®]	127
4.4	Geometría exportada exitosamente de Salomé a Open ∇ FOAM [®] y renderizada en ParaView	127
4.5	Cálculos realizados durante la simulación con el solver simpleFoam	128
4.6	Se modifican las carpetas y se reescriben los archivos encontrados en ellas	128
4.7	Para editar los archivos se usa Notepad C++	129
4.8	Diagrama del campo de presiones	130
4.9	Diagrama del campo de velocidades.	130
4.10	Ventana en Windows de la línea de comando en Ubuntu para la simulación con pisoFoam	131
4.11	Diagrama del campo de presiones con pisoFoam	132
4.12	Diagrama del campo de velocidades en la dirección del flujo con pisoFoam.	132
4.13	Diagrama de vorticidades en la sección transversal del flujo con pisoFoam.	133
4.14	Diagrama de aceleraciones en la dirección del flujo con pisoFoam	133
5.1	Elementos constructivos de una represa hidroeléctrica	135
5.2	Elementos hidráulicos dentro del esquema constructivo de la represa	136
5.3	Sección transversal del detalle constructivo de una turbina Kaplan	138
9.1	Ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas	146
9.2	Algoritmo de la transformada rápida de Fourier	147

LISTA DE ABREVIACIONES

\mathbf{A}

Arbitrary Derivative ADER.

С

Central Difference Scheme CDS.

 ${\bf CFD}\,$ Computational Fluid Dynamics.

Computer-Aided Design CAD.

D

Direct Navier-Stokes Solution DNS.

Discrete Element Method CFD-DEM.

\mathbf{F}

Fast Fourier Transform FFT.

Finite Difference Method FDM.

Finite Element Method FEM.

Finite Volume Method FVM.

First Order Upwind Scheme FUDS.

Н

Hybrid Differencing Scheme HDS.

\mathbf{L}

Large Eddy Simulation LES.

\mathbf{M}

Monte Carlo Finite Volume Element Method MCFVEM.

Monte Carlo Finite Volume Method MCFVM.

Multi-Level Monte Carlo Finite Volume Method MLMCFVM.

Ρ

Partial Differential Equations PDE.

Pressure Implicit with Split Operator PISO.

Proper Orthogonal Decomposition POD.

 \mathbf{Q}

Quasi-Arbitrary Lagrangian Eulerian Finite Element Method QALE-FEM.

R

Re-Normalisation Group RNG.

Reynold Stress Model RSM.

Reynolds Average Navier-Stokes RANS.

 \mathbf{S}

Second Order Upwind Scheme SOUS.

Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations SIMPLE.

Shear Stress Transport SST.

 \mathbf{V}

Volume of Fraction VOF.

LISTA DE SÍMBOLOS

С

- ã Campo de Aceleraciones.
- ${\bf B}\,$ Campo de Fuerzas de cuerpo.
- **T** Campo de Fuerzas Traccionales.
- $\Gamma\,$ Campo de Temperaturas.
- $\boldsymbol{\omega}\,$ Campo de Vorticidades.

 $V_{\boldsymbol{x}}$ Componente de Velocidad en la dirección X.

 $V_{\boldsymbol{y}}$ Componente de Velocidad en la dirección Y.

 $V_{z}\,$ Componente de Velocidad en la dirección Z.

D

 $\rho\,$ Densidad.

 $\frac{D}{Dt}$ Derivada Material.

\mathbf{E}

e Energía almacenada por unidad de masa.

Q Energía Calorífica.

- \mathbf{W}_k Energía por Trabajo.
- ${\bf E}\,$ Energía total del sistema.
- $\tau\,$ Esfuerzo Cortante.
- τ_{xx} Esfuerzo Cortante en la dirección XX.
- τ_{xy} Esfuerzo Cortante en la dirección XY.
- τ_{xz} Esfuerzo Cortante en la dirección XZ.
- τ_{yx} Esfuerzo Cortante en la dirección YX.

- τ_{yy} Esfuerzo Cortante en la dirección YY.
- τ_{yz} Esfuerzo Cortante en la dirección YZ.
- τ_{zx} Esfuerzo Cortante en la dirección ZX.
- τ_{zy} Esfuerzo Cortante en la dirección ZY.

 τ_{zz} Esfuerzo Cortante en la dirección ZZ.

 $\boldsymbol{\sigma}$ Esfuerzo Superficial de un Fluido.

 $\overline{\hat{u}_i \hat{u}_j}$ Esfuerzos de Reynolds debido a la Turbulencia.

 Ω_{ij} Esfuerzos debido a la vorticidad.

 ${\cal P}_{ij}$ Esfuerzos debido al Transporte Convectivo.

 D_{ij} Esfuerzos debido al Transporte Difusivo.

\mathbf{F}

 $\mathbf{j_{adv}}$ Flujo Advectivo.

j_{diff} Flujo Difusivo.

G

 $\nabla \mathbf{V}$ Gradiente de Deformaciones.

\mathbf{M}

P Momentum Lineal.

Ν

Eu Número de Euler.

Fr Número de Froude.

Re Número de Reynolds.

0

 $\mathbf{V}\cdot\nabla$ Operador Advectivo.

Ρ

 $p\,$ Presión.

 $\rho \mathbf{V} \mathbf{V}$ Producto Diádico.

\mathbf{T}

- $\dot{\epsilon_{ij}}$ Tasa de deformación.
- ${\cal S}_{ij}\,$ Tensor de Deformaciones.
- **D** Tensor de la tasa de deformaciones.
- I Tensor Identidad.

V

- $u_i^{\,\prime}$ Variación de la Velocidad Instantánea.
- ${\bf \hat{n}}~{\rm Vector}~{\rm Normal.}$
- $\mathbf{\tilde{t}}\,$ Vector tangente Unitario a la superficie de control.
- V Vector Velocidad.
- $U_i\,$ Velocidad Instantánea.
- u_i Velocidad Promedio de Reynolds.
- $\mu\,$ Viscosidad.
- $\kappa\,$ Viscosidad dilatacional.
- μ' Viscos
idad Volumétrica.

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Justificación del trabajo

Los problemas de Hidráulica al igual que muchos problemas del sector industrial, tienen muchas limitantes de diseño, muchas veces encontrar una solución analítica no es posible debido a las características intrínsecas del problema en cuestión, por eso la necesidad de simular numéricamente el problema es una opción viable en el proceso de diseño. Muchos autores dan énfasis a este aspecto, por ejemplo, C. Pozrikidis (2017) menciona en el prefacio de su libro:

" El fácil acceso a las computadoras ha definido una nueva era en la enseñanza y el aprendizaje. La oportunidad ampliar la materia de los planes de estudio tradicionales de ciencia e ingeniería al ámbito de la informática científica se ha vuelto no solo deseable, sino también necesaria. Gracias a la portabilidad y bajos costos operativos y generales, la experimentación mediante simulación numérica se ha convertido un sustituto viable, y ocasionalmente la única alternativa, a la experimentación física.". (C. Pozrikidis, 2017, página xvii)

Llevar a cabo un desarrollo experimental puede ser muy costoso muchas veces y no del todo práctico. Los conocimientos teóricos sobre el uso de técnicas CFD para el análisis y diseño de redes hidráulicas con flujos por gravedad puede dar la oportunidad de mejorar la facilidad en el desarrollo de los diseños, sin olvidar que estas técnicas todavía no están perfeccionadas en su totalidad. Sobre este detalle se puede leer en el prefacio del libro de Laurendeau and F Kafyeke E and Tuncer Cebeci y P.Shao (2005) lo siguiente acerca de los costos de diseño:

"... Debe reconocerse que tanto el proceso experimental como el uso de técnicas CFD requieren recursos. El costo de los experimentos en algunos casos puede ser prohibitivo, como, por ejemplo, con extensas pruebas de vuelo de aviones, pruebas a gran escala de una turbina de gas, o pruebas destructivas de componentes costosos. En esos casos, puede ser posible reducir el número de pruebas experimentales usando CFD, ya que solo se requiere un número relativamente pequeño de experimentos para verificar la precisión de los resultados numéricos. Por supuesto, el costo de obtener información precisa Las soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales también pueden ser grandes para un complejo flujo, pero todavía son generalmente mucho menores que el costo de los experimentos adicionales, que de otro modo sería necesario...". (Laurendeau and F Kafyeke E and Tuncer Cebeci & P.Shao, 2005, página vi)

1.2 Necesidades relacionadas

En el entorno de trabajo actual en el campo de la Hidráulica están presentes varios puntos que permiten dar respuesta a las necesidades de investigación relacionadas con el estudio del uso de técnicas CFD aplicadas al diseño de redes hidráulicas y desarrollo de la investigación en el ámbito de grado y posgrado dentro de la facultad de Ciencias e Ingeniería de la UNAH, necesidades entre las cuales se describen las siguientes:

- 1. La Mecánica de fluidos computacional es una ciencia que ofrece muchas oportunidades para la investigación en muchos campos de la ciencia e ingeniería, de hecho se invita a muchos investigadores jóvenes a resolver uno de los problemas del milenio más importante de todos los tiempos: la existencia de una solución analítica (continua y suave) para las ecuaciones de Navier-Stokes en tres dimensiones. Una explicación sobre este problema se puede encontrar en el artículo escrito por Mora (2017, página 70).
- 2. Disminuir los costos de diseño es imprescindible en un proyecto, por eso el correcto uso de software con técnicas CFD se ha vuelto parte importante en la formación actual de los ingenieros en fluidos. Se debe promover la creación de nuevos enfoques y técnicas para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes con un bajo costo computacional, sobre el costo computacional se puede leer en el artículo escrito por Hoffman y Johnson (2006) lo siguiente: "... Entonces, la pregunta clave se convierte en el costo computacional. ¿El método adaptativo producirá un resultado confiable a un costo mínimo?, y la principal

pregunta restante es entonces: ¿Cuál es el costo? En particular, podemos ¿Calcular flujos turbulentos de números de Reynolds altos en una PC?..." (Hoffman & Johnson, 2006, página 1710)

- 3. Es necesario promover la Física computacional a través de coloquios y congresos de investigación. La falta de profesionales preparados, capacitados y entrenados para realizar estudios utilizando técnicas CFD para diseñar redes hidráulicas causa un estancamiento en el progreso y desarrollo de la industria y la investigación en este campo, ya que no es posible diseñar usando nuevos controles y tecnologías basadas en técnicas computacionales, la demanda del uso de técnicas CFD es mucha en la actualidad. Sobre la necesidad de aprender técnicas CFD se puede leer lo siguiente en el libro de Ferziger, H y Peric (2002): "...Hay muchos paquetes de software disponibles para resolver problemas de flujo de fluidos; miles de ingenieros los utilizan en una amplia gama de industrias y áreas de investigación. El mercado está creciendo aparentemente a un ritmo de alrededor del 15% cada año. Los códigos CFD se aceptan hoy en día como herramientas de diseño en muchos industrias y se utilizan no solo para resolver problemas, sino también para ayudar en el diseño y optimizando diversos productos y como vehículo de investigación..."(Ferziger y col., 2002, página v)
- 4. La necesidad de mejorar los diseños de redes de flujos para mejorar la eficacia de los procesos de transporte de fluidos. Según Fletcher (1998, página 2), pueden identificarse algunas ventajas en el uso de técnicas CFD para el diseño de redes de flujo:
 - El implemento de técnicas CFD reduce considerablemente el tiempo de diseño.
 - Las simulaciones con técnicas CFD pueden llevarse a cabo con situaciones que son irreproducibles en un experimento.
 - Las simulaciones con técnicas CFD aportan información más detallada sobre el fenómeno de transporte en cuestión.

- Transportar el fluido reduciendo pérdidas, en nuestro caso el agua debe transportarse reduciendo en el menor posible pérdidas de cualquier tipo.
- Ser reduce el costo de diseño enormemente.
- 5. Una necesidad en el diseño es que debe contemplar la naturaleza real del flujo y ser capaz de cumplir cualquier requerimiento industrial ó técnico, es decir que debe contemplar las normas técnicas de diseño vigentes. El uso de técnicas CFD permite tener la oportunidad de crear varias opciones de diseño a un mismo problema.
- 6. La necesidad de ahondar en el fundamento teórico es esencial para el uso de técnicas CFD y resolver problemas de transporte de fluidos, esto dará el conocimiento teórico sobre como resolver las ecuaciones de Navier-Stokes dará un mejor entendimiento de los fenómenos de transporte asociados a la Hidráulica. El ingeniero de fluidos podrá diseñar de una manera muy aproximada, problemas de transporte simulando el movimiento del flujo en tiempo real haciendo uso de software y técnicas CFD.
- 7. Es necesario introducir la Física computacional aplicada a los sectores de la Industria, Construcción e Ingeniería en general, ya que existe muy poco entendimiento ó una carencia casi absoluta en estas herramientas computacionales.

1.3 Objetivos

Crear una simulación generada con técnicas CFD para diseñar un sistema de tuberías canales y vertederos con un flujo incompresible de gran caudal bajo la acción de la gravedad.

Objetivos específicos

- Formular correctamente el modelo físico del problema de transporte con sus relaciones constitutivas y condiciones de frontera.

- Identificar las técnicas CFD apropiadas para diferentes problemas y condiciones de frontera.
- Obtener los campos de velocidades, aceleraciones y vorticidades a través de la simulación del flujo usando técnicas CFD.
- Usar técnicas CFD para calcular las solicitaciones y parámetros de diseño de redes hidráulicas.
- Encontrar las limitantes e irregularidades de usar técnicas CFD al resolver problemas de Hidráulica.

1.4 Hipótesis

En la actualidad la demanda de uso de técnicas computacionales viene en aumento y la necesidad de agilizar el proceso de generar diseños que puedan dar solución a muchos problemas que involucren el transporte de fluidos resulta imprescindible. Sobre esta necesidad menciona Yeoh, Liu, Tu y Timchenko (2011a) lo siguiente:

"...El dominio de CFD en el manejo de problemas industriales complejos de flujo y calor es cada vez más importante..." (Yeoh y col., 2011a, página x)

Uno de los problemas más frecuentes y que es de mucha importancia en los problemas con fenómenos de transporte es la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes y el campo de la Hidráulica no es la excepción. Según Piechota, Synowiec, Andruszkiewicz y Wedrychowicz (2018) como ejemplo del CFD aplicado a la Hidráulica, donde en su trabajo simulan el flujo de un fluido turbulento a través de una tubería con codos a 90 grados, el objetivo era encontrar un modelo de turbulencia adecuado que simule el flujo a través del sistema de tuberías con el accesorio mencionado, el autor Piechota y col. (2018) mencionan: "...La elección del modelo de turbulencia y el establecimiento de las condiciones de contorno en la entrada a la tubería fue crucial para recrear el comportamiento del fluido en el flujo real durante las mediciones..." (Piechota y col., 2018, página 415)

Para ello es necesario comprender muy a fondo el modelo físico detrás del fenómeno de transporte que se quiere estudiar para poder implementar correctamente las técnicas CFD, para lo cual (Yeoh y col., 2011a, página xv) sugiere mucho entrenamiento.

Las preguntas que cualquier físico ó ingeniero de fluidos se haría para resolver un problema de transporte son las siguientes:

- ¿Cuál es el modelo físico más apropiado para modelar flujos?
- ¿Qué debe considerarse en el modelo físico para diseñar un flujo a través de un sistema de tuberías?
- ¿Cuál es el método de solución más apropiado para resolver las ecuaciones diferenciales del modelo propuesto?
- ¿Es posible estimar el error y costo computacional en una simulación?
- ¿Se puede reducir el costo computacional y mejorar la proyección de la simulación obtenida?
- ¿Qué resultados podría tener la comparación entre una simulación computacional y las evidencias experimentales?

En la Dinámica computacional de fluidos, la clave para resolver cualquier problema de transporte es el modelo físico es decir, las ecuaciones diferenciales que definen el sistema con sus condiciones de frontera y el método numérico a implementar para encontrar la solución. Por ejemplo, el modelamiento de problemas de Hidráulica haciendo uso de las técnicas CFD puede ser muy difícil si no se tiene claridad de como funciona un sistema, otra situación puede ser que el enfoque adaptativo para resolver el problema tenga un costo computacional muy alto afectando la precisión de los resultados. Sobre este aspecto Giraldo (2017) menciona en su trabajo:

"...Las principales desventajas que tiene la simulación de fluidos son, que requiere computadoras de gran memoria con procesadores de frecuencia elevada, y es fundamental tener conocimientos avanzados tanto en dinámica de fluidos como en métodos numéricos para lograr resultados razonables y fiables..." (Giraldo, 2017, página 1)

En el campo de la Hidráulica se llevan a cabo obras que involucran el transporte de flujos, ya sea sobre un canal o una tubería bajo presión, también diseño de tanques como reservorio de algún fluido y vertederos de distintas geometrías para usos varios. En todos estos diseños se debe modelar corréctamenta las ecuaciones de Navier-Stokes.

Un sistema en particular en el cual se puede indagar es aquel que involucra un sistema de tanque-tubería-vertedero. Una situación donde se puede ver este sistema es por ejemplo la construcción de un ramal de tubería que transportará un flujo desde un reservorio remoto hacia un vertedero donde se llevará a cabo algún procedimiento en particular, se puede citar el trabajo de C. Wang, Nilsson, Yang y Petit (2017, ver página 13), donde ellos proponen una combinación de métodos en 1-D y 3-D para simular el sistema mencionado anteriormente. Para esto se debe modelar el flujo a través de este sistema, proponiendo un modelo teórico sobre el régimen de flujo y su comportamiento a través del sistema. Esto debe hacerse tomando en consideración todas las particularidades del problema en cuestión, sobre esto Malalasekera, H K Versteeg (2007) señalan:

"...Para tomar las decisiones correctas se requieren buenas habilidades de modelado, porque en todos los problemas, excepto en los más simples, necesitamos hacer suposiciones para reducir la complejidad a un nivel manejable..." (Malalasekera, H K Versteeg, 2007, páginas 4 a la 6) El modelo teórico debería contemplar:

- La forma asintótica más correcta o adecuada de las ecuaciones de Navier-Stokes para el sistema propuesto. El modelo físico que más se adhiere a la realidad del sistema.
- El enfoque adaptativo más conveniente para resolver las ecuaciones diferenciales propuestas en el modelo con sus condiciones de frontera.
- Determinar si el enfoque propuesto es viable, es decir, si su costo computacional es mínimo y si se pueda llegar a establecer una predicción correcta del flujo.
- A partir del modelo, proponer un diseño es decir, tuberías con diámetros y espesores, accesorios u otras necesidades partiendo de los esfuerzos e información obtenida de la simulación numérica, tomando en cuenta normas técnicas de diseño.

Además de C. Wang y col. (2017), existen otros autores que trabajaron en algo similar. Algunos modelos teóricos recientes en distintas áreas han sido los siguientes:

- Se han utilizado técnicas CFD en el diseño de alcantarillado de aguas lluvia, se puede citar el trabajo de Celeita (2016, página 26 a la 28), donde en su trabajo se menciona el uso del método de diferencias finitas y volúmenes finitos.
- En la industria muchas veces se diseñan tuberías y tanques para transportar y almacenar fluidos que presentan cambios de fase o combinación/mezcla de fluidos heterogéneos durante su movimiento, estos flujos son llamados *flujos multifásicos*, ejemplo de esto se observa en el trabajo de Gidaspow, Li y Huang (2013).
- Es importante revisar los esfuerzos en las juntas de las redes de flujo, como ejemplo de esto se puede citar el trabajo de Athulya y Miji Cherian (2016, Página 330). En su trabajo se muestra el diseño de una junta en Tee para una red que transporta un flujo multifásico, el autor apoyó sus resultados usando ANSYS Fluent como software de apoyo para su diseño.

- En la industria se manejan fluidos muy viscosos ("Slurry Flows" en inglés) y las fuerzas internas de estos fluidos son considerables, por lo tanto, en el diseño de los tramos de tubería debe considerarse los esfuerzos en la capa límite, ejemplo de esto se ve en el trabajo de Zambrano, Sigalotti, Klapp, Peña-Polo y Bencomo (2017, Páginas 13 a la 17), usan técnicas CFD para medir la caída de presión en los tramos de tubería haciendo uso del programa FLUENT 6.3 como apoyo, también añade detalles sobre un experimento realizado para verificar sus resultados obtenidos en la simulación.
- El uso de técnicas CFD en la Industria química y petrolera son usadas para simular procedimientos y técnicas de desplazamiento de flujos con fluidos diferentes, esto ya sea porque se necesita la total remoción de alguno de los fluidos en el tratamiento de algún producto(limpieza del ducto después del tratamiento), ejemplo de esto se ve en la simulación de un flujo en una tubería inclinada a cierto ángulo que transporta agua y aceite, está realizada por Zheng, Zhang, Jiang y Guo (2017, Página 664). En la simulación se observa que la geometría del problema afecta el comportamiento del flujo en la tubería, la simulación fue llevada a cabo usando ANSYS como software de apoyo.

Este sistema de tanque-tubería-vertedero es muy visto y bastante común en obras hidráulicas. Estudiar este sistema bajo la acción de grandes caudales resulta interesante y se propondrá un diseño para una pieza localizada en un ramal de tubería que tendrá por función abastecer una turbina desde un reservorio remoto, este puede ser una represa. Se indagará en las solicitudes de carga para la infraestructura que soportará el sistema de tuberías para grandes caudales, la carga viva que esta estructura soportará es la carga hidráulica debido al movimiento del flujo, se encontrará el modelo más apropiado usando técnicas CFD.

1.5 Descripción del objeto de estudio y contexto de la investigación

Uno de los objetivos principales sería simular los distintos flujos que pueden encontrarse en una represa hidroeléctrica, por ejemplo (El sistema hidráulico puede encontrarse en cualquier situación donde el objetivo sea transportar agua, pero para dar contexto a la investigación, se ha elegido una represa), se puede mencionar los siguientes:

- 1. Simular un flujo por gravedad como ser la caída de agua de un vertedero.
- 2. Simular la tubería de alimentación hacia una turbina
- 3. Simular un canal de drenaje para control de una represa.

Se mostrára mayor importancia a tuberías con transiente de presión, ya que son estas piezas las que posiblemente sean más afectadas por los esfuerzos producidos por el flujo en movimiento dentro de la tubería. Se podría proponer un reductor de diámetro de tuberías como se aprecia en el siguiente detalle constructivo:



Figure 1.1. Detalle constructivo del corte transversal de la pieza que se quiere diseñar en tramo o conducto que conduce el flujo en una represa.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Introduccíon

Él Computational Fluid Dynamics (CFD) en sus inicios fue de gran interés para la Aeronáutica y la Astronáutica, pero poco a poco muchos otros campos, como la Mecánica industrial y manufacturera, fue introduciendo la aplicación de técnicas CFD para resolver problemas que involucraban fluidos (Tu, Yeoh & Liu, 2018), no solo para problemas de Hidráulica, también para simular flujos de magma en calderas (Duran, 2000). Se puede definir el CFD cómo el conjunto de técnicas numéricas y computacionales implementadas para simular un fluido en movimiento. Puede utilizarse como herramienta de diseño, instrumento de investigación, o como instrumento didáctico.



Figure 2.1. La Dinámica de fluidos computacional, involucra la Mecánica de fluidos, Ciencias de la Computación y Matemáticas (Tu, Yeoh & Liu, 2018, página 2)

Se empezará caracterizando los distintos tipos de flujos y de transporte de materia, esto es primordial y básico en la Mecánica de fluidos y Termodinámica. Los fenómenos físicos de transporte, como ser la transferencia de materia de un lugar a otro, puede suceder de tres formas: Advectivo: La dinámica del flujo de alguna propiedad es definida por su velocidad y las propiedades se transfieren de forma espacial en el fluido, por ejemplo la presión de un flujo a lo largo de una tubería. El Operador Advectivo V · ∇ está dado por:

$$\mathbf{V} \cdot \nabla = V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} + V_z \frac{\partial}{\partial z}$$
(2.1)

Donde V_x , V_y y V_z son las componentes de la velocidad **V**. El flujo advectivo \mathbf{j}_{adv} queda definido como:

$$\mathbf{j}_{\mathrm{adv}} = \mathbf{V}c \tag{2.2}$$

Donde c representa la propiedad que se transfiere y que es proporcional a la velocidad **V**.

 Difusiva: En un flujo molecular, la dinámica del flujo es determinada por el comportamiento de las moléculas, por ejemplo la temperatura del fluido incrementa debido al aumento de velocidad de las moléculas dentro del fluido o la viscosidad incrementa debido a la estructura molecular del fluido (R. Byron Bird, Warren E. Stewart, 2002, página 11). Un flujo difusivo j_{diff} puede expresarse como:

$$\mathbf{j}_{\text{diff}} = -D\nabla c \tag{2.3}$$

Esta última ecuación es llamada la *Ley de Ficks*, que establece que el flujo es proporcional al gradiente de concentración ∇c y D es una constante.

Convectiva: La dinámica del flujo es global, es el movimiento de un conjunto de moléculas, el movimiento del fluido como un todo (R. Byron Bird, Warren E. Stewart, 2002, página 34), es decir que las propiedades que transfiere el fluido no dependen del movimiento interno de las moléculas, por ejemplo la masa se transfiere a través de una tubería independientemente de la velocidad que tengan las moléculas internamente, puede ser

de orden laminar o turbulento. La Ecuación de Convección-Difusión se escribe como:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{V}c) + R \tag{2.4}$$

Donde $\nabla \cdot (D\nabla c)$ es el término difusivo, $\nabla \cdot (\mathbf{V}c)$ es el término advectivo y R representa las fuentes de origen de la propiedad c.

Para el correcto uso de técnicas CFD se necesita tener un entendimiento perfecto del modelo físico propuesto hasta el momento para un fluido en movimiento. Se estudiará toda la terminología técnica en Mecánica de fluidos aplicada a flujos internos, que es en esencia el problema a resolver en este proyecto de investigación. Sobre esto se puede leer en el libro de Zikanov (2010):

"...Dos factores clave que contribuyen al éxito en la aplicación de dichos códigos: (1) Comprensión de los aspectos físicos y de ingeniería del proceso analizado; y (2) Capacidad para realizar el análisis CFD correctamente, de una manera que garantice un análisis preciso y una solución eficiente..." (Zikanov, 2010, página xv). Primero se definirá los conceptos de fluido, densidad y viscosidad.

2.2 Fundamentos de la Dinámica de fluidos usados en CFD

Un *fluido* se define como una sustancia que cambia su forma continuamente siempre que esté sometida a un esfuerzo cortante, sin importar que tan pequeño sea (Shames, 1996, página 3). Los fluidos son denominados **incompresibles** cuando su densidad es constante, por ejemplo los líquidos. Cuando la densidad no es constante, los fluidos son denominados **compresibles**, como ser los gases (R. Byron Bird, Warren E. Stewart, 2002, página 19). A partir de este concepto nace lo que se conoce como la *ley de viscosidad de Newton*, que se explica a continuación.

Dentro de las propiedades macroscópicas de los fluidos se tiene la densidad ρ y la viscosidad μ , donde la viscosidad es el efecto indirecto de las moléculas o estructura interna del fluido a causa de su movimiento, estas fuerzas internas son llamadas fuerzas inerciales (Ferziger y col., 2002, página 1). La viscosidad se define como la proporción entre los esfuerzos cortantes superficiales y la tasa de deformación que experimenta el fluido durante su movimiento (C. Pozrikidis, 2017, página 211).

Un flujo bien ordenado (también llamado *fluido newtoniano*) es aquel cuyas partículas se mueven en líneas rectas paralelas y el esfuerzo cortante τ sobre una interfaz tangente a la dirección del flujo es proporcional a la tasa de cambio de la velocidad con respecto a la distancia, donde la diferenciación se toma en una dirección normal a la interfaz (Shames, 1996, página 10). Esto se establece matemáticamente como:

$$au \propto \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n}$$
 (2.5)

Donde τ es el esfuerzo cortante, $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n}$ es la derivada direccional de la velocidad \mathbf{V} con respecto al vector normal a la interfaz $\hat{\mathbf{n}}$. Con esta expresión se introduce la siguiente constante de proporcionalidad μ , que se conoce como **coeficiente de viscosidad**, el cual puede obtenerse de forma experimental. dejando la expresión (2.5) como sigue:

$$\tau = \mu \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n} \tag{2.6}$$

La ecuación (2.6) es la ley de viscosidad de Newton para un flujo unidimensional. Existe una ley de viscosidad más general llamada la **ley de viscosidad de Stokes** (Shames, 1996, página 398) que se aplica a fluidos newtonianos considerablemente más generales, la cual converge a la ley mostrada en (2.6) cuando el flujo es paralelo en una dimensión. Las siguientes ecuaciones se cumplen para cualquier fluido newtoniano:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= -p + C_{11}\dot{\epsilon_{xx}} + C_{12}\dot{\epsilon_{yy}} + C_{13}\dot{\epsilon_{zz}} + C_{14}\dot{\epsilon_{xy}} + C_{15}\dot{\epsilon_{yz}} + C_{16}\dot{\epsilon_{xz}} \\ \tau_{yy} &= -p + C_{21}\dot{\epsilon_{xx}} + C_{22}\dot{\epsilon_{yy}} + C_{23}\dot{\epsilon_{zz}} + C_{24}\dot{\epsilon_{xy}} + C_{25}\dot{\epsilon_{yz}} + C_{26}\dot{\epsilon_{xz}} \\ \tau_{zz} &= -p + C_{31}\dot{\epsilon_{xx}} + C_{32}\dot{\epsilon_{yy}} + C_{33}\dot{\epsilon_{zz}} + C_{34}\dot{\epsilon_{xy}} + C_{35}\dot{\epsilon_{yz}} + C_{36}\dot{\epsilon_{xz}} \\ \tau_{xy} &= C_{41}\dot{\epsilon_{xx}} + C_{42}\dot{\epsilon_{yy}} + C_{43}\dot{\epsilon_{zz}} + C_{44}\dot{\epsilon_{xy}} + C_{45}\dot{\epsilon_{yz}} + C_{46}\dot{\epsilon_{xz}} \\ \tau_{yz} &= C_{51}\dot{\epsilon_{xx}} + C_{52}\dot{\epsilon_{yy}} + C_{53}\dot{\epsilon_{zz}} + C_{54}\dot{\epsilon_{xy}} + C_{55}\dot{\epsilon_{yz}} + C_{56}\dot{\epsilon_{xz}} \\ \tau_{xz} &= C_{31}\dot{\epsilon_{xx}} + C_{32}\dot{\epsilon_{yy}} + C_{33}\dot{\epsilon_{zz}} + C_{34}\dot{\epsilon_{xy}} + C_{35}\dot{\epsilon_{yz}} + C_{36}\dot{\epsilon_{xz}} \end{aligned}$$

Donde p es la presión, τ_{xx} , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yy} , τ_{yz} , τ_{zz} , τ_{zx} , τ_{zy} , son los esfuerzos cortantes en la superficie del fluido, ϵ_{ij} son las deformaciones en la superficie del fluido, y C_{ij} son los coeficientes de viscosidad. El sistema de ecuaciones (2.7) se puede simplificar para un fluido **isotrópico**, es decir, que el fluido no tiene una preferencia en la dirección del flujo, es decir, que se comporta igual en todas las direcciones (Shames, 1996, páginas 400-403). Usando notación vectorial se puede escribir (2.7) de la siguiente manera:

$$\tau_{xx} = \mu \left(2 \frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) - p$$

$$\tau_{yy} = \mu \left(2 \frac{\partial \mathbf{V}_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) - p$$

$$\tau_{zz} = \mu \left(2 \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) - p$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{V}_y}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial \mathbf{V}_y}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial y} \right)$$

(2.8)

Según Shames (1996, página 403), las ecuaciones (2.8) representan en general para un fluido isotrópico la *Ley de viscosidad de Stokes*. Este resultado será de mucha importancia en el planteamiento de las ecuaciones de Navier-Stokes. Para terminar, la forma más general posible en notación de índice para La Ley de viscosidad de Newton, según (R. Byron Bird, Warren E. Stewart, 2002, página 18) es:

$$\boldsymbol{\tau}_{ij} = -\mu \left(\frac{\partial \mathbf{V}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial x_j} \right) + (\mu' - \kappa) \left(\frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial z} \right) \delta_{ij}$$
(2.9)

Donde μ' es la viscosidad debido al cambio de volumen y κ es la viscosidad dilatacional. La siguiente figura 2.2, muestra los esfuerzos viscosos generados debido a la interacción de la estructura interna del fluido con las fuerzas externas.



Figure 2.2. Ilustración de los esfuerzos axiales (a) y cortantes (b) sobre un volumen de control (Blazek, 2015, página 14)
2.3 Modelado de campos en el análisis de flujo con CFD

Parte del análisis de flujos con técnicas CFD involucra la descripción de los campos de velocidad $\mathbf{V}(x, y, z, t)$, densidad $\boldsymbol{\rho}(x, y, z, t)$, presión $\mathbf{p}(x, y, z, t)$ y temperatura $\Gamma(x, y, z, t)$, todos ellos en términos del sistema de coordenadas y el tiempo (Malalasekera, H K Versteeg, 2007, página 10). El modelado de estos campos surge de aplicar los principios de conservación. Sobre la importancia de los campos en el CFD se puede leer en el libro de Zikanov (2010) lo siguiente:

"... el análisis se centra en propiedades distribuidas. Tratamos de determinar campos completos como temperatura $\Gamma(x, y, z, t)$, velocidad V(x, y, z, t), densidad $\rho(x, y, z, t)$, incluso cuando una característica integral, como el coeficiente de fricción o la tasa neta de transferencia de calor, sea el objetivo final del análisis, esto se deriva de los campos distribuidos..." (Zikanov, 2010, página 1)

De los campos mencionados anteriormente, el más importante en el análisis de flujos es el **campo de velocidades**, donde se definen las componentes de velocidad en términos de las coordenadas espaciales y el tiempo para describir el movimiento de las moléculas/partículas dentro de un fluido al igual que en la Mecánica clásica, como puede verse en el libro de Shames (1996, página 107) y C. Pozrikidis (2017, página 6):

$$V_x = f(x, y, z, t)$$

$$V_y = g(x, y, z, t)$$

$$V_z = h(x, y, z, t)$$
(2.10)

Para ilustrarlo se usará la siguiente figura:



Figure 2.3. El enfoque de volumen de control y una línea de campo de velocidad (John D. Anderson, 1995, página 41)

Donde V_x, V_y, V_z son las componentes de velocidad del campo en coordenadas cartesianas. Si las propiedades y características del flujo en cada punto del espacio permanecen invariables en el tiempo, el flujo se conoce como *flujo permanente*, de lo contrario, es decir, si el flujo es dependiente del tiempo, entonces se dice que es un *flujo no permanente* (Shames, 1996, página 107 a la 110), las ecuaciones (2.10) se pueden representar como:

$$V_x = f(x, y, z)$$

$$V_y = g(x, y, z)$$

$$V_z = h(x, y, z)$$
(2.11)

Existen dos puntos de vista en el cual se puede abordar un problema de flujos, el punto de vista *euleriano*, es decir, cuando se fija para una posición en el espacio en cualquier tiempo el vector velocidad para una partícula dentro del fluido, es decir:

$$\mathbf{V} = (f(x_1, y_1, z_1, t), g(x_1, y_1, z_1, t), h(x_1, y_1, z_1, t))$$
(2.12)

Según Graebel (2007, página 4) a esto se le conoce como una *descripción espacial* del fluido y el punto de vista *lagrangiano* que es donde las componentes de velocidad de la partícula se conocen en cualquier instante de tiempo, se puede expresar la velocidad como:

$$\mathbf{V} = (f[x(t), y(t), z(t), t], g[x(t), y(t), z(t), t], h[x(t), y(t), z(t), t])$$
(2.13)

la siguiente figura ilustra la ecuación 2.13:



Figure 2.4. Línea de campo de velocidades (John D. Anderson, 1995, página 43)

Segun Graebel (2007, página 4) a este formalismo se le conoce como la descripción material del fluido. Ahora se definirá la aceleración en un campo de velocidades para una partícula dentro de un fluido, esto se hará haciendo uso de la derivada material o sustancial $\frac{D}{Dt}$, este operador queda definido así:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \tag{2.14}$$

Donde V es la velocidad para la partícula, se puede escribir la aceleración $\tilde{\mathbf{a}}$ más explícitamente como sigue:

$$\mathbf{a} = \frac{D}{Dt}\mathbf{V}(x, y, z, t) = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V}_x \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{V}_y \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + \mathbf{V}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}$$
(2.15)

Donde la derivada parcial temporal $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$ es llamada *aceleración temporal* y la derivada parcial espacial $\mathbf{V}_x \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{V}_y \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + \mathbf{V}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}$ es llamada *aceleración convectiva* (Graebel, 2007, página 4).

Por útimo se define el concepto de flujo *irrotacional*, para ello se define primero el concepto de vector *vorticidad* $\boldsymbol{\omega}$ que está definido como sigue:

$$\omega = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V} \tag{2.16}$$

Donde ω es conocido como el vector de vorticidad. Cuando este vector es cero, entonces el flujo carece de la existencia de vórtices, entonces se dice que es irrotacional, de lo contrario se dice que el flujo es *rotacional* (Shames, 1996, páginas 117-120). La ecuación (2.16) debe cumplir la siguiente propiedad:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}\right) = 0 \tag{2.17}$$

En su libro Shames (1996, página 119) explica que la vorticidad depende de el gradiente de velocidad y la viscosidad del fluido, por lo tanto los esfuerzos en lo que se llama *capa límite* definen si el comportamiento del flujo será rotacional o irrotacional, para estudiar este comportamiento del fluido, se calcula la derivada material del vector vorticidad, esto se expresa matemáticamente como:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\omega \tag{2.18}$$

Usando la siguiente identidad vectorial:

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} = \frac{1}{2} \left[\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) \right]$$
(2.19)

Se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\nabla (\mathbf{V} \cdot \omega) - \nabla \times (\mathbf{V} \times \omega) - \omega \times (\nabla \times \mathbf{V}) - \mathbf{V} \times (\nabla \times \omega) - \omega (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \mathbf{V} (\nabla \cdot \omega) \right] \quad (2.20)$$

A partir de la ecuaciones (2.17) y (2.16), se simplifica la ecuacion (2.20) en la siguiente expresión:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\nabla (\mathbf{V} \cdot \omega) - \nabla \times (\mathbf{V} \times \omega) - \mathbf{V} \times (\nabla \times \omega) - \omega (\nabla \cdot \mathbf{V}) \right]$$
(2.21)

Se pueden implementar identidades vectoriales para eliminar el producto cruz de algunos términos, como ser esta:

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$
(2.22)

Entonces queda como sigue:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{1}{2} [(\mathbf{V} \cdot \nabla)\omega + (\omega \cdot \nabla)\mathbf{V} + \mathbf{V} \times (\nabla \times \omega)
+ \omega \times (\nabla \times \mathbf{V}) - \nabla \times (\mathbf{V} \times \omega) - \mathbf{V} \times (\nabla \times \omega) - \omega(\nabla \cdot \mathbf{V})]$$
(2.23)

Reduciendo algunos términos queda lo siguiente:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{1}{2} [(\mathbf{V} \cdot \nabla)\omega + (\omega \cdot \nabla)\mathbf{V} - \nabla \times (\mathbf{V} \times \omega) - \omega(\nabla \cdot \mathbf{V})]$$
(2.24)

Usando la definición de la derivada material (2.18), se puede expresar de forma más compacta la ecuación anterior:

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\omega \cdot \nabla)\mathbf{V} + \left[\frac{\partial\omega}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{V} \times \omega) - \omega(\nabla \cdot \mathbf{V})\right]$$
(2.25)

Se puede usar la definición de vector vorticidad para simplificar aun más usando otras definiciones e

identidades:

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\omega \cdot \nabla)\mathbf{V} + \left[\frac{1}{2}\nabla \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \frac{1}{2}\nabla \times \left[\mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V})\right] - \frac{1}{2}(\nabla \cdot \mathbf{V})(\nabla \times \mathbf{V})\right]$$
(2.26)

De nuevo se utiliza la definición de la derivada material en la velocidad, para llegar a esto:

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\omega \cdot \nabla)\mathbf{V} + \left[\frac{1}{2}\nabla \times \frac{D\mathbf{V}}{Dt} - \frac{1}{2}\nabla \times (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} - \frac{1}{2}\nabla \times [\mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V})] - \frac{1}{2}(\nabla \cdot \mathbf{V})(\nabla \times \mathbf{V})\right]$$
(2.27)

Al utilizar la siguiente identidad:

$$\mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$$
(2.28)

Se obtiene lo siguiente:

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\omega \cdot \nabla)\mathbf{V} + \frac{1}{2}\nabla \times \frac{D\mathbf{V}}{Dt} - \frac{1}{2}\nabla \times (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} - \frac{1}{2}\nabla \times [\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) - (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}] - \frac{1}{2}(\nabla \cdot \mathbf{V})(\nabla \times \mathbf{V})$$
(2.29)

Recordando que el rotacional del gradiente de un escalar es cero, es decir:

$$\nabla \times \nabla \left(\frac{1}{2}\nabla (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})\right) = 0 \tag{2.30}$$

Se llega al resultado deseado. Por consiguiente, se puede ahora simplificar de esta manera;

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\omega \cdot \nabla)\mathbf{V} + \left[\frac{1}{2}\nabla \times \frac{D\mathbf{V}}{Dt} - \frac{1}{2}(\nabla \cdot \mathbf{V})(\nabla \times \mathbf{V})\right]$$
(2.31)

Por último, se aplican los *principios de conservación* para el caso de un flujo incompresible, estos principios se estudiarán con más detalle más adelante. Asumiendo que la densidad es constante, entre otras cosas, se llega a la ecuación siguiente:

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\omega \cdot \nabla)\mathbf{V} + \left[\frac{\mu}{2\rho}\nabla \times \nabla^2 \mathbf{V}\right]$$
(2.32)

Esta identidad para el operador laplaciano permite llegar al resultado esperado:

$$\nabla^{2}(\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla \times (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})) = \nabla \times (\nabla^{2} \mathbf{A})$$
(2.33)

Usando la definición de vector vorticidad (2.16) junto con la identidad anterior (2.33), se obtiene esta ecuación:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\boldsymbol{\omega}$$
(2.34)

La última ecuación (2.34) es conocida como la *ecuación de vorticidad* cuando la densidad (ρ) es constante, una expresión más general puede ser obtenida a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes (Graebel, 2007, página 34).

Según Graebel (2007) el vector vorticidad debe considerarse como una ecuación constitutiva a pesar de su comportamiento irregular e inesperado en algunas situaciones (sobre leyes secundarias o constitutivas se entrará en más detalle luego) así como las tasas de deformación (2.8), el menciona en su libro lo siguiente:

"...Lo que se ha llamado el "principio de objetividad material" o "principio de isotropía del espacio" o "indiferencia del marco material", entre otras cosas, establece que todos los observadores, independientemente de su marco de referencia (inercial o de otro tipo), debe observar el mismo comportamiento material. Por lo tanto, un observador estacionado en una plataforma, por ejemplo, ve el mismo comportamiento del fluido que un observador parado en el suelo del laboratorio..., la vorticidad no es satisfactoria en este caso, considerando que es sensible a rotaciones rígidas..." (Graebel, 2007, página 31)

Ahora se pasará a explicar lo que son las leyes de conservación y leyes constitutivas. Estos principios son los pilares fundamentales para la Mecánica de medios continuos, estos principios son la base para el uso de técnicas CFD.

2.4 Principios de conservación usados en CFD

Para deducir los campos o propiedades distribuidas de los flujos, se necesita usar los principios de conservación o *las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido* (Malalasekera, H K Versteeg, 2007). En aplicaciones a la Ingeniería, se deben satisfacer cuatro **leyes básicas** (*"Governing Equations"* en inglés) para cualquier medio continuo y estas son:

- Conservación de la materia (ecuación de continuidad)
- Segunda ley de Newton (conservación del momentum lineal)
- Conservación de la energía (primera ley de la Termodinámica)
- Segunda ley de la Termodinámica

Además de estas leyes generales existen numerosas **leyes secundarias** llamadas **relaciones constitutivas**, que se aplican a tipos de medios específicos (Shames, 1996, página 120), un ejemplo de estas leyes es la ecuación (2.17), que debe cumplirse para un flujo rotacional. Al emplear las leyes básicas y secundarias, pueden adoptarse cualesquiera de los siguientes modos de aplicación:

- Las actividades de todas y cada una de las masas deben ser tales que se satisfagan las leyes básicas y las leyes secundarias pertinentes. Este enfoque es conocido como el *enfoque de sistema* (Shames, 1996, página 120). También se le conoce como *control de masa* y se centra en cuantificar las propiedades extensivas del sistema como ser la masa, momentum lineal y energía. Este enfoque es usual encontrarlo aplicado a sólidos (Ferziger y col., 2002, página 3).
- 2. Las actividades de todos y cada uno de los volúmenes en el espacio deben ser tales que se satisfagan las leyes básicas y las leyes secundarias pertinentes. Este enfoque es



Figure 2.5. El enfoque de volumen de control y la superficie de control en el modelado de un fluido (Blazek, 2015, página 6 y 10)

conocido como el *enfoque de volumen de control* (Shames, 1996, página 120). En un fluido es mucho más fácil trabajar con un volumen de control, no es nada fácil seguir un elemento de masa en un fluido en movimiento (Ferziger y col., 2002, página 3).

En el primer enfoque, la masa del sistema queda inalterada, el volumen puede cambiar. En el segundo enfoque el volumen permanece inalterado, pero la masa involucrada en el flujo podría cambiar con el tiempo, existe lo que llamamos una *superficie de control* que es como la frontera del flujo que se estudia, esto se puede apreciar en la figura 2.5.

El punto de vista *lagrangiano* está asociado al enfoque de sistema cuando se decide seguir al agregado en sí (masa de control). El punto de vista *euleriano* se asocia al volumen de control cuando se centra la atención en una región finita (superficie de control). Las ecuaciones de conservación para un fluido se deducen usando un volúmen de control, que consiste en un elemento infinitesimal de volúmen lo suficientemente grande para contener una gran cantidad de partículas, John D. Anderson (1995) menciona en su libro:

"...Los principios físicos fundamentales se aplican al fluido dentro del volumen de control y al fluido que atraviesa la superficie de control.(si el volumen de control está fijo en el espacio)..." (John D. Anderson, 1995, páginas 40 a la 42) La relación que existe entre un enfoque y el otro se define en la *ecuación del transporte de Reynolds* (Shames, 1996, página 126):

$$\frac{DN}{Dt} = \iint_{sc} \eta(\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \eta \rho \cdot dv$$
(2.35)

Donde N se define como la propiedad extensiva a estudiar (masa, momentum lineal ó energía por ejemplo), η representa una *cantidad específica* que mide la relación que existe entre propiedades *extensivas* e *intensivas* (o distribuidas, es decir, los campos asociados al flujo: presión, densidad, temperatura y velocidad).

De las cuatro leyes básicas, son tres los principios más usados en CFD para flujos incompresibles, *la segunda ley de la Termodinámica* tiene su aplicación en flujos de transferencia de calor en máquinas térmicas ó procesos de enfriamiento, los cuales no se abordarán en profundidad de ninguna manera en esta investigación, solo se hará mención de situaciones parecidas como referencia de algún método utilizado en estos procesos que pueda aplicarse al objeto de estudio propuesto. Se estudiará en detalle el principio de conservación de masa, el principio de conservación de momentum Lineal y el principio de conservación de energía.



Figure 2.6. Ilustración de un enfoque euleriano y un enfoque lagrangiano (John D. Anderson, 1995, página 43)

2.4.1 Ecuación de continuidad

Para describir el principio de conservación de masa usando el enfoque de volumen de control, se usará la ecuación de transporte de Reynolds (2.35), al ser la masa constante (**M**) y η sería la densidad (ρ) en este caso, la ecuación toma la siguiente forma:

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \iint_{sc} \rho(\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \rho(\rho \cdot dv) = 0$$
(2.36)

Despejando el segundo término en (2.36) se obtiene lo que se conoce como la ecuación de continuidad:

$$\iint_{sc} (\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}) = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \rho \cdot dv$$
(2.37)

En su forma diferencial, la ecuación (2.37) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{2.38}$$

Otra forma en la que se puede escribir la ecuación de continuidad es usando el *convenio de suma* de Einstein ó notación de índice, entonces se tendría la ecuación (2.38) como sigue:

$$\frac{\partial \left(\rho \mathbf{V}_{i}\right)}{\partial x_{i}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{2.39}$$

Para ilustrar mejor la deducción de la ecuación de continuidad, véase la figura 2.7:



Figure 2.7. Elemento infinitesimal de volumen que ilustra la conservación de masa y de flujo en todas las direcciones (John D. Anderson, 1995, página 54)

2.4.2 Ecuación de la conservación del momentum lineal

Ahora se pasará a analizar el *momentum lineal* \mathbf{P} en un sistema finito, partiendo de la Ley de Newton para fuerzas resultantes, en un fluido se puede definir de la siguiente manera:

$$\mathbf{F}_{r} = \frac{d}{dt} \iiint_{M} \mathbf{V} dm = \frac{D\mathbf{P}}{Dt}$$
(2.40)

La fuerza resultante, denotada como \mathbf{F}_r , es la suma de las *fuerzas de tracción* que ocurren fuera de la frontera del sistema más las *fuerzas de cuerpo* que ocurren dentro de la frontera del sistema que se denotan como $\mathbf{T}(x, y, z, t)$ y $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ respectivamente, con esto la ecuación del momentum lineal para sistemas finitos es la que sigue:

$$\iint_{S} \mathbf{T} dA + \iiint_{V} \mathbf{B} \rho dv = \frac{D\mathbf{P}}{Dt}$$
(2.41)

Para el enfoque de volumen de control, se usará otra vez la ecuación de transporte de Reynolds:

$$\frac{D\mathbf{P}}{Dt} = \iint_{sc} \mathbf{V}(\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \mathbf{V}(\rho dv)$$
(2.42)

Donde η es ahora la velocidad (V). Tanto la ecuación (8) como la ecuación (9) son equivalentes. Se igualan para obtener la ecuación de momentum lineal de un fluido

$$\iint_{S} \mathbf{T} dA + \iiint_{V} \mathbf{B} \rho dv = \iint_{sc} \mathbf{V}(\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \mathbf{V}(\rho dv)$$
(2.43)

La ecuación (2.43) puede escribirse en dos formas, dependiendo si el fluido es viscoso o no viscoso. Una forma diferencial muy conocidad sobre la fuerza resultante en un fluido es la *La ecuación de Euler*:

$$\mathbf{dF} = \frac{D}{Dt}(dm\mathbf{V}) = dm\left(\mathbf{V}_x \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{V}_y \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + \mathbf{V}_z \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\right)$$
(2.44)

Esta ecuación se cumple solo cuando el fluido tiene como fuerza superficial una presión y

como fuerza de cuerpo la gravedad (Es decir, cuando se estudia un fluido no viscoso). En su forma diferencial se podría escribir como:

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p - g\nabla z = (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} + \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}$$
(2.45)

Para flujos viscosos, es decir, cuando existen fuerzas superficiales, al tomar un elemento infinitesimal de volumen con forma de un paralelepípedo rectangular y aplicar la ley de Newton sobre fuerzas, se puede encontrar las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho B_x = \rho \frac{DV_x}{Dt}$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho B_y = \rho \frac{DV_y}{Dt}$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho B_z = \rho \frac{DV_z}{Dt}$$
(2.46)

Para ilustrar mejor las ecuaciones 2.46, véase la figura 2.8:



Figure 2.8. La suma de fuerzas axiales debido a los esfuerzos viscosos del fluido generan el tensor de esfuerzos en la ecuación de conservación de momentum (John D. Anderson, 1995, página 61)

Estas ecuaciones definen la fuerza resultante de un fluido viscoso. En su forma diferencial, las ecuaciones (2.46) se pueden escribir de forma más compacta como:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{B} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \tag{2.47}$$

Donde τ es el tensor de esfuerzos superficiales. Una forma simplificada y útil de esta útima ecuación es la siguiente, está escrita en notación de índice:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho \mathbf{B}_i = \rho \frac{D \mathbf{V}_i}{Dt} \tag{2.48}$$

Donde $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$ son las componentes de los esfuerzos cortantes denotados por el tensor τ de esfuerzos superficiales, \mathbf{B}_i es la componente de las fuerzas de cuerpo y $\frac{D\mathbf{V}_i}{Dt}$ es la componente de la derivada material dé \mathbf{V} . Según Ferziger y col. (2002, páginas 5 a la 7) una forma más general de la ecuación de conservación de momentum lineal es:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{B}$$
(2.49)

Donde $\rho \mathbf{V} \mathbf{V}$ es el producto diádico de $\rho \mathbf{V}$ con \mathbf{V} , que es otra forma de escribir $(\rho \mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + [\nabla \cdot (\rho \mathbf{V})] \mathbf{V}$, entonces:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) = (\rho \mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + [\nabla \cdot (\rho \mathbf{V})] \mathbf{V}$$

= $(\rho \mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + [(\nabla \rho) \cdot \mathbf{V} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{V})] \mathbf{V}$ (2.50)

Esto puede probarse usando la ecuación de transporte de Reynolds, usando notación de índice y teoremas de integración se tiene:

$$\frac{D\mathbf{P}}{Dt} = \iint_{sc} \mathbf{V}(\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \mathbf{V}(\rho dv)
= \iint_{sc} \mathbf{V}_i(\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \mathbf{V}_i(\rho dv)
= \iiint_{vc} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \mathbf{V}_i \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}_i) \right] dv
= \iiint_{vc} \left[\nabla \cdot (\rho \mathbf{VV}) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}) \right] dv$$
(2.51)

De la misma manera para el lado izquierdo de la ecuación (2.43), se usa el teorema de la

divergencia de Gauss:

$$\frac{D\mathbf{P}}{Dt} = \iint_{S} \mathbf{T} dA + \iiint_{V} \mathbf{B} \rho dv$$

$$= \iint_{S} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dA + \iiint_{V} \mathbf{B} \rho dv$$

$$= \iint_{S} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{dA} + \iiint_{V} \mathbf{B} \rho dv$$

$$= \iiint_{vc} [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{B}] dv$$
(2.52)

Donde τ es el tensor de esfuerzos para un fluido Newtoniano [Ver las ecuaciones (2.8), τ es la forma tensorial de (2.8)], este está definido como sigue:

$$\boldsymbol{\tau} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathbf{V}\right)\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}$$
(2.53)

En donde \mathbf{I} es el tensor identidad y \mathbf{D} es el tensor de la tasa de deformación de esfuerzos que se escribe como:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left[\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T \right]$$
(2.54)

Donde $\nabla \mathbf{V}$ es el gradiente de deformaciones y se define como:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{V}_{x}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{V}_{y}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{V}_{z}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{V}_{x}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{V}_{y}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{V}_{z}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{V}_{x}}{\partial z} & \frac{\partial \mathbf{V}_{y}}{\partial z} & \frac{\partial \mathbf{V}_{z}}{\partial z} \end{pmatrix}$$
(2.55)

Por consiguiente, la ecuación (2.49) en notación de índice tiene la siguiente forma:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{V}_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}_i \mathbf{V}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_i + \rho \mathbf{B}_i$$
(2.56)

Donde $\boldsymbol{\tau}_i$ se expresa como:

$$\boldsymbol{\tau}_{i} = \mu \nabla \mathbf{V}_{i} + \mu \left(\nabla \mathbf{V} \right)^{T} \cdot \mathbf{e}_{i} - \left(p + \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \mathbf{e}_{i}$$
(2.57)

La última ecuación (2.49), es la forma general para La ecuación de momentum lineal para un fluido isotrópico de la cual cuando $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, el gradiente de la densidad es cero, es decir, $\nabla \rho = 0$ y la presión es nula, es decir p = 0, entonces la ecuación (2.49) se simplifica a la ecuación (2.47) para un fluido viscoso. De la ecuación (2.49) nace la forma general para las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido isotrópico.

2.4.3 Ecuación de la conservación de energía

Según Shames (1996, páginas 203 a la 207), se puede definir la primera ley de la Termodinámica como sigue:

"...La primera ley de la Termodinámica es un planteamiento basado en la experiencia macroscópica que establece que la energía se conserva en todo momento..."

En el caso de Malalasekera, H K Versteeg (2007), la primera ley de la Termodinámica establece lo siguiente:

"...La ecuación de energía se deriva de la primera ley de la termodinámica, que establece que la tasa de cambio de energía de una partícula de un fluido es igual a la tasa de adición de calor a la partícula de un fluido más la tasa de trabajo realizado en la partícula..." (Malalasekera, H K Versteeg, 2007, páginas 16 a la 20)

Matemáticamente esto se escribe como:

$$\frac{D\mathbf{E}}{Dt} = \frac{d\mathbf{Q}}{dt} - \frac{d\mathbf{W}_k}{dt}$$
(2.58)

Donde **E** es la Energía total del sistema, **Q** representa la energía calorífica, y \mathbf{W}_k representa la energía por trabajo. Usando un análisis de volumen de control, se usará la ecuación de transporte de Reynolds 2.35 para relacionar la energía (propiedad extensiva) con los campos asociados al flujo (propiedades intensivas), en este caso η es **e**, que representa la energía almacenada por unidad de masa. La ecuación de Reynolds queda como:

$$\frac{D\mathbf{E}}{Dt} = \iint_{sc} e(\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} e(\rho \cdot dv)$$
(2.59)

Usando la primera ley de la Termodinámica, el lado izquierdo de la ecuación (2.59) queda de esta manera:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} - \frac{d\mathbf{W}_k}{dt} = \iint_{sc} e(\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} e(\rho \cdot dv)$$
(2.60)

Ahora, para un elemento infinitesimal de volumen, se calcula la energía almacenada e por unidad masa en el volumen de control. Esta energía almacenada consta de tres partes a) la energía cinética, b) la energía potencial y c) la energía interna, por lo tanto, e se puede escribir como:

$$e = \frac{v^2}{2} + gz + u \tag{2.61}$$

También $\frac{d\mathbf{W}_k}{dt}$ que da redefinido para las fuerzas \mathbf{T} de superficie y \mathbf{B} de cuerpo, que dando esto:

$$\frac{d\mathbf{W}_k}{dt} = \frac{d\mathbf{W}_s}{dt} - \left(\iint_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{V} dA + \iiint_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} \rho dv\right)$$
(2.62)

Sustituyendo todo en la ecuación (2.60), se obtiene la forma integral de la ecuación general para la conservación de energía:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} - \frac{d\mathbf{W}_s}{dt} + \iint_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{V} dA + \iiint_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} \rho dv$$

$$= \iint_{sc} \left(\frac{v^2}{2} + gz + u \right) \left(\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{dA} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \left(\frac{v^2}{2} + gz + u \right) \left(\rho \cdot dv \right)$$
(2.63)

Según Zikanov (2010, página 19), la ecuación (2.63) se puede expresar en su forma diferencial como sigue:

$$\rho \frac{D\mathbf{e}}{Dt} = \dot{\mathbf{Q}} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{V})$$
(2.64)

Donde σ es el esfuerzo superficial (también llamada presión superficial o normal a la superficie de control) y es $\sigma = -p\mathbf{I} + \tau$. Para llegar a la forma diferencial (2.64), se usa el teorema de divergencia de Gauss en la ecuación de transporte de Reynolds:

$$\frac{D\mathbf{E}}{Dt} = \iint_{sc} e(\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} e(\rho \cdot dv)
= \iiint_{vc} \nabla \cdot (e\rho \mathbf{V}) dv + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} e(\rho dv)
= \iiint_{vc} \left[\nabla \cdot (e\rho \mathbf{V}) + \frac{\partial e\rho}{\partial t} \right] dv$$

$$= \iiint_{vc} \left[\nabla e \cdot (\rho \mathbf{V}) + e(\nabla \cdot \rho \mathbf{V}) + \frac{\partial e}{\partial t} \rho + e \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dv$$

$$= \iiint_{vc} \left[e \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} \right) + \rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) e \right) \right] dv$$
(2.65)

Se procede a usar la ecuación de continuidad y la definición de la derivada material:

$$\frac{D\mathbf{E}}{Dt} = \iiint_{vc} \rho \frac{De}{Dt} dv \tag{2.66}$$

Al igual que en la ecuación (2.59), se usa otra vez el *teorema de la divergencia de Gauss* para las integrales en lado izquierdo de la ecuación (2.63), esto según Shames (1996, página 207):

$$\iiint_{vc} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{V}) dv = \iint_{sc} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{V} \cdot \mathbf{dA} = \iint_{sc} \mathbf{T} \cdot \mathbf{V} dA$$
(2.67)

Otra vez de la misma forma, también el término $\frac{d\mathbf{Q}}{dt} - \frac{d\mathbf{W}_s}{dt}$ se convierte en una integral de la siguiente manera:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} - \frac{d\mathbf{W}_s}{dt} = \iint_{sc} \dot{\mathbf{Q}}_T \cdot \mathbf{dA} = \iiint_{vc} \nabla \cdot \dot{\mathbf{Q}}_T dv$$
(2.68)

Usando la ecuación de calor se puede simplificar como sigue:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \rho C_{\rho} \frac{D\Gamma_{in}}{Dt} = \kappa \nabla^2 \Gamma_{in} \tag{2.69}$$

Al usar este resultado se deduce los términos que aparecen en la ecuación (2.64):

$$\dot{\mathbf{Q}}_{T} = \kappa \nabla \Gamma_{in} - \mathbf{q}$$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{T} = \nabla \cdot (\kappa \nabla \Gamma_{in}) - \nabla \cdot \mathbf{q}$$

$$= \kappa \nabla^{2} \Gamma_{in} - \nabla \cdot \mathbf{q}$$

$$= \dot{\mathbf{Q}} - \nabla \cdot \mathbf{q}$$
(2.70)

El término $-\nabla \cdot \mathbf{q}$ representa la energía debido al flujo de calor que sale por conducción. Esta parte de la ecuación se puede escribir como:

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} = -\kappa \nabla^2 \Gamma_{out} \tag{2.71}$$

El término $\dot{\mathbf{Q}}$ es calor generado por el flujo debido a la fricción u otras circunstancias, Γ es el campo de temperaturas en el flujo y κ es la *constante de conductividad*, a la ecuación (2.71) se le conoce

como *ley de conducción de Fourier* (Zikanov, 2010, página 20). También Fletcher (1998, página 10) ofrece una alternativa más compacta y general de la ecuación de conservación de energía, partiendo de la primera ley de la Termodinámica propone la siguiente forma integral:

$$\iiint_{vc} \rho \frac{D\mathbf{e}}{Dt} dv = \iiint_{vc} \rho \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} dv + \iint_{sc} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{V} - \dot{\mathbf{Q}}_T) \cdot \mathbf{dA}$$
(2.72)

Al usar el *teorema de la divergencia de Gauss* en la ecuación (2.72), se llega a la siguiente forma diferencial:

$$\rho \frac{D\mathbf{e}}{Dt} = \rho \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot (\sigma \mathbf{V}) - \nabla \cdot \dot{\mathbf{Q}_T}$$
(2.73)

Donde $\nabla \cdot \dot{\mathbf{Q}}_T = \nabla \cdot \mathbf{q} - \dot{\mathbf{Q}}$. Con esta parte se termina de examinar los principios de conservación. Ahora se pasará a definir lo que algunos llaman *similitud dinámica*, un concepto muy importante a la hora de analizar simulaciones con técnicas CFD, para ello se necesita entender primero los grupos adimensionales.



Figure 2.9. Ilustración del cambio de energía en un fluido (John D. Anderson, 1995, página 68)

Ecuaciones Gobernantes (Governing Equations)	
Principio de conservación	Ecuación
Ecuación de continuidad	$\nabla \cdot \rho \mathbf{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
Ecuación de conservación de momentum	$\frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{B}$
Ecuación de conservación de energía	$\rho \frac{D\mathbf{e}}{Dt} = \rho \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot (\sigma \mathbf{V}) - \nabla \cdot \dot{\mathbf{Q}}_T$

Cuadro 2.1 Principios de conservación

2.5 Análisis dimensional y adimensional de flujos con técnicas CFD

El *análisis dimensional* de flujos es el aspecto o cualidad medible de los flujos, las cantidades que permiten diferenciar un flujo de otro (Shames, 1996, Página 283). La Mecánica de los fluidos se ha desarrollado mucho a través del análisis dimensional y la experimentación, sobre esto Graebel (2007) menciona en su libro:

"...El desarrollo de la Mecánica de fluidos a lo largo de los años se ha basado tanto en la experimentación y el análisis dimensional, con el primero a la cabeza en muchos casos. Para expresar los datos en forma más útil, el análisis dimensional se utilizó ampliamente..."(Graebel, 2007, página 39)

En un experimento poder correlacionar muchas variables puede ser una tarea tediosa y extremadamente larga, por eso La Mecánica de los fluidos se apoya en el *análisis adimensional*, que consiste en crear dos grupos adimensionales para poder estudiar flujos de forma más práctica, esto con el fin de crear una relación funcional entre los dos grupos adimensionales que se llamarán π_1 y π_2 .

Para formar los grupos adimensionales, se debe utilizar el **teorema** π **de Buckingham**, Según Shames (1996), el teorema se puede enunciar como sigue: *el número de grupos adimensionales independientes que puede emplearse para describir un fenómeno en el que intervienen n variables es igual al número n* – *r*, *donde r usualmente es el número de dimensiones básicas necesarias para expresar las variables dimensionalmente.* (Shames, 1996, página 283)

Los grupos adimensionales más importantes en La Mecánica de fluidos son los siguientes mostrados en la tabla 2.2:

Números adimensionales	
Número adimensional	Ecuación
Número de Reynolds	$Re = \frac{\rho VD}{\mu}$
Número de Froude	$Fr = \frac{V^2}{Lg}$
Número de Mach	$M = \frac{V}{c}$
Número de Weber	$We = \frac{\rho V^2 L}{\sigma}$
Número de Euler	$Eu = \frac{\Delta p}{\rho V^2}$

Cuadro 2.2 Números adimensionales más comúnmente usados en Mecánica de fluidos

Estos números surgen de la aplicación del teorema π de Buckingham, todos ellos obtenidos en diferentes experimentos realizados en laboratorios de Mecánica de fluidos. Las variables que se relacionan en cada caso, se correlacionan dependiendo el tipo de flujo y situación, por ejemplo en Aerodinámica nos interesa más la velocidad del flujo con respecto a la velocidad del sonido.

Todos estos grupos adimensionales están formados por las siguientes variables:

- 1. Cambio en la presión (Δp)
- 2. Longitud (L)
- 3. Viscosidad (μ)
- 4. Tensión superficial (σ)

- 5. Velocidad del sonido (c)
- 6. Aceleración de la gravedad (g)
- 7. Densidad (ρ)
- 8. Velocidad (V)

De los grupos adimensionales mencionados anteriormente, solo uno en especial es de carácter importante para esta investigación y es el *número de Reynolds* (**Re**). Esta magnitud adimensional representa la relación entre las fuerzas inerciales y las fuerzas de fricción, usualmente en función de parámetros geométricos y de flujo conveniente, esta relación está matemáticamente definida como:

$$\frac{\rho V^2/L}{\mu V/L} = \frac{\rho V L}{\mu} \tag{2.74}$$

Los grupos adimensionales, como el número de Reynolds (**Re**), permiten encontrar *similitudes dinámicas*, es decir, que existe una relación conocida entre dos fenómenos (Shames, 1996, página 291). Existen *similitudes geométricas* que son flujos con fronteras geométricamente similares y *similitudes cinemáticas*.

Los flujos con líneas de corriente similar (campo de velocidades), es decir, con una similitud cinemática evidente, también son geométricamente similares, pero no necesariamente esto es cierto a la inversa, es decir que flujos con similitud geométrica sean también flujos con similitud cinemática. Según Shames (1996), en general para cualquier flujo, se puede establecer la siguiente proposición: *"El análisis dimensional proporcionará los grupos adimensionales en un flujo, para el cual deben duplicarse todos menos uno en flujos geométricamente similares con el fin de conseguir similitud dinámica."* (Shames, 1996, página 297)

Para analizar flujos con técnicas CFD se usa el análisis adimensional, esto se logra

expresando el modelo físico en parámetros adimensionales. Sobre esto Dillon, Emery, Cochran y Mescher (2010) expresan en su trabajo:

"...Esto es particularmente cierto en las áreas de mecánica de fluidos y transferencia de calor, donde la mayoría de las correlaciones experimentales son expresados en términos de grupos adimensionales y muchos análisis numéricos implican la solución de ecuaciones adimensionales...." (Dillon y col., 2010, páginas 1 y 2)

Además de esto, Dillon y col. (2010) menciona en su trabajo que existen muchas maneras de crear grupos adimensionales en problemas de flujos, en especial se menciona el caso para flujos de transferencia de calor por convección, en el artículo se puede leer lo siguiente:

"...Las diferentes elecciones conducen a diferentes técnicas de solución, particularmente para problemas altamente no lineales y para diferentes interpretaciones. Algunas no dimensionalizaciones son más apropiadas que otras..."(Dillon y col., 2010, páginas 1 y 2)

En el caso para el análisis de flujos en tuberías se maneja la relación entre los siguientes grupos adimensionales que son el *número de Euler* y el *número de Reynolds*. Esta relación se expresa matemáticamente como sigue:

$$\mathbf{Eu} = f\left(\mathbf{Re}, \frac{L}{D}, \frac{e}{D}\right) \tag{2.75}$$

El enfoque adaptativo para resolver problemas de flujos en tuberías debe ser tal que el modelo físico se exprese en términos de los grupos adimensionales mencionados anteriormente. Sobre el *número de Euler* (**Eu**), este mide la relación entre las fuerzas de presión y las fuerzas inerciales, esto se expresa matemáticamente como:

$$\frac{\Delta p/L}{\rho V^2/L} = \frac{\Delta p}{\rho V^2} \tag{2.76}$$

La ecuación (2.75) puede usarse para caracterizar la pérdida de presión en una tubería (Shames, 1996, página 329), más explícitamente esto se puede escribir como:

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = G\left(\frac{\rho VD}{\mu}, \frac{L}{D}, \frac{e}{D}\right)$$

$$\frac{\rho h_l}{\rho V^2} = \frac{L}{D} \cdot H\left(\frac{\rho VD}{\mu}, \frac{e}{D}\right)$$

$$h_l = \frac{V^2}{2} \cdot \frac{L}{D} \cdot \left[2 \cdot H\left(\frac{\rho VD}{\mu}, \frac{e}{D}\right)\right]$$

$$= \frac{V^2}{2} \cdot \frac{L}{D} \cdot f$$
(2.77)

Donde f es llamado el factor de fricción que depende del número de Reynolds (**Re**) y $\frac{e}{D}$ (la razón entre la rugosidad y el diámetro de la tubería), h_l es la pérdida de altura en una tubería. La ecuación (2.77) deducida es la llamada la fórmula de Darcy-Weisbach.

2.6 Análisis de flujos importantes para el uso de técnicas CFD

El análisis adimensional según Krantz (2007) es " un método sistemático para expresar una ecuación en un enunciado sin unidades o dimensionamiento". El escalamiento antes mencionado es utilizado en la Mecánica de fluidos para comparar, por ejemplo, la velocidad del flujo con respecto a la velocidad del sonido, para comparar flujos turbulentos y laminares.

Los flujos pueden clasificarse como flujos *externos*, que son flujos alrededor de cuerpos, y están los flujos *enternos*, que son aquellos flujos encerrados por una frontera (Shames, 1996, página 315). De estos conceptos nace lo que se conoce como **capa límite**. La capa límite es la región del fluido, donde por decirlo así, el fluido se pega a la frontera creando un esfuerzo cortante significativo, es decir que el fluido es altamente viscoso en esa región del flujo. El espesor de la capa límite dependerá de la viscosidad del fluido, si el espesor de la capa límite es tan grande como la sección transversal del flujo, entonces estamos hablando de un flujo interno altamente viscoso. Cuando la capa límite es muy delgada, entonces el fluido se comporta como un fluido no viscoso, donde los esfuerzos cortantes más importantes se presentarán en la frontera del fluido contenido.

Para caracterizar los flujos externos e internos se usa el *número de Reynolds* (**Re**), según el número de Reynolds los flujos pueden ser *laminares*, que es un flujo cuyas líneas de corriente son paralelas y bien ordenadas, por otro lado están los flujos *turbulentos*, que son flujos caóticos sin ningún orden o irregulares. Todo flujo por debajo de **Re** < 2300, se considera un flujo laminar. Cuando 2300 < **Re** < 40,000 se entra en una etapa de transición de flujo laminar a flujo turbulento, que dependiendo el tipo de flujo en cuestión, la turbulencia se manifestará en menor o mayor grado, esta transición iniciará una vez se alcance, lo que se conoce como **número de Reynolds crítico** (**Re**_c) es decir cuando **Re**_c = 2300.

Sobre la turbulencia y sus efectos en los diseños, Malalasekera, H K Versteeg (2007) menciona: "...Muchos, si no la mayoría, de los flujos de importancia para la ingeniería son turbulentos, por lo que el régimen de flujo turbulento no es solo de interés teórico. Los ingenieros de fluidos necesitan acceso a herramientas viables capaces de representar los efectos de las turbulencias... y a su modelado en CFD..." (Malalasekera, H K Versteeg, 2007, página 40)

Para el modelado correcto de la turbulencia con técnicas CFD se necesita entender como ocurre hasta cierto punto este fenómeno. A medida el número de Reynolds incrementa, el flujo experimenta ciertas etapas de transición. Según C. Pozrikidis (2017, página 670) el flujo pasa por las siguientes etapas:

- Vórtices: La aparición de los vórtices ("Eddies" en inglés) a través de la frontera de cada lámina del flujo debido a la difusión del campo de velocidad. Aparece un flujo rotacional que se acumula en ciertas regiones del flujo.
- Dinámica de los vórtices: Una vez que aparecen los vórtices en ciertas regiones del flujo, la interacción entre ellos crea un desorden e inestabilidad en el flujo.
- Inestabilidad: Una vez que el número de Reynolds alcanza el punto crítico, las pequeñas disturbaciones (Eddies) se amplifican causando que la estructura del flujo cambie local o completamente. Según Malalasekera, H K Versteeg (2007, páginas 40 a la 41), este proceso de amplificación de los Eddies es llamado energía en cascada.
- Transición a la turbulencia: Los distintos vórtices que han aparecido empiezan a superponerse el uno con el otro, causando un desorden a gran escala en el flujo. El flujo es turbulento completamente. A este proceso se le conoce como la descomposición de Reynolds (Malalasekera, H K Versteeg, 2007, páginas 40 a la 41).

El modelamiento matemático de la turbulencia consiste entonces en determinar las estructuras de flujo rotacional que van apareciendo a medida el flujo entra en la turbulencia. Las ecuaciones de Navier-Stokes son el punto de partida para este modelamiento, Graebel (2007) menciona al respecto: "...Dado que las ecuaciones de Navier-Stokes son válidas tanto para flujo laminar como para flujo turbulento, suelen servir como punto de partida general. Sin embargo, la complejidad y la riqueza de detalles de lo que ocurre en un flujo turbulento, limita nuestras habilidades para abordar completamente las ecuaciones de Navier-Stokes directamente...." (Graebel, 2007,

página 234)

Para el modelamiento se implementa lo que se llama **la escala Eddy** ("Eddy scale" en inglés). Sobre el dimensionamiento de los "Eddies", Malalasekera, H K Versteeg (2007) menciona:

"...Incluso en flujos donde las velocidades y presiones medias varían solo en una o dos dimensiones espaciales, las fluctuaciones turbulentas siempre tienen un carácter espacial tridimensional. Además, visualizaciones de flujos turbulentos revelan estructuras de flujo rotacional, los llamados remolinos turbulentos (Eddies), con una amplia gama de escalas de longitud..." (Malalasekera, H K Versteeg, 2007, página 41)

Una de las escalas más conocida es la escala(s) de Kolmogorov llevada(s) acabo en 1940 (Malalasekera, H K Versteeg, 2007, página 42). Estas escalas de movimiento de flujo turbulento caracterizaron el tamaño de los eddies más pequeños, basándose en la velocidad **V** y su tamaño η , esto se expresa de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_{\eta} = \frac{V\eta}{\mu} \tag{2.78}$$

Donde $\mathbf{R}\mathbf{e}_{\eta}$ es el Número de Reynolds para el eddy más pequeño posible para cierto η . Cuando las fuerzas por viscosidad y de Inercia son iguales en fuerza, entonces $\mathbf{R}\mathbf{e}_{\eta} = 1$. Usando análisis adimensional, se pueden establecer las siguientes razones de escala:

• Escala de longitud:

$$\frac{\eta}{l} \tag{2.79}$$

• Escala de tiempo:

$$\frac{\tau}{T} \tag{2.80}$$

• Escala de velocidad:

$$\frac{V}{\vartheta} \tag{2.81}$$

Hay grandes diferencias entre los *eddies grandes* y los *eddies pequeños*. Para los eddies grandes, su dimensionamiento depende de las razones de escala de longitud y velocidad, también cabe mencionar que su comportamiento no es isotrópico. En cambio, los eddies pequeños dependen de la tasa de energía disipada y su comportamiento es isotrópico (Malalasekera, H K Versteeg, 2007, páginas 40 a la 42).

Con esto se da por terminado el análisis de flujos internos, ahora se pasará a plantear las ecuaciones de Navier-Stokes para sus distintos casos, se revisará literatura reciente sobre trabajos acerca de los *enfoques adaptativos y modelos de turbulencia* más conocidos para las ecuaciones de Navier-Stokes que simulan flujos laminares y turbulentos.



Figure 2.10. Ilustración del cambio de energía en un flujo turbulento, creación de los vórtices en la medida aumenta el número de Reynolds

2.7 Ecuaciones de Navier-Stokes

Ahora se pasará a consolidar todo lo estudiado hasta este momento en lo que se conoce como *las ecuaciones de Navier-Stokes*. Acerca de estas ecuaciones Laurendeau and F Kafyeke E and Tuncer Cebeci y P.Shao (2005) mencionan:

"...No se ha presentado alguna vez una seria objeción a este principio, y la validez de estas ecuaciones se ha establecido en tantos casos que podemos considerarlas como un acto de fe y tener plena confianza en ellas... Las ecuaciones de Navier-Stokes se basan en los principios de conservación de masa, momentum lineal y energía..." (Laurendeau and F Kafyeke E and Tuncer Cebeci & P.Shao, 2005, página 41)

Para deducir las ecuaciones de Navier-Stokes, se parte de un volumen de control, un elemento infinitesimal al cual, por medio de aplicar las leyes de Newton, se encontrará la fuerza en cada componente en coordenadas cartesianas. Para el caso de la componente en x, se tiene:

$$\rho dx dy dz \frac{D\mathbf{V}_x}{Dt} = \rho \mathbf{B}_x dx dy dz + \left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx\right) dz dy - \tau_{xx} dz dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dx dy - \tau_{zx} dx dy$$
(2.82)

simplificando se obtiene lo siguiente;

$$\rho \frac{D\mathbf{V}_x}{Dt} = \rho \mathbf{B}_x + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$
(2.83)

Usando las ecuaciones (2.8) del tensor de deformaciones y sustituyéndolas en la ecuación (2.83), se llega a la forma general de la ecuación de Navier-Stokes, estas ecuaciones para

cierto μ' , tienen la siguiente forma para la componente en x:

$$\tau_{xx} = \mu \left(2 \frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial x} - \mu' \nabla \cdot \mathbf{V} \right) - p$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{V}_y}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial x} \right)$$

(2.84)

lo mismo se hace con las otras componentes. Según Graebel (2007, página 27) se pueden expresar las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma más general posible para cualquier fluido Newtoniano de la siguiente manera:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}_x}{Dt} = -\frac{\partial(p - \mu' \nabla \cdot \mathbf{V})}{\partial x} + \rho \mathbf{B}_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \left(\frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{V}_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial x} \right) \right] \\
\rho \frac{D\mathbf{V}_y}{Dt} = -\frac{\partial(p - \mu' \nabla \cdot \mathbf{V})}{\partial y} + \rho \mathbf{B}_y + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial \mathbf{V}_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \left(\frac{\partial \mathbf{V}_y}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial \mathbf{V}_y}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial y} \right) \right] \\
\rho \frac{D\mathbf{V}_z}{Dt} = -\frac{\partial(p - \mu' \nabla \cdot \mathbf{V})}{\partial z} + \rho \mathbf{B}_z + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{V}_y}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[2\mu \left(\frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial z} \right) \right] \\$$
(2.85)

Donde μ y μ' son los coeficientes de viscosidad primero y segundo respectivamente. En el caso de μ , es la viscosidad relacionada a la tasa de deformación debido a los esfuerzos dinámicos y en el caso de μ' , es la viscosidad debido al cambio de volumen que experimenta el fluido. Hay que recordar que la relación entre μ y μ' es $\mu' = 2\mu/3$ cuando el fluido es isotrópico, entonces según (Zikanov, 2010, página 18) las ecuaciones de Navier-Stokes toman la siguiente forma:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \mathbf{B}_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(-\frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} + 2 \frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{V}_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial x} \right) \right] \\
\rho \frac{D\mathbf{V}_y}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho \mathbf{B}_y + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial \mathbf{V}_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(-\frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} + 2 \frac{\partial \mathbf{V}_y}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial \mathbf{V}_y}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial y} \right) \right] \\
\rho \frac{D\mathbf{V}_z}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \mathbf{B}_z + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{V}_y}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(-\frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} + 2 \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial z} \right) \right] \\$$
(2.86)

Estas expresiones pueden escribirse de una forma más compacta y conocida haciendo uso del *operador laplaciano* y readecuando algunos términos utilizando la definición de la divergencia, esto queda de la siguiente manera:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}_x}{Dt} = \rho \mathbf{B}_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 \mathbf{V}_x + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{V}\right)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}_y}{Dt} = \rho \mathbf{B}_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 \mathbf{V}_y + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{V}\right)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}_z}{Dt} = \rho \mathbf{B}_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 \mathbf{V}_z + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{V}\right)$$
(2.87)

Ahora, además de considerar un fluido isotrópico, se supondrá que el flujo tendrá densidad ρ constante, es decir que $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, usando la ecuación de continuidad. Así se llega a las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma más útil para flujos incompresibles:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}_x}{Dt} = \rho \mathbf{B}_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 \mathbf{V}_x$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}_y}{Dt} = \rho \mathbf{B}_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 \mathbf{V}_y$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}_z}{Dt} = \rho \mathbf{B}_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 \mathbf{V}_z$$
(2.88)

Según Shames (1996, página 405) podemos escribir el sistema de ecuaciones (2.88) en su forma diferencial de la siguiente manera:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{B} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V}$$
(2.89)

2.7.1 Ecuaciones de vorticidad y energía

A partir de las ecuaciones de Navier-Stokes se pueden construir dos resultados muy importantes en la Mecánica de fluidos y estos son primero *la ecuación general de la vorticidad* y segundo *la ecuación de trabajo y energía*.

Ya se dedujo la ecuación de vorticidad para el flujo laminar incompresible, ahora véase el caso general, primero se escribirá las ecuaciones (2.85) en su forma diferencial:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p - \mu' \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \rho \mathbf{B} + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V})$$
(2.90)

Ahora se pasa a dividir la densidad (ρ), se expande el operador de la derivada material y se aplica el operador rotacional en ambos lados de la ecuación (2.90):

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla \times \left(\frac{\nabla p}{\rho}\right) + \nabla \times \mathbf{B} + \nabla \times \frac{\mu}{\rho} \left[\nabla^2 \mathbf{V} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V})\right] - \nabla \times \frac{\mu'}{\rho} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V})$$
(2.91)

Se usan ahora las identidades vectoriales (2.19), (2.22), (2.28), (2.30) y (2.33) además de la propiedad del rotacional para el producto de un escalar por un vector:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{V}) - \nabla \times [\mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V})] = -\nabla \left(\frac{1}{\rho}\right) \times \nabla p + \nabla \times \mathbf{B} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{V}) + \nabla \left(\frac{\mu}{\rho}\right) \times \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla \left(\frac{\mu'}{\rho}\right) \times \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V})$$
(2.92)

Ahora se aplica la definición de vector vorticidad (2.16) y la siguiente identidad vectorial:

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$
(2.93)

Entonces, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} (2\omega) + (\mathbf{V} \cdot \nabla) 2\omega \end{bmatrix} + 2\omega (\nabla \cdot \mathbf{V}) - (2\omega \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla \left(\frac{1}{\rho}\right) \times \nabla p + \nabla \times \mathbf{B} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 (2\omega) + \nabla \left(\frac{\mu}{\rho}\right) \times \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla \left(\frac{\mu'}{\rho}\right) \times \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V})$$
(2.94)

Por último se usa la definición de la derivada material para el vector vorticidad (2.18), donde

se obtiene la ecuación deseada:

$$\frac{D(2\omega)}{Dt} + 2\omega(\nabla \cdot \mathbf{V}) - (2\omega \cdot \nabla)\mathbf{V} = -\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \times \nabla p + \nabla \times \mathbf{B} + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2(2\omega) + \nabla\left(\frac{\mu}{\rho}\right) \times \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla\left(\frac{\mu'}{\rho}\right) \times \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V})$$
(2.95)

Para el caso donde el fluido es isotrópico, la densidad es constante y las fuerzas de cuerpo son campos escalares, entonces se obtiene la ecuación (2.34).

Para la ecuación de trabajo y energía, se procede de la misma manera, se empieza con las ecuaciones de Navier-Stokes (2.90) en su forma diferencial, se procede aplicando el producto escalar con el vector velocidad en ambos lados de la ecuación:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \cdot \mathbf{V} = -\nabla p \cdot \mathbf{V} - \mu' \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} + \rho \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V}$$
(2.96)

Usando propiedades del producto escalar, la ecuación (2.96) se puede expresar como sigue:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} \right) = -\nabla p \cdot \mathbf{V} - p(\nabla \cdot \mathbf{V}) + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \mu' \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} + \rho \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} + \mu \nabla^2 \left(\frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} \right) + \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V}$$
(2.97)

Se utiliza la propiedad de la divergencia para el producto de un escalar por un vector, quedando:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} \right) = -\nabla \cdot (p\mathbf{V}) - \nabla \cdot (\tau \mathbf{V}) + \nabla \cdot (\tau \mathbf{V}) + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) + \rho \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} + \mu \nabla^2 \left(\frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} \right) - \mu' \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V}$$
(2.98)

Ahora se sustituy
e $\frac{1}{2}\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}$ por e,donde ees la energía por unidad de mas
a y se procede a

comparar con la ecuación (2.64), obteniendo la relación deseada entre trabajo y energía:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \nabla \cdot (\sigma \mathbf{V}) + \rho \mathbf{B} \cdot \mathbf{V}$$

$$+ \left[\mu \nabla^2 e + \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) \right] - \left[\mu' \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot (\tau \mathbf{V}) \right]$$
(2.99)

Los términos de la ecuación (2.99) entre corchetes guardan una estrecha relación con la ley de conservación de energía (2.64) estudiada anteriormente, el trabajo realizado por las fuerzas de cuerpo y superficiales del fluido se convierte en calor, como se muestra a continuación:

$$\dot{\mathbf{Q}} - \nabla \cdot \mathbf{q} = \left[p(\nabla \cdot \mathbf{V}) + \mu \nabla^2 e + \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} \right] - \left[\tau \cdot \nabla \mathbf{V} + \nabla \tau \cdot \mathbf{V} + \nabla \left[p - \mu' (\nabla \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} - \nabla p \cdot \mathbf{V} + 2\mu' \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} \right]$$
(2.100)

Según Graebel (2007, página 37), el término negativo de la ecuación (2.100) es conocido como *la función disipativa*, esta puede expresarse como:

$$\Phi = \tau \cdot \nabla \mathbf{V} + \nabla \left[p - \mu' (\nabla \cdot \mathbf{V}) \right] \cdot \mathbf{V}$$

$$= \tau_{xx} \frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial x} + \tau_{xz} \frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial x} + \tau_{xz} \frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial \mathbf{V}_y}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial \mathbf{V}_y}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial z} + \tau_{zz} \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial z} + \nabla \left[p - \mu' (\nabla \cdot \mathbf{V}) \right] \cdot \mathbf{V}$$
(2.101)

En conclusión, la ecuación (2.100) se puede escribir como:

$$\dot{\mathbf{Q}} - \nabla \cdot \mathbf{q} = \left[\nabla \cdot (p\mathbf{V}) + (\nabla \cdot \tau) \cdot \mathbf{V} + \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V}\right] - \left[\nabla \tau \cdot \mathbf{V} + \mathbf{\Phi} + 2\mu' \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V}\right]$$
(2.102)

Esta última ecuación (2.102) describe como se comporta la tasa de energía liberada por el movimiento del fluido, la relación que existe entre la energía mecánica y calorífica. Para un flujo laminar incompresible, la ecuación (2.102) toma la forma:

$$\dot{\mathbf{Q}} - \nabla \cdot \mathbf{q} = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \mathbf{V})$$
(2.103)

2.7.2 Condiciones de frontera para el modelado del movimiento de un fluido

En resumen, las ecuaciones que definen el movimiento de un flujo laminar incompresible son las siguientes:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{B} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V}$$

$$\rho \frac{D\mathbf{e}}{Dt} = \dot{\mathbf{Q}} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot \sigma \mathbf{V} \qquad (2.104)$$

$$\dot{\mathbf{Q}} - \nabla \cdot \mathbf{q} = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \mathbf{V})$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\omega \cdot \nabla)\mathbf{V} + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 \omega$$

$$\nabla \cdot \omega = \nabla \cdot \left(\frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{V}\right) = 0$$

Según C. Pozrikidis (2017, páginas 397 a la 398), las condiciones de frontera para encontrar una solución a las ecuaciones de Navier-Stokes (2.104) en un flujo laminar incompresible, deben ser tales que la velocidad y los esfuerzos en la superficie de control cumplan lo siguiente:

1. Superficie sólida impermeable: Esta condición de frontera es también conocida como la condición de pared rígida (Zikanov, 2010, página 27). Para flujos viscosos, se tiene que $V_{fluid} = V_{wall}$, no hay lo que se llama *capa desprendida*. Sea **n** el vector normal a la superficie de control o frontera, entonces la siguiente condición se cumple:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{V}_{fluid} - \mathbf{V}_{wall}) = 0 \tag{2.105}$$

Esto asegura que el flujo se mantiene dentro de la superficie de control. Para flujos no viscosos, pues la situación es diferente, la velocidad en la frontera es cero, la capa límite está desprendida. Debido a la fricción, la temperatura en la frontera debe ser considerada en algunos casos, entonces el flujo de transferencia de calor en la frontera
queda definido como:

$$\kappa \nabla \Gamma \cdot \mathbf{n} + h(\Gamma - \Gamma_{wall}) = 0 \tag{2.106}$$

Donde κ es la constante de conducción de calor del material, h es una constante de enfriamiento (ley de enfriamiento de Newton) y $\Gamma(x, y, z, t)$ es el campo de temperatura asociado al flujo. Otra cualidad que debe cumplir la frontera es que esta sea una superficie material (Graebel, 2007, página 28), es decir que si F(x, y, z, t) es la función que define la superficie de control, entonces se cumple que:

$$\frac{DF}{Dt}\Big|_{wall} = 0$$

$$F(x, y, z, t) = 0$$

$$(2.107)$$

2. Superficie libre: Una superficie material donde los esfuerzos normales y tangenciales son uniformes, es llamada una *superficie libre*. Los esfuerzos deben ser continuos en cualquier parte del fluido, de no ser cierto esto, el campo de aceleraciones diverge. Sin embargo, cuando la densidad no es constante (por ejemplo si el flujo fuera multifásico y hubiera una interfaz entre un líquido y un gas), puede que existan variaciones en los esfuerzos y esta diferencia de esfuerzos se deba a la tensión superficial de la interfaz (la interfaz se entiende como la frontera entre dos fluidos ó entre la superficie material y el fluido contenido en ella). Definamos $\boldsymbol{\tau}^{(n)}$ como el esfuerzo en la dirección hacia afuera de la superficie de control **S** y sea $\boldsymbol{\sigma}$ la tensión superficial por unidad de longitud, asumiendo que una curva **C**, el vector normal unitario **n** y el vector tangente unitario **t** están contenidos en un plano normal a la interfaz y que la fuerza de tensión superficial es localmente tangente a lo largo de **C** y a la superficie **S**, se cumple la siguiente condición de equilibrio (Graebel, 2007, página 28):

$$\iint_{\mathbf{S}} \left[\boldsymbol{\tau}_{fluid}^{(n)} - \boldsymbol{\tau}_{wall}^{(n)} \right] \cdot \mathbf{dA} = \oint_{C} (\sigma \mathbf{t} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{ds}$$
(2.108)

Donde **n** es el vector normal unitario a la superficie y $\tilde{\mathbf{t}}$ es el vector tangente unitario a la superficie. Usando el *teorema de Stokes* en la parte derecha de la ecuación (2.108), se obtiene lo siguiente:

$$\int_{C} (\sigma \mathbf{t} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{ds} = \iint_{S} [\nabla \times (\sigma \mathbf{t} \times \mathbf{n})] \cdot \mathbf{dA}$$
(2.109)

Al hacer uso de la identidad vectorial:

$$\nabla \times (A \times B) = (B \cdot \nabla)A - (A \cdot \nabla)B + A(\nabla \cdot B) - B(\nabla \cdot A)$$
(2.110)

y al hacer $\boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{t}$, la integral (2.109) toma la siguiente forma:

$$\iint_{S} \left[(\mathbf{n} \cdot \nabla) \boldsymbol{\sigma} - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma} (\nabla \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \right] \cdot \mathbf{dA}$$
(2.111)

Ahora se iguala la ecuación (2.111) con la proposición original (2.108), ya que son expresiones equivalentes:

$$\iint_{\mathbf{S}} \left[\tau_{fluid}^{(n)} - \tau_{wall}^{(n)} \right] \cdot \mathbf{dA} = \iint_{S} \left[(\mathbf{n} \cdot \nabla) \boldsymbol{\sigma} - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma} (\nabla \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \right] \cdot \mathbf{dA}$$

$$\tau_{fluid}^{(n)} - \tau_{wall}^{(n)} = (\mathbf{n} \cdot \nabla) \boldsymbol{\sigma} - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma} (\nabla \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})$$

$$(2.112)$$

Por último se define $\nabla \boldsymbol{\tau} = \tau_{fluid}^{(n)} - \boldsymbol{\tau}_{wall}^{(n)}$, este vector se puede separar en dos componentes ortogonales entre sí, en dirección **n** y $\boldsymbol{\sigma}$ respectivamente, quedando esto:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau} = -(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)\mathbf{n} - \mathbf{n}(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})$$

$$\mathbf{t} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau} = (\mathbf{n} \cdot \nabla)\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}(\nabla \cdot \mathbf{n})$$

(2.113)

Estas ecuaciones (2.113) son conocidas como la *la ley de presión de Laplace* (componente tangencial en la dirección de \mathbf{t}) y *la fuerza de tracción de Marangoni* (la componente normal en dirección de \mathbf{n}).

3. La interfaz fluida: La continuidad del campo de velocidades en cualquier parte del flujo es imprescindible y requerida, sin esto no existiría continuidad en los esfuerzos. Las componentes de esfuerzo en la frontera deben cumplir las ecuaciones (2.113) en caso de que existan variaciones en los esfuerzos, estas variaciones deben ser continuas y diferenciables. En el caso de que el problema se seccione en partes, las velocidades en cada sección deben ser continuas, es decir:

En cada salto deberá existir la continuidad del campo de velocidades y aceleraciones, esto incluye condiciones iniciales ó cualquier otra relación constitutiva a considerar en el flujo (Zikanov, 2010, página 29).

Una superficie material no debe confundirse con una superficie acotada. Una superficie acotada es aquella conformada por la presencia de dos materiales distintos en la frontera. La superficie material es aquella conformada de un mismo material (Huilgol, 1990), el vector normal \hat{n} a la superficie crea una componente de velocidad V constante a lo largo de la superficie material, es decir:

$$\mathbf{V} \cdot \hat{n} = C = \mathbf{V} \cos \theta \tag{2.115}$$

2.7.3 Análisis adimensional y las ecuaciones de Navier-Stokes

Las formas adimensionales de las ecuaciones de Navier-Stokes se usan para estudiar la similitud dinámica de muchos problemas de transporte con diferentes geometrías, existen problemas con *número de Reynolds bajo* y *número de Reynolds alto*. Las ecuaciones para cada caso se expresan de la siguiente manera:

 Para flujos con un número de Reynolds alto, la forma adimensional se obtiene sustituyendo las siguientes escalas (Fletcher, 1998, página 12):

$$u^{*} = \frac{\mathbf{V}_{x}}{U} \quad x^{*} = \frac{x}{L} \quad b_{x}^{*} = \frac{\mathbf{B}_{x}}{g} \quad p^{*} = \frac{p}{\rho U^{2}}$$

$$v^{*} = \frac{\mathbf{V}_{y}}{U} \quad y^{*} = \frac{y}{L} \quad b_{y}^{*} = \frac{\mathbf{B}_{y}}{g} \quad t^{*} = \frac{Ut}{L}$$

$$w^{*} = \frac{\mathbf{V}_{z}}{U} \quad z^{*} = \frac{z}{L} \quad b_{z}^{*} = \frac{\mathbf{B}_{z}}{g}$$

$$(2.116)$$

Quedando entonces las siguientes ecuaciones:

$$\frac{Du^*}{Dt^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} - \frac{b_x^*}{\mathbf{Fr}^2} + \frac{1}{\mathbf{Re}} \nabla^{*2} u^*$$

$$\frac{Dv^*}{Dt^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} - \frac{b_y^*}{\mathbf{Fr}^2} + \frac{1}{\mathbf{Re}} \nabla^{*2} v^*$$

$$\frac{Dw^*}{Dt^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} - \frac{b_z^*}{\mathbf{Fr}^2} + \frac{1}{\mathbf{Re}} \nabla^{*2} w^*$$
(2.117)

Donde \mathbf{Fr} es llamado el *número de Froude* y este parámetro adimensional mide la relación entre las fuerzas inerciales y la gravedad, está definido como:

$$\mathbf{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gL}} \tag{2.118}$$

Para flujos con un número de Reynolds bajo, las escalas a sustituir serían las siguientes:

$$u^{*} = \frac{\mathbf{V}_{x}}{U} \quad x^{*} = \frac{x}{L} \quad b_{x}^{*} = \frac{\mathbf{B}_{x}}{g} \quad p^{*} = \frac{pL}{\mu U}$$
$$v^{*} = \frac{\mathbf{V}_{y}}{U} \quad y^{*} = \frac{y}{L} \quad b_{y}^{*} = \frac{\mathbf{B}_{y}}{g} \quad t^{*} = \frac{Ut}{L}$$
$$w^{*} = \frac{\mathbf{V}_{z}}{U} \quad z^{*} = \frac{z}{L} \quad b_{z}^{*} = \frac{\mathbf{B}_{z}}{g}$$
(2.119)

Obteniendo la siguiente forma adimensional de las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\mathbf{Re}\frac{Du^{*}}{Dt^{*}} = -\frac{\partial p^{*}}{\partial x^{*}} + \nabla^{*2}u^{*} + \frac{\mathbf{Re}}{\mathbf{Fr}^{2}}b_{x}^{*}$$
$$\mathbf{Re}\frac{Dv^{*}}{Dt^{*}} = -\frac{\partial p^{*}}{\partial y^{*}} + \nabla^{*2}v^{*} + \frac{\mathbf{Re}}{\mathbf{Fr}^{2}}b_{y}^{*}$$
$$\mathbf{Re}\frac{Dw^{*}}{Dt^{*}} = -\frac{\partial p^{*}}{\partial z^{*}} + \nabla^{*2}w^{*} + \frac{\mathbf{Re}}{\mathbf{Fr}^{2}}b_{z}^{*}$$
$$(2.120)$$

Para fines prácticos y con valores de número de Reynolds muy altos o muy bajos respectivamente, se tienen las siguientes formas diferenciales:

$$\frac{D\mathbf{V}^*}{Dt^*} = -\nabla^* p^* + \frac{1}{\mathbf{Re}_1} \nabla^{*2} \mathbf{V}^*$$

$$\mathbf{Re}_2 \frac{D\mathbf{V}^*}{Dt^*} = -\nabla^* p^* + \nabla^{*2} \mathbf{V}^*$$
(2.121)

Estos flujos son conocidos como *flujos eulerianos* si $\mathbf{Re}_1 \to \infty$ en el caso de la primera ecuación en (2.121). En el caso de la segunda ecuación en (2.121), Si $\mathbf{Re}_2 \to 0$, entonces se dice que son *flujos de Stokes* (Laurendeau and F Kafyeke E and Tuncer Cebeci & P.Shao, 2005).

Para terminar con esta sección de las ecuaciones de Navier-Stokes, se requerirá revisar primero los modelos de flujos turbulentos usados hasta el momento, las ecuaciones para flujos laminares incompresibles se pueden resolver directamente, pero la realidad es que la mayoría de problemas de transporte son turbulentos y el caso que se quiere estudiar no es la excepción, así que se debe adecuar las ecuaciones de tal manera que simulen la turbulencia lo más aproximado que se pueda.

2.7.4 Las ecuaciones de Navier-Stokes con promedio de Reynolds (RANS)

El fenómeno de turbulencia es en extremo complejo para simular su movimiento haciendo uso de las Ecuaciones de Navier-Stokes. Se procede entonces a aproximar y acotar las fluctuaciones haciendo uso de métodos estadísticos, a este problema se le llama *El problema de cerradura* (Wilcox, 2006, Capítulo 2, página 11). Existen distintos tipos de modelos de turbulencia, donde se modela la velocidad como un promedio temporal, espacial y de ensamble, cada modelo pensado para distintos tipos de turbulencia, para una turbulencia estacionaria se usaría un modelo basado en el uso de un promedio temporal. En un caso de turbulencia homogénea, se piensa en un modelo con promedio espacial. Para casos donde se realizan experimentos como ser para encontrar similitud dinámica con distintas geometrías, se puede aplicar un promedio de ensamble si estos eventos decaen en el tiempo. Para el desarrollo de las ecuaciones de Navier-Stokes de Reynolds promedio se piensa en un modelo de promedio temporal. el cual se define de la siguiente manera:

$$u_i(\boldsymbol{x},t) = U_i(\boldsymbol{x},t) + \acute{u}_i(\boldsymbol{x},t)$$

$$u_i(\boldsymbol{x},t) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_i(\boldsymbol{x},t) dt + \acute{u}_i(\boldsymbol{x},t)$$
(2.122)

Donde u_i representa el valor promedio de velocidad, U_i es la velocidad instantánea y u_i' es la variación de la velocidad instantánea. Ahora, se pondrá atención a las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo incompresible, se sustituye la velocidad con promedio temporal en la ecuación de continuidad y conservación de momento como sigue:

$$\nabla \cdot (U + \acute{u}) = 0$$

$$\rho \frac{D(U + \acute{u})}{Dt} = \rho \mathbf{B} - \nabla p + \mu \nabla^2 (U + \acute{u})$$
(2.123)

Expandiendo la derivada material y haciendo lo mismo en la ecuación de continuidad se obtiene lo siguiente:

$$\nabla \cdot U = -\nabla \cdot \acute{u}$$

$$\rho \left[\frac{DU}{Dt} + \frac{D\acute{u}}{Dt} \right] = \rho \mathbf{B} - \nabla p + \mu \nabla^2 U + \mu \nabla^2 \acute{u} - (U \cdot \nabla) \acute{u} - (\acute{u} \cdot \nabla) U \qquad (2.124)$$

$$\rho \frac{D\acute{u}}{Dt} - \mu \nabla^2 \acute{u} = 0, \qquad \text{Si } \nabla \cdot \acute{u} = 0$$

Fíjese en el término $-(U \cdot \nabla) \acute{u} - (\acute{u} \cdot \nabla) U$, obsérvese lo siguiente:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{(De la ecuación de continuidad)} -(U \cdot \nabla) \dot{u} - (\dot{u} \cdot \nabla) U = -U_i \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} - \dot{u}_i \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$$
(2.125)

El término antes mencionado puede escribirse como $\partial/\partial x_i(\overline{\dot{u}_i\dot{u}_j})$, asumiendo que $U \approx \overline{\dot{u}}$ (usando el operador de Reynolds sobre valores promedios), quedando las ecuaciones de Navier-Stokes con promedio temporal:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \rho U_j \frac{\partial U_i}{x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu S_{ij} - \rho \overline{u_i u_j})$$
(2.126)

Donde S_{ij} es el tensor de deformaciones (2.8) y al término $\overline{\dot{u}_i \dot{u}_j}$ se le llamará tensor de esfuerzos de Reynolds. Las ecuaciones antes mostradas están abiertas, es decir, que hay más variables que incógnitas, para ello se necesita formular más ecuaciones que varían en su forma dependiendo el enfoque que se decida usar para modelar la turbulencia (Wilcox, 2006, página 40). En la búsqueda de nuevas ecuaciones se implementa la siguiente ecuación, llamada *la ecuación del esfuerzo del Reynolds*:

$$\frac{DR_{ij}}{Dt} = D_{ij} + P_{ij} + \Pi_{ij} + \Omega_{ij} - \varepsilon_{ij}$$
(2.127)

Donde $R_{ij} = \overline{\dot{u}_i \dot{u}_j}$, y su derivada material, representa la *tasa de cambio del esfuerzo de Reynolds*, D_{ij} representa los esfuerzos debidos al *transporte difusivo*, P_{ij} representa los esfuerzos debido al *transporte convectivo*, Ω_{ij} representa debido al transporte debido a la *rotación o vorticidad* y ε_{ij} representa la tasa de disipación de energía. La deducción de la ecuación 2.127 se logra a través de la ecuación de energía y los principio de conservación:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} = -\tau_{jk} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} - \tau_{jk} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial (i_j)}{\partial x_k} - 2\rho \frac{\partial (i_k)}{\partial x_k} \frac{\partial (i_j)}{\partial x_k} - \frac{\partial (i_k)}{\partial x_k} \frac{\partial (i_k)}{\partial x_k} + \frac{\partial (i_k)}{\partial x_k} + \frac{\partial (i_k)}{\partial x_k} \frac{\partial (i_k)}{\partial x_k} + \frac$$

Los términos de la ecuación son los siguientes:

1.
$$P_{ij} = -\tau_{jk} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} - \tau_{jk} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k}$$
2.
$$\Pi_{ij} = \overline{p} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)$$
3.
$$\varepsilon_{ij} = 2\rho \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}}$$
4.
$$D_{ij} = -\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i} \overline{u_j} \overline{u_k} + p \overline{u_j} \delta_{ij})$$
5.
$$\Omega_{ij} = \rho \frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial x_k \partial x_k}$$

Con esto se cierra el problema y las ecuaciones de Navier-Stokes quedan simplificadas drásticamente. Los modelos de turbulencia van a variar dependiendo las suposiciones que se hagan acerca de los esfuerzos antes mencionados, pueden mencionarse cuatro tipos de modelos para simular la turbulencia:

- Modelos algebraicos
- Modelos de una ecuación
- Modelos de dos ecuaciones (K -
 ω / K - $\varepsilon)$
- Modelos de esfuerzo-transporte

Más adelante se discutirá los modelos $K-\omega$ propuesto por Kolmogorov (1972) y $K-\varepsilon$ propuesto por Launder y Spalding (1972) entre otros (Wilcox, 2006, Capítulo 1).

3. PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

3.1 Metodología general

El proceso consiste en el modelado de las ecuaciones diferenciales que definen el movimiento del fluido a través de la tubería, canal o vertedero, estas ecuaciones son mejor conocidas como las ecuaciones de Navier-Stokes (Mora, 2017). Se resuelve el problema usando métodos numéricos, según Cabas y Ariza (2018), el diseño de las tuberías, canales o vertederos y todo el proceso que exige la simulación depende mucho del tipo de flujo a transportar, entre otras características propias del problema, todo esto definirá el modelo físico a implementar. Para el movimiento de un fluido o flujo, se necesita entender el comportamiento asintótico de las ecuaciones de Navier-Stokes (Véase 7), por ejemplo se puede citar el modelamiento de un flujo para números grandes de Reynolds (Moreau, 2004). El modelamiento asintótico consiste en el estudio de los límites o comportamientos terminales de los funcionales en un espacio dado, esto quiere decir que dentro de un mismo espacio muchos funcionales pueden ser asintóticamente equivalentes, es decir, tienen el mismo comportamiento terminal. El caso particular que se quiere estudiar son las tuberías con grandes caudales y dimensiones, los flujos internos a través de tuberías en un sistema hidráulico que tiene como fin transportar un gran volumen de agua. Este modelamiento se llevará a cabo caracterizando el flujo, en este caso el estudio se enfocará a flujos incompresibles debido a la acción de la gravedad.

Con los resultados obtenidos en la simulación se definirá los parámetros de diseño y accesorios necesarios para construir el sistema hidráulico como ser espesores, diámetros y material, Dzodzo, Liu, Cioncolini y Spiegelman (2006) explican en su trabajo como la simulación obtenida con técnicas CFD permite observar los patrones de flujo y velocidades axiales resultantes, al igual que el autor mencionado, se usará la información obtenida en la simulación para proponer el diseño más apropiado. Los *métodos y técnicas a utilizar* serán los métodos numéricos empleados en el CFD, algunos autores proponen los siguientes métodos numéricos, como ser:

- El método de diferencias finitas (C. Pozrikidis, 2017, página 521)
- El método de los volúmenes finitos (Laurendeau and F Kafyeke E and Tuncer Cebeci & P.Shao, 2005, página 157)
- El método de los elementos finitos (Ferziger y col., 2002, página 40)

Estos son los métodos empleados más conocidos para resolver directamente las ecuaciones de Navier-Stokes. Hasta el momento hay tres *enfoques adaptativos* importantes para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes:

- El enfoque DNS (Direct Navier-Stokes Solution): Consiste en resolver las ecuaciones de Navier-Stokes sin implementar ningún modelo de turbulencia. Usando escalas de Kolmogorov, se propone un mallado lo suficientemente pequeño para simular todas las escalas espaciales y temporales de turbulencia, lo que resulta en un alto costo computacional, según Malalasekera, H K Versteeg (2007, página 112) el uso de métodos espectrales con supercomputadoras ha dado los mejores resultados hasta el momento.
- El enfoque LES (Large Eddy Simulation): Este enfoque consiste en crear un modelo que predice la aparición de los vórtices de mayor tamaño ("Large Eddies" en inglés) en el flujo, a diferencia de solo calcular el efecto superimpuesto de muchos "eddies" pequeños en una sola capa media ("mean flow" en inglés). El costo computacional es significativo pero no mayor al exigido en el enfoque DNS. Se caracteriza por el uso de funciones de filtro, con el fin de ignorar en la simulación los vórtices de menor tamaño (Malalasekera, H K Versteeg, 2007, página 98).
- El enfoque RANS (Reynolds Average Navier-Stokes): Es un enfoque que busca modelar la turbulencia del flujo de manera estadística y solo tomando en cuenta el efecto de los vórtices pequeños y su efecto acumulado, es decir, que el modelo simula como se

disipa energía a través de la turbulencia y predice los esfuerzos generados debido a la turbulencia. El costo computacional necesario para implementar el enfoque de promedio temporal RANS es muy bajo en comparación con el LES y el DNS, pero su uso solo se restringe a flujos en una sola dirección, para flujos circulares, con geometrías diversas y complejas se debe usar un enfoque híbrido DNS/LES o DNS/RANS. También se utiliza la hipótesis de Boussinesq para modelar la viscosidad de los vórtices, considerando casos de total isotrópia o ansitropía, además si considera si el flujo es de número de Reynolds alto o bajo. Esto hace del enfoque de promedio temporal RANS, el enfoque más empleado y versátil disponible.

Según Salcedo, Bayón y Chueca (2017), la técnica de los elementos finitos con el enfoque RANS es la más ampliamente utilizada hasta el momento. Existen también enfoques mixtos como ser el enfoque DNS/LES y RANS/DNS. Sobre el enfoque DNS/LES, hay muchas observaciones al respecto sobre su uso, precisión y costo computacional, Hoffman y Johnson (2006) menciona en su trabajo que el costo computacional con el Método de Galerkin (Generalización del método de los elementos finitos) usando el enfoque DNS/LES es razonable para los casos de un flujo incompresible turbulento con un número de Reynolds alto.

Sobre el enfoque *RANS/DNS* donde el enfoque DNS se aplica como un modelado preliminar, se toma los resultados de este método como base de datos de entrada (input data) para el modelado con RANS de las ecuaciones de Navier-Stokes, en este caso se usa el enfoque RANS como un refinamiento o mejoramiento a través de métodos estadísticos (Poroseva, Colmenares F. & Murman, 2016), se puede mencionar el uso de técnicas de Monte Carlo es un ejemplo de esto, otro ejemplo de esto lo podemos ver en el trabajo de Voet, Ahlfeld, Gaymann, Laizet y Montomoli (2021) quien dice: "*El objetivo principal…es encontrar métodos en el campo de la Mecánica de fluidos que combinen todas las piezas de información que están disponibles tanto en las simulaciones con RANS como en el DNS, en una forma eficaz que mejora la precisión en los cálculos con un costo computacional razonable."* Para el problema propuesto se usarán simulaciones con el uso de las ecuaciones de promedio temporal *RANS* con un modelamiento de los esfuerzos de Reynolds $K - \varepsilon$ para flujos incompresibles. Se comparará el resultado usando las técnicas numéricas mencionadas anteriormente. El modelado del problema consiste en las siguientes etapas:

- Encontrar las ecuaciones de movimiento para el flujo propuesto y las diferentes condiciones de frontera.
- Encontrar las escalas apropiadas y los grupos adimensionales más pertinentes para el problema propuesto.
- Usar el Modelo K ε o bien K ω para simular el efecto de la turbulencia sobre el flujo, es decir, expresar las formas adimensionales propuestas para las ecuaciones de movimiento, al usar el modelo de turbulencia, incluyendo las ecuaciones de disipación de energía de turbulencia y cualquier otra relación constitutiva que tenga el problema.
- Proponer un mallado apropiado para el flujo e implementar un método numérico que permita encontrar los campos de velocidades, aceleraciones y vorticidades.
- Con la información obtenida, encontrar las presiones y esfuerzos axiales sobre la superficie de control en cada tramo.

Se estudiará a fondo las librerías y funcionalidades dé $Open\nabla FOAM^{\oplus}$. En el caso de OpenFoam, es un software libre que permite simular el flujo de una tubería. Este software de uso libre tiene almacenado las librerías de los métodos de cálculo para la implementación del método de los elementos finitos, diferencias finitas y volúmenes finitos, además que ofrece la oportunidad de graficar y simular en 2-D y 3-D usando un software adicional llamada ParaView. Una vez elaborado el código para el sistema de tuberías propuesto, el código elaborado en OpenFoam se implementará para el cálculo de las presiones en la capa límite del flujo. Con los resultados obtenidos se propondrá un diseño para una pieza en el sistema de

tuberías para el uso de una turbina en una represa hidroeléctrica. Esto consiste en proponer un diámetro, espesor y material para la pieza localizada en el tramo de tubería.

Para la simulación de flujos incompresibles en OpenFoam se necesita conocer a fondo la hipótesis de los métodos y las ecuaciones de Navier-Stokes. Se utilizará en este caso el método de los elementos finitos y el enfoque adaptativo RANS.



Figure 3.1. Ejemplo de una simulación realizada en Open ${\ensuremath{\overline{V}}} FOAM^{\ensuremath{\mathbb{B}}}$ y renderizada en $ParaView^{\ensuremath{\mathbb{R}}}$

3.2 Método de los elementos finitos

El método de los elementos finitos consiste en un conjunto de técnicas numéricas las cuales pretenden resolver ecuaciones diferenciales parciales que describen problemas físicos con geometrías muy complejas y difíciles de manejar, por ejemplo problemas encontrados en el área de la Ingeniería civil (Zeng, Li & Zhang, 2016), Ingeniería mecánica (Onuchin, 1977; Seoane, 2018), Ingeniería aeronáutica, Mecánica de fluidos, Electromagnetismo y Biomecánica. La característica principal del análisis de los elementos finitos es la discretización, esto consiste en la creación de subdominios o pequeños sistemas llamados elementos finitos que están interconectados en ciertos puntos en común llamados nodos. En el contexto de la Mecánica de fluidos computacional o CFD, existen tres formas de aplicar el análisis de los elementos finitos:

- Método de los volúmenes finitos: la característica principal de este método está en su formulación clásica a partir de los principios de conservación. Un ejemplo de este método está en el trabajo de Seoane (2018) acerca del uso de volúmenes fraccionados con el método de volúmenes finitos.
- Método de Galerkin: A diferencia del método anterior, su formulación consiste en una base discontinua de funciones que bajo una técnica de interpolación apropiada genera una solución regular al problema.
- Método de los elementos finitos discretos (DEM): Es una técnica implementada para simular flujos multifásicos, por ejemplo partículas de suelo presentes en un flujo, se simula la interacción de la partícula con el fluido (Nguyen & Indraratna, 2020). Otro ejemplo de esto se encuentra en el trabajo de Zeng y col. (2016), donde se simula el proceso de fractura hidráulica para la extracción de gas.

Se procederá a explicar la formulación y análisis de cada método de elementos finitos, se mencionarán casos particulares donde se ha aplicado el método mencionado, ventajas y desventajas, entre otros detalles sobre su programación, en este caso en Open ∇ FOAM[®]. El objetivo es proponer una metodología basada en el uso de técnicas de elementos finitos usando Open ∇ FOAM[®] como plataforma de simulación, se usará una combinación de librerías para simular el flujo en discusión. Se discutirá el planteamiento de las ecuaciones diferenciales parciales con sus condiciones de frontera y lo más importante la formulación débil del problema, para luego realizar el respectivo código en Open ∇ FOAM[®], haciendo uso de las librerías y extensiones apropiadas para el cálculo con técnicas CFD.

Sobre la elección del método de los elementos finitos se debe a que el método de los volúmenes finitos redunda al uso del método de las diferencias finitas, al igual que en el método de Galerkin discontinuo, se implementan siempre técnicas de diferencias finitas para la formulación débil (Cheney, Hoffmann, Christoph, Boonkkamp & Technische, 2005). Sobre el uso del método de Galerkin discontinuo, se encuentra en la categoría de *métodos de residuos ponderados*, como ser el método de colocación, método de subdominios, método de mínimos cuadrados, la idea general es encontrar una solución a través de una interpolación. Un método muy parecido al método de subdominios es el método de volúmenes finitos. Usando el principio de conservación de masa al momento de discretizar nuestro espacio en subdominios se puede aproximar la solución haciendo uso de volúmenes de control, encontrando el equilibrio de flujos en cada uno de los subdominios creados (Fletcher, 1998). Véase la figura 3.2 para más detalle:



Figure 3.2. Malla bidimensional utilizada en el método de los volúmenes finitos (Fletcher, 1998, Página 106)

3.2.1 Método de los volúmenes finitos

Para entender correctamente el método de los volúmenes finitos, se debe primero definir muy bien el problema de transporte de materia a resolver, en este caso un fluido a través de una tubería de geometría cilíndrica. Este flujo debe discretizarse de tal forma que se cumplan los principios de conservación de masa, por eso es común ver aplicado el *método de volumen fraccionado* (VOF) junto con el método de volúmenes finitos. Los mallados más empleados son los *mallados de bloques estructurados* (Ferziger y col., 2002, Página 300-302).



Figure 3.3. Malla de bloque estructurado empleada en el método de los volúmenes finitos (Ferziger, H & Peric, 2002, Página 298)

Al tener claro las formas de transporte de materia, se puede hablar entonces del método de los volúmenes finitos considerando un flujo completamente difusivo y estable (Malalasekera, H K Versteeg, 2007, Página 115), este es el caso más simple para describir un flujo incompresible dentro una tubería. La formulación del método parte de *la ecuación general de transporte* (2.4):

$$\nabla \cdot (D\nabla c) + R = 0 \tag{3.1}$$

Integrando para un volumen de control se obtiene la formulación deseada:

$$\int \nabla \cdot (D\nabla c)dV + \int RdV = 0 \tag{3.2}$$

Entonces, haciendo $D = \mu$, $c = \mathbf{V} \ge R = \rho \mathbf{B} - \nabla p$, se obtiene lo esto:

$$\int \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{V}) \, dV + \int \rho \mathbf{B} dV - \int \nabla p dV = 0 \tag{3.3}$$

Esta es la ecuación de un flujo de Stokes, se mueve muy lento y su número de Reynolds es extremadamente bajo, casi cero. De manera similar, se procederá con las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo incompresible por gravedad en su forma adimensional, se integrará un volumen de control para así formular el método de los volúmenes finitos:

$$\int \frac{D\mathbf{V}^*}{Dt^*} dV = -\int \nabla^* p^* dV + \int \frac{1}{\mathbf{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{V}^* dV$$
(3.4)

A partir de aquí se puede formular el problema como una integral numérica, dependiendo la técnica numérica a utilizar, así será la formulación débil de la ecuación. Se intenta resolver una tubería que transporta un volumen considerable, si el número de Reynolds es muy grande y fluye por gravedad, se puede aproximar el problema como sigue:

$$\int \frac{D\mathbf{V}^*}{Dt^*} dV = -\int \nabla^* p^* dV$$

$$\int \left[(\mathbf{V}^* \cdot \nabla) \, \mathbf{V}^* + \frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial t} \right] dV = -\int \nabla^* p^* dV$$
(3.5)

Este flujo recibe el nombre de flujo euleriano. Los detalles sobre la discretización del mallado y formulación débil de la ecuación se llevarán a cabo en la sección de resultados 4. Se hará mención de algunos artículos donde se resolvió un problema de transporte haciendo uso del método de los volúmenes finitos:

 En su trabajo, Celeita (2016) utiliza el método de los volúmenes finitos para simular la descarga sobre un alcantarillado de aguas lluvia. La formulación débil de su problema



Figure 3.4. Celda utilizada en el modelado del alcantarillado (Celeita, 2016, Página 27 y 28) es la siguiente:

$$\int \mathbf{V} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS = 0$$

$$\int \frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} dV + \int \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) dV = \int \boldsymbol{\tau} \cdot \vec{n} dS + \int \rho \mathbf{B} dV$$
(3.6)

Al aplicar las condiciones de frontera y sustituir la forma débil de las derivadas se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones de primer orden:

$$-u_1\Delta y - v_2\Delta x + u_3\Delta y + v_4\Delta x = 0$$

$$-\frac{dp}{dx}\Delta x\Delta y + \mu(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1})\frac{\Delta x}{\Delta y} = 0$$
(3.7)

Las ecuaciones obtenidas anteriormente son para una celda rectangular en dos dimensiones como se puede ver en la figura 3.4, el sistema se resuelve usando algoritmos de álgebra lineal como ser *eliminación gaussiana* o métodos iterativos como ser el *método Gauss-Seidel*. En la figura 3.4 se muestra la discretización del problema.

Mattos-Villarroel y col. (2021, Página 18-21) en su trabajo sobre uso de técnicas CFD para encontrar el coeficiente de descarga de un vertedero. Utilizan el método de los volúmenes finitos para modelar su problema junto- con la técnica VOF citada en el artículo, las ecuaciones son las mismas que en el artículo anterior (3.6), la única diferencia es que aplica el método del volumen fraccionado en la formulación débil del

problema. Al aplicar las condiciones de frontera del problema asociadas a la geometría del vertedero, la formulación de la ecuación de continuidad del problema sería:

$$\int \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial(\alpha_i \rho_i)}{\partial t} dV + \int (\alpha_i V_i) \cdot \vec{n} dS = \int S_{\alpha_i} dV + \sum_{1}^{n} (\dot{m}_{i,j} - \dot{m}_{j,i}) \Delta V$$
(3.8)

Implementa un procedimiento similar de integración numérica, proponiendo celdas con volumen fraccionado, además utiliza un modelo de turbulencia $\mathbf{K} - \boldsymbol{\varepsilon}$. Sobre el uso del método de volumen Fraccionado junto con el método de los volúmenes finitos se puede revisar el trabajo de Zambrano y col. (2017), aplicado a una tubería que transporta aceite.

 Bustamante, Nieto y Giraldoa (2008) implementan el método de los volúmenes finitos en su trabajo sobre mallados no ortogonales, destinado a geometrías curvas. Siempre se resuelve las ecuaciones para un flujo incompresible (3.6). La formulación débil del problema se da de la siguiente manera:

$$\sum_{l=1}^{N} (\rho \mathbf{V} \cdot \vec{n} \Delta S)_{l} = 0$$

$$\sum_{l=1}^{N} [(\rho \mathbf{V}^{*} \mathbf{V} - \mu \nabla \mathbf{V}) \cdot \vec{n} \Delta S]_{l} = -\sum_{l=1}^{N} (\rho n_{x} \Delta S)_{l}$$
(3.9)

Los volúmenes de control utilizados se muestran en la figura 3.5, en el artículo se muestra el cálculo necesario para determinar la forma débil de las derivadas, haciendo uso de la definición de la divergencia y cada término de la ecuación de momentum. Se usa el algoritmo SIMPLE para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes.



Figure 3.5. Volumen de control usado en el artículo (Bustamante, Nieto & Giraldoa, 2008, Página53-56)

- Ceretani, Sanziel y Portapila (2013) en su trabajo sobre la implementación del método de los volúmenes finitos en OpenFoam, hace mención de la librería *IcoFoam* para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes.
- Lizeth, Mellado, Ernesto, Ibarra y Fonseca (2013) en su artículo sobre las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo incompresible, utilizan el método de los volúmenes finitos junto con una adaptación de los pasos fraccionados (Fractional Step Method) para el acoplamiento de la presión junto con la velocidad. Dicho acoplamiento se plantea de la siguiente manera:

$$\nabla p = -(v \cdot \nabla)v + \frac{1}{Re}\Delta v - \Pi \left(-(v \cdot \nabla)v + \frac{1}{Re}\Delta v \right)$$

$$\Delta p = \nabla \left(-(v \cdot \nabla)v + \frac{1}{Re}\Delta v \right)$$
(3.10)

Donde $\Pi(\cdot)$ es el operador Proyección, *la ecuación de Poisson* mostrada anteriormente (3.10), completa o cierra el problema de transporte a resolver.

Tuković, Karač, Cardiff, Jasak y Ivanković (2018) en su trabajo sobre el uso de Open√FOAM[®] para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes sobre un canal que se deforma elásticamente debido al flujo incompresible que lo atraviesa. Se formula un solver en OpenFoam con el uso de técnicas de programación en paralelo. La formulación del problema involucra las ecuaciones de Navier-Stokes junto a la ecuación general de transporte de Reynolds (2.35). En este caso también las ecuaciones que gobiernan la deformación de un sólido, como ser el tensor de Green-Lagrange (E) y el tensor Piola-Kirchhoff (Σ) en el modelo material de Venant-Kirchhoff, que define la conservación de



Figure 3.6. Volumen de control para la malla tridimensional no estructurada(Tuković, Karač, Cardiff, Jasak & Ivanković, 2018, Página 6)

momento como sigue:

$$\int_{V_0} \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) dV = \int_{S_0} n \cdot (\Sigma \cdot F^T) dS + \int_{V_0} b dV$$

$$F = I + (\nabla u)^T$$

$$\Sigma = 2\mu E + \lambda tr(E) I$$

$$E = \frac{1}{2} \left(\nabla u + (\nabla u)^T + \nabla u \cdot (\nabla u)^T \right)$$
(3.11)

El modelo matemático conformado por las ecuaciones mencionadas anteriormente implementa una interfaz fluido-sólido (superficie material). La discretización del problema está diseñada con una malla tridimensional de poliedros, estos poliedros son los volúmenes de control, así como se muestra en la figura 3.6. El método numérico es por supuesto el método de los volúmenes finitos, se aplica una formulación débil para las derivadas, se usa el algoritmo PISO (PRESSURE IMPLICIT WITH SPLIT OPERATOR) para resolver las ecuaciones obtenidas en la formulación débil (Tuković y col., 2018, Página 9). Por último, se modela la paralelización usando la famosa *descomposición del dominio*, consiste en la creación de subdominios para resolver de forma independiente la parte sólida y la parte del fluido usando procesadores separadamente.

• Quinodoz, Heidenreich y Vilar (2018) muestran en su artículo muestra muchos esquemas

de discretización para la formulación débil de Las ecuaciones de Navier-Stokes usando el método de los volúmenes finitos para su resolución. Dentro de los esquemas mencionados están:

- 1. FUDS (FIRST ORDER UPWIND SCHEME)
- 2. CDS (CENTRAL DIFFERENCE SCHEME)
- 3. SOUS (SECOND ORDER UPWIND SCHEME)
- 4. HDS (Hybrid Differencing Scheme)

Sobre la resolución del sistema de ecuaciones obtenido en la discretización de las ecuaciones para cada volumen de control (forma débil), se explica el método SIMPLE (SEMI-IMPLICIT METHOD FOR PRESSURE LINKED EQUATIONS). Incluye guías de programación para cada esquema.

Sobre sus ventajas y desventajas, cabe mencionar que su formulación es en extremo sencillo de realizar, ya que parte de los principios de conservación, dando cabida a muchas posibles opciones usando técnicas numéricas (Laurendeau and F Kafyeke E and Tuncer Cebeci & P.Shao, 2005). El software de apoyo más popular en el uso de técnicas CFD para resolver problemas ANSYS FLUENT, usa el método de los volúmenes finitos, esto es citado por los autores antes mencionados. Su limitante más sobresaliente es su precisión para geometrías muy complejas, el mallado debe ser lo suficientemente pequeño para lograr mejores resultados, lo que incrementa el número de operaciones y costo computacional.

3.2.2 Método de Galerkin

La esencia de este método está en la *teoría de la formulación débil* y el cálculo variacional. La idea principal del método es formular una solución aproximada de una ecuación diferencial parcial a partir de valores iniciales. La metodología empleada en el método de los elementos finitos es la interpolación y el uso de funciones de forma para discretizar el espacio en subdominios llamados elementos finitos, así como se aprecia en la figura 3.7:



Figure 3.7. Elemento tetraédrico empleado en un mallado de elementos finitos (Lewis, Nithiarasu & Seetharamu, 2004, Página 73)

Todos los problemas discretos de transporte usando técnicas CFD están basados en algoritmos cuyo fin es encontrar una formulación débil al problema, ya que todos ellos se basan en un problema que no es linealmente independiente. Primero se definará la notación principal del problema para su formulación débil. Se comienza con establecer el *dominio de* solución que se denota como $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, se tendría la ecuación diferencial parcial a resolver como:

$$\mathfrak{L}(X) = 0, \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^{N}$$

$$l(X) = 0, \qquad \partial \Omega_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^{N-1}$$

$$X(t_{b}) = X_{b}, \qquad \partial \Omega_{D} \subset \mathbb{R}^{N-1}$$
(3.12)

Donde $\mathfrak{L}(\cdot)$ representa la ecuación diferencial en su forma homogénea, $l(\cdot)$ representa la ligadura dada por las condiciones de frontera en términos de sus derivadas normales en la porción $\partial\Omega_{\mathbb{R}}$ de la condición de frontera $\partial\Omega$ de $\mathfrak{L}(\cdot)$, $X(\cdot)$ representa la variable de estado, la cual se fija en una región de las condiciones de frontera de Dirichlet $\partial\Omega_D$ donde el dominio de la frontera $\partial\Omega$ es permisible. Por último, se propone una solución lineal que consiste en la combinación lineal de un conjunto de funciones que es llamado *espacio de prueba* (Trial Space), al cual se le asigna el símbolo $\Psi_{\alpha}(t)$ para $1 < \alpha < N$, siendo la aproximación:

$$X^{N}(t) = \sum_{\alpha=1}^{N} \Psi_{\alpha}(t)Q_{\alpha}$$

= $\Psi_{1}(t)Q_{1} + ... + \Psi_{N}(t)Q_{N}$ (3.13)

Para hacer el error de aproximación lo más pequeño posible, se define una función que dispersa el error a través de $\Omega \cup \partial \Omega$, que representa el dominio de solución y su frontera. Esta se define como:

$$e^{N}(t) = X(t) - X^{N}(t)$$
 (3.14)

La formulación débil del error de prueba para la aproximación estaría dado:

$$\int_{\Omega} w(t) \mathfrak{L}(e^{N}) d\tau = 0, \quad \forall \ w(t)$$

$$\int_{\Omega} w(t) \mathfrak{L}\left(X - X^{N}\right) d\tau = \int_{\Omega} w(t) \mathfrak{L}\left(X^{N}\right) d\tau = 0$$
(3.15)

Para poder evaluar todas las funciones de prueba w(t) se utiliza la siguiente interpolación:

$$w(t) \approx w^{I}(t) = \sum_{\beta=1}^{I} \phi_{\beta}(t) \mathbb{W}_{\beta}$$
(3.16)

Quedando la estimación del error de aproximación como sigue:

$$\sum_{\beta=1}^{I} \mathbb{W}_{\beta} \int_{\Omega} \phi_{\beta}(t) \mathfrak{L}\left(X^{N}\right) d\tau = 0, \qquad 0 < \beta < I$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbb{W}_{\beta}} \left[\sum_{\beta=1}^{I} \mathbb{W}_{\beta} \int_{\Omega} \phi_{\beta}(t) \mathfrak{L}\left(X^{N}\right) d\tau \right] = 0, \qquad 0 < \beta < N$$
(3.17)

La primera derivada debe cumplirse para que la aproximación produzca la formulación débil deseada (Baker, 2014, Página 17-18). Ahora se introduce la implementación de una discretización del espacio de prueba, para ello se necesita definir una base para el espacio de prueba. El dominio de solución es segmentado, es decir, que se discretiza en subdominios cuya intersección sea vacía y cuya unión sea equivalente al dominio de solución.

$$\Omega = \cup \ \Omega_e \tag{3.18}$$

Se procede entonces a crear una malla computacional que consiste en la unión de los subdominios Ω_e llamados elementos finitos. La aproximación de la solución en términos de la discretización definida anteriormente se formula como:

$$X^{N}(t) = \sum_{\alpha=1}^{N} \Psi_{\alpha}(t) Q_{\alpha}$$

$$X^{h}(t) = \bigcup_{e} X_{e}(t)$$
(3.19)

En una implementación discreta de elementos finitos, se utiliza la notación funcional como un producto escalar de la siguiente manera:

$$X_{e}(t) = \{N_{k}(\cdot)\}^{T} \cdot \{Q\}_{e}$$
(3.20)

Donde $X_e(t)$ es la matriz de rigidez del elemento finito. La matriz $\{N_k(\cdot)\}^T$ es conocida como la base del espacio de prueba del elemento finito, cuyo argumento es un polinomio escrito en coordenadas locales. En el proceso de la discretización del dominio de solución, se tiene las coordenadas locales del elemento finito y la superposición de todas las matrices en el sistema de coordenadas globales es llamada matriz de rigidez del sistema.

$$\int_{\Omega} \Psi_{\beta}(t) \mathfrak{L}\left(X^{N}\right) dt = \sum_{e=1}^{N} \left[\int_{\Omega_{e}} \{N_{e}\} \mathfrak{L}\left(X_{e}^{N}\right) dt \right] = 0$$
(3.21)

La solución aproximada se basa en la hipótesis de completitud y ortogonalidad que se describe en la ecuación de *Sturm-Liouville*. Esta ecuación se describe como:

$$\mathfrak{L}(u) = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + [q(x) + \lambda r(x)] u = 0, \quad \text{en } \Omega$$

$$l(u) = a_{i1} \frac{du}{dx} + a_{i2} u = 0, \quad \partial \Omega_i, \quad i = 1, 2$$
(3.22)

Las soluciones para esta ecuación diferencial son llamadas *eigenfunciones* o autofunciones. Estas ecuaciones tienen la principal característica de que cumplen con las propiedades de completitud y ortogonalidad, es decir:

$$\int_{x_1}^{x_2} [u\mathfrak{L}(u) - w\mathfrak{L}(w)] dx = 0$$
(3.23)

Donde \mathfrak{L} es un operador autoadjunto. Sustituyendo la ecuación de Sturm-Liouville en la ecuación (3.23), se obtiene:

$$\int_{x_1}^{x_2} [u\mathfrak{L}(u) - w\mathfrak{L}(w)] dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[w \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) - u \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dw}{dx} \right) \right] dx + \int_{x_1}^{x_2} \left[w(q(x) + \lambda r(x))u - u(q(x) + \lambda r(x))w \right] dx$$
(3.24)

Donde λ es llamado eigenvalor de la ecuación diferencial. Las eigenfunciones cumplen con la siguiente propiedad:

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_{x_1}^{x_2} r(x) u_n(x) u_m(x) dx = 0$$
 (3.25)

Al sustituirse en la ecuación (3.23), se cumple la condición de ortogonalidad para n = m. La

otra propiedad a cumplirse es la completitud, es decir:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[f(x) - \sum_n^N C_n u_n \right]^2 dx < \delta, \text{ para cierto } N > 0$$
(3.26)

Donde C_n se define como:

$$C_n = \frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x) r(x) u_n(x)}{\int_{x_1}^{x_2} u_n(x) u_n(x)}$$
(3.27)

En la formulación débil para una solución por el método de los elementos finitos, se busca esas mismas características, la base del espacio de prueba debe ser compuesta de eigenfunciones que cumplan con las propiedades de completitud y ortogonalidad. Otra cualidad deseable en la forma débil de la aproximación por el método de los elementos finitos es la *extremización*, un concepto usado ampliamente en el cálculo variacional, para ello se define el funcional *I*:

$$I = \int_{\Omega} f(t, X(t), \nabla X(t)) d\tau + \lambda \int_{\partial \Omega_n} g(t, X(t)) d\sigma$$
(3.28)

En este caso, $d\tau \neq d\sigma$ son elementos diferenciales de $\Omega \neq \partial \Omega$ respectivamente, λ representa el *multiplicador de Lagrange* asociado al proceso de extremización. Ahora se pasa a definir la función local $\eta(t)$, esta función satisface el sistema de ecuaciones diferenciales conocido como *Euler-Lagrange*:

$$\frac{\partial f}{\partial X} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \nabla X}\right) = 0, \quad \text{en } \Omega$$

$$\lambda \frac{\partial g}{\partial X} - \frac{\partial f}{\partial \nabla X} \cdot \hat{n} = 0, \quad \text{en } \partial \Omega_n$$
(3.29)

Entonces, para un espacio de prueba de funciones Ψ_{α} , se puede extremizar cada elemento finito y encontrar la formulación débil para la aproximación, dando como resultado lo siguiente (Baker, 2014, Capítulo 2):

$$X^{h}(t) = \bigcup_{e}^{M} \{ N_{k}[\boldsymbol{\eta}(t)] \}^{T} \{ Q_{e} \}$$
(3.30)

Ahora se pasará a mencionar algunos autores que implementaron el método de Galerkin para resolver problemas de CFD:

Karatzas, Stabile, Nouveau, Scovazzi y Rozza (2019) en su trabajo sobre mallas dinámicas por medio del uso de técnicas de descomposición ortogonal para flujos de Stokes aplican el método de los elementos finitos haciendo uso del método de Galerkin. La base del espacio de prueba propuesta para el cálculo de apróximación es:

$$\phi_{i} = \frac{1}{N_{S}\lambda_{ii}^{u^{1/2}}} \sum_{j=1}^{N_{S}} u_{j}Q_{ij}^{u}$$

$$\chi_{i} = \frac{1}{N_{S}\lambda_{ii}^{p^{1/2}}} \sum_{j=1}^{N_{S}} p_{j}Q_{ij}^{u}$$
(3.31)

Son bases para el cálculo del campo de velocidades y presiones respectivamente. Esta aproximación queda como:

$$u^{r} \approx \sum_{i=1}^{N_{u}^{r}} a_{i}(\mu)\phi(x)$$

$$p^{r} \approx \sum_{i=1}^{N_{p}^{r}} b_{i}(\mu)\chi(x)$$
(3.32)

La característica más sobresaliente de este trabajo es el uso de un mallado dinámico flexible, lo que permite estudiar geometrías complicadas que contengan condiciones de frontera no fijas (Shift boundary method, véase la figura 3.8) y a la vez la implementación del método de Galerkin con reducción de Orden POD (PROPER ORTHOGONAL DECOMPOSITION)-Galerkin.

 Tian, Liu, Zhang y Wang (2018) en su trabajo sobre burbujas cerca de una superficie libre, modelan la dinámica de las burbujas haciendo uso del método de los elementos finitos desde un enfoque euleriano, véase la figura 3.9. El diseño de la interfaz se logra a través del método de volumen del fluido que simula la apertura y cierre de burbujas cerca de una superficie libre. El modelo teórico para su formulación débil se expresa en



Figure 3.8. Mallado implementado para resolver el problema de transporte (Karatzas, Stabile, Nouveau, Scovazzi & Rozza, 2019, Página 571)

coordenadas cilíndricas y es el siguiente:

$$\iint_{\Omega} \chi(\rho \ddot{u}\phi - p\nabla\phi)d\Omega = -\int_{\Gamma} (\chi p\hat{n}\phi)d\Gamma + \iint_{\Omega} p\hat{e}_{1}\phi d\Omega + \iint_{\Omega} \rho g\phi d\Omega$$

$$\int_{\Omega} (\chi p \Phi_{N}\Phi_{M})d\Omega \ \ddot{u}^{N} = -\int_{\Omega} (\chi \rho g\Phi_{M} - \chi p\nabla\Phi_{M})d\Omega + \int_{\Gamma} p\hat{n}\Phi_{M}d\Gamma + \iint_{\Omega} p\hat{e}_{1}\Phi_{M}d\Omega$$
(3.33)

Siendo Φ_M es llamada la función de forma (Shape Function) o las funciones de interpolación entre los nodos de la malla computacional, $\nabla \chi = \hat{e}_1$ es el vector unitario que apunta en dirección radial, \hat{n} es el vector normal a la superficie, Γ es la frontera del dominio de solución Ω . Para la aproximación se usa un modelamiento cuadrático por elementos finitos:

$$\chi(\eta,\zeta) = k_1 \eta^2 + k_2 \zeta^2 + k_3 \eta \zeta + k_4 \eta + k_5 \zeta + k_6 \tag{3.34}$$

Ahora se pasa a resolver un sistema de ecuaciones que se construye a partir del formulamiento débil propuesto en el método de Galerkin por mínimos cuadrados:

$$\frac{\partial}{\partial k} \sum_{j} [\chi(\eta_j, \zeta_j) - f_j]^2 = 0$$
(3.35)

Donde f_j representa la fracción de volumen del elemento, la cual se define como $f_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{V_i} \left[f_{i,j}^n + \sum_{m=1,4} (\Delta v_{a_i,b_i,j} - \Delta v_{i,m,j}) \right]$ para la fracción de volumen en el siguiente



Figure 3.9. Modelo esquemático de la burbuja modelada por medio del método de Galerkin con mínimos cuadrados (Tian, Liu, Zhang & Wang, 2018, Página 42)

estado n+1.

Ateshian, Shim, Maas y Weiss (2018) en su trabajo explican sobre la implementación del método de elementos finitos para la simulación de fluidos en el campo de la Biomecánica. Un "Framework" es una estructura que define la geometría y las propiedades del material o en este caso un fluido. Se busca simular el movimiento del fluido haciendo uso de técnicas CFD, en este caso a través del método de los elementos finitos de Galerkin con residuos ponderados. Una de las características más sobresalientes de su trabajo es el enfoque material de los elementos finitos, el uso de técnicas y conceptos usados en la mecánica del medio continuo. Para implementar Galerkin se utilizó la siguiente formulación débil para la integral del trabajo virtual del elemento finito:

$$\delta W = \int_{\Omega} \delta v \cdot \left[\nabla \cdot \sigma + \rho(b-a)\right] dV + \int_{\Omega} \delta J\left(\frac{\dot{J}}{J} - \nabla \cdot v\right) dV \tag{3.36}$$

En este caso a representa la aceleración, b representa las fuerzas de cuerpo, v representa la velocidad, J representa el jacobiano de movimiento y dilatación de volumen, σ representa el esfuerzo de Cauchy y por último dV representa la integral de volumen en el dominio de solución Ω . El trabajo Virtual está definido como $\delta W = \delta W_{int} - \delta W_{ext}$,



Figure 3.10. Mallado computacional para la simulación de un flujo de sangre en una arteria carótida (Ateshian, Shim, Maas & Weiss, 2018, Página 27)

la solución propuesta para este problema se basa en la linealización de la ecuación no lineal $\delta W = 0$ (Ateshian y col., 2018, Página 9), esta se define como:

$$\delta W + D\delta W[\Delta V] + D\delta W[\Delta J] \approx 0 \tag{3.37}$$

Esto se logra usando el siguiente espacio de prueba para crear la interpolación de la solución sobre el mallado propuesto:

$$v(x,t) = \sum_{a=1}^{n} N_a(x)v_a$$

$$J(x,t) = \sum_{a=1}^{n} N_a(x)J_a$$
(3.38)

La simulación es sobre el flujo de sangre dentro de una arteria carótida bifurcada, así como se muestra en la figura 3.10.

 Busto, Dumbser y Río-Martín (2021) en su artículo sobre fluidos no newtonianos y turbulentos, menciona la aplicación semi-implícita híbrida del método de los volúmenes finitos y método de Galerkin simultáneamente. La característica más importante de este trabajo es el uso de mallados escalonados para encontrar la solución numérica de las



Figure 3.11. Mallado escalonado implementado en el esquema híbrido FVM/FEM (Busto, Dumbser & Río-Martín, 2021, Página 9)

ecuaciones de Navier-Stokes de Reynolds (RANS) para flujos turbulentos incompresibles en combinación de con el modelo de turbulencia $K - \epsilon$. Sobre la implementación del método de Galerkin, se realizan las siguientes etapas:

- 1. La división del sistema de ecuaciones diferenciales parciales en cuatro subsistemas, el convectivo, viscoso, presión y fuentes. Cada término será tratado de forma diferente, el convectivo que se define como $\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}^c = 0$ de forma explícita, en cuanto al término viscoso que se define como $\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}^v = 0$ y de presión que es $\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}^p = 0$ de forma implícita. El término de la fuente es la ecuación diferencial ordinaria $\frac{\partial w}{\partial t} - \mathbf{S}(w) = 0$.
- 2. El diseño de la malla es triangular y está basado en un esquema de híbrido usando el método de los volúmenes finitos y el método de Galerkin. Esto se logra creando un sistema de nodos que une los baricentros de cada elemento finito, mientras el otro sistema de nodos se encarga de definir las fronteras que separan a cada elemento finito, esto permite definir las fronteras de cada volumen de control, esto se muestra en la figura 3.11.
- 3. Se procede al proceso de discretización de cada subsistema, es decir, primero la parte convectiva y luego la parte viscosa, para luego definir los polinomios de interpolación que serán usados para proponer la forma débil de la aproximación

deseada. En la discretización explícita se utiliza el método de los volúmenes finitos:

$$W^* = W^n - \Delta t \nabla \cdot \boldsymbol{F}^c(W^n)$$

$$W^*_i = W^n_i - \frac{\Delta t}{|C_i|} \int_{\Gamma_i} \boldsymbol{F}^c(W^n) \vec{n}_i dS$$

$$W^*_i = W^n_i - \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_{C_j \in K_i} \|n_{ij}\| \phi(\bar{W}^n_i, \bar{W}^n_j, \hat{n}_{ij})$$
(3.39)

Donde C_i son los volúmenes de control, ϕ es la función de interpolación en la cual se hace uso de la metodología ADER (ARBITRARY DERIVATIVE) local. Para la discretización de la parte implícita como ser el subsistema viscoso que se define en forma discreta como $W^{**} = W^* - \Delta t \nabla \cdot \mathbf{F}^v(W^*)$, se procede con la siguiente formulación débil:

$$\int_{\Omega} W^{**} \cdot z dV - \Delta t \int_{\Omega} \mathbf{F}^{v}(W^{*}) \cdot \nabla z dS = \int_{\Omega} W^{*} \cdot z dV - \Delta t \int_{\Gamma} \mathbf{F}^{v}(W^{n+1}) \cdot \vec{n} z dS$$
(3.40)

De igual forma, para el subsistema de presiones, se discretiza de forma implícita y luego usando integración por partes se propone la formulación débil de la discretización en términos de los polinomios interpolantes.

• T. He, Zhang y Zhang (2018) en su trabajo proponen una metodología basada en celdas donde se implementa un método de los elementos finitos refinado, esto consiste en el uso del gradiente refinado, el cual consiste en aproximar las derivadas de primer y segundo orden utilizando una ponderación basada en la asignación de pesos a cada nodo de la malla, estimando un valor promedio en la coordenada de más importancia en el modelo. En esencia se trata de construir una matriz de rigidez suavizada, usando el mismo concepto implementado en método de Galerkin. Primero se define un dominio de solución en dos dimensiones, el cual se discretiza en elementos con forma de cuadrilátero,

es decir, 4 nodos (Q4), el gradiente suavizado queda descrito así:

$$\tilde{\nabla}b(x_c) = \int_{\tilde{\Omega}} \nabla b(x) W(x - x_c) d\Omega$$
(3.41)

Donde cada elemento finito es refinado y subdivido en muchos sub-elementos $\tilde{\Omega}$. ∇ representa el operador gradiente, $\tilde{\nabla}$ representa el gradiente refinado y W es la función peso. Se procede entonces a utilizar la siguiente propiedad de la divergencia, $\nabla \cdot (\rho F) = (\nabla \rho) \cdot F + \rho (\nabla \cdot F)$, y luego se aplica el teorema integral de la divergencia de Gauss, quedando esto:

$$\tilde{\nabla}b(x_c) = \int_{\tilde{\Gamma}} b(x)\hat{n}(x)W(x-x_c)d\Gamma - \int_{\Omega} b(x)\nabla \cdot W(x-x_c)d\Omega$$

$$= \frac{1}{A_c}\int_{\tilde{\Gamma}} b(x)\hat{n}(x)d\Gamma$$
(3.42)

Al definir $W = 1/A_c$, el segundo término de la integral desaparece, quedando el valor de integral mostrado para valores de $\tilde{\Omega}$ deseados. El procedimiento en el método de Galerkin lleva al siguiente planteamiento para la aproximación:

$$\tilde{\nabla}b(x_c) = [\tilde{\nabla}N_I(x_c)]\bar{b}_I = \left[\frac{1}{A_c}\int_{\tilde{\Gamma}}N_I(x)\hat{n}(x)d\Gamma\right]\bar{b}_I$$
(3.43)

Usando la aproximación para una cuadratura gaussiana de un punto, se puede realizar la siguiente ponderación o aproximación:

$$\tilde{\nabla}N_I(x_c) = \frac{1}{A_c} \sum_{i=1}^4 N_I(X_i^{GP}) \hat{n}(X_i^{GP}) l_i$$
(3.44)

Donde 4 representa el número de segmentos que contiene un cuadrilátero en cierto $\tilde{\Omega}$, X_i^{GP} es el punto de Gauss en el $\tilde{\Gamma}_i$ segmento del cuadrilátero, l_i es el tamaño del segmento $\tilde{\Gamma}_i$. El mallado es refinado de tal manera de encontrar una mejor aproximación en un punto en especial llamado X^{GP} , el punto gaussiano, así como se ve en la figura 3.12. En su artículo muestra diferentes aplicaciones, en entre ellas la aplicación del



Figure 3.12. Descripción del elemento finito en un mallado con gradiente refinado (T. He, Zhang & Zhang, 2018, Página 3)

gradiente refinado para simular un flujo incompresible con técnicas CFD.

• Xu, Tang, Xu, Feng y Guo (2017) en su trabajo implementan HopeFoam para el uso del método de Galerkin discontinuo, esta es una extensión de OpenFoam para el cálculo de problemas de transporte haciendo uso de técnicas CFD. Primero propone el sistema de ecuaciones diferenciales parciales para un flujo incompresible, es decir, la ecuación de continuidad y la ecuación de conservación del momentum lineal. Se propone un modelo de turbulencia basado en el uso de las ecuaciones de Navier-Stokes de Reynolds Promedio (RANS). La discretización es un sistema nodal lagrangiano de la siguiente forma:

$$u_k = \sum_{i=1}^{N_p} u_{k,i} l_{k,i}(x), \qquad k = 1, 2, 3, 4$$
(3.45)

Donde N_p es el número de funciones en el espacio de prueba. El diseño de la interfaz se basa en el uso de la estructura heredada de OpenFoam, esto puede verse en la figura 3.13.

En la tesis doctoral de González Gutierrez (2001) se implementa el método de los elementos finitos usando el método de las características. Consiste en una descripción lagrangiana del fluido, esta técnica se basa en la integración del término convectivo (Se formula un problema variacional con una ecuación integral). La formulación débil sé lleva a cabo mediante una formulación de elementos finitos con sus polinomios de


Figure 3.13. Diseño de la interfaz para el uso de Galerkin con OpenFoam (Xu, Tang, Xu, Feng & Guo, 2017, Página 406)

interpolación.

 Este artículo muestra una simulación FSI (Fluid-Structure Interaction), presentada por F. He, Dai, Huang y Wang (2017), La simulación consiste en encontrar las presiones sobre el tubo vertical que se encuentra bajo la influencia de un flujo interno y un flujo externo, se usa un ensamble basado en la discretización de Galerkin.

Gassner y Winters (2021) en su trabajo sobre la implementación del método de Galerkin discontinuo, hace mención sobre su estabilidad y acotamiento que debe considerarse al momento de la discretización del dominio de solución. En la medida se fueron discutiendo artículos sobre la implementación de Galerkin, dos puntos claves determinan la estabilidad del método:

- La elección del espacio de prueba o funciones de prueba para formular la interpolación o Ansatz.
- La elección del mallado es muy crítica para lograr estabilidad y convergencia. La integración que se proponga en el formulamiento variacional definirá la manera de como resolver las integrales y qué técnicas serán las más apropiadas.

El reto al final es la manipulación del término convectivo (hiperbólico) y como suavizar y aproximar su contribución. La mayor desventaja que presenta el método es que no siempre se puede encontrar una formulación débil que se ajuste correctamente a la geometría del problema, haciendo que el método diverja y se vuelva inestable debido a que el término convectivo no fue correctamente discretizado. Para finalizar, muchas aplicaciones del método de Galerkin han sido observadas en la Hidráulica y en la Ingeniería costas (Viet, Xiping, Tung, Conference & Coasts, 2019).

3.3 Modelos de turbulencia

Los modelos de turbulencia a implementar son modelos de dos ecuaciones, su formulación consiste en la hipótesis de mezclado de las líneas de campo de velocidades, longitud de los vórtices y tasa de disipación de energía.

El proceso consiste en aproximar la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes, esto se lleva a cabo descomponiendo las variables de flujo en dos partes, la parte *promedio* y la parte *fluctuante*, luego sustituyendo estos valores en las ecuaciones de Navier-Stokes se obtiene El *tensor de esfuerzos de Reynolds*, por último se procede a encontrar las ecuaciones adicionales que cierran el problema y que permiten aproximar la solución (Alfonsi, 2009). Sobre el problema de cerradura de las ecuaciones de promedio temporal de Navier-Stokes (RANS), Laurendeau and F Kafyeke E and Tuncer Cebeci y P.Shao (2005, página 81 y 82), explican que el formulamiento de las ecuaciones adicionales, estas ecuaciones modelan el comportamiento de los esfuerzos viscosos debido a la turbulencia y su geometría, es decir, como se mezclan las líneas de campo formando el campo de vorticidades, esto consiste en:

 Longitud de mezclado (Mixing Length), básicamente las suposiciones de Prandtl (Febrero 4 del 1875 – Agosto 15 del 1953), las cuales definen la razón de cambio de los vórtices, como su geometría cambia de forma espacial:

$$-\rho \overline{\dot{u}_i \dot{u}_j} = \rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{3.46}$$

 Viscosidad de los vórtices (eddy viscocity), básicamente las suposiciones de Boussinesq (Marzo 13 de 1842 – Febrero 19 del 1929), define como será el comportamiento de los esfuerzos viscosos que surgen debido a la turbulencia, se supone un comportamiento isotrópico:

$$-\overline{\rho \acute{u_i} \acute{u_j}} = \rho \varepsilon_m \frac{\partial u}{\partial y} \tag{3.47}$$

Los parámetros l y ε_m aparecerán en las ecuaciones que describirán la energía en cascada

liberada en un flujo turbulento, en esto consiste la *tasa de disipación de energía*, estas ecuaciones son esencia el modelo de turbulencia junto con las ecuaciones de promedio temporal. Los siguientes modelos de turbulencia son los más conocidos a través de la literatura:

 Modelos algebraicos (Zero-Equation Model): Este modelo se caracteriza por la descomposición de los esfuerzos de Reynolds en isotrópicos y deviatóricos, definidos así:

$$\tau_{ij} = \frac{2}{3} K \delta_{ij} - \nu_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$
(3.48)

Donde $K = \frac{1}{2}\overline{\dot{u}_i\dot{u}_j}$, este término representa la energía cinética debido a la turbulencia. ν_t es llamada la *viscosidad de vórtice* o de turbulencia, esta se define como:

$$\nu_T = l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \tag{3.49}$$

Donde $l_m = \kappa y$, donde κ es llamada la constante de Von Kármán, de aquí se puede deducir la famosa regla de la barrera (Law of the Wall) que se define como $u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C$ (Wilcox, 2006, Página 15). Como ejemplos de este modelo se puede mencionar el modelo de Cebeci-Smith (Alfonsi, 2009).

 Modelos de una ecuación (One-Equation Model): Este modelo es singular por su modelamiento en cuanto a la energía cinética de turbulencia y las escalas de velocidad de turbulencia, la ecuación que representa el transporte de energía queda escrita así:

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \overline{u}_i \frac{\partial K}{\partial x_i} = P_K - \varepsilon - \frac{\partial D_i}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial x_i}$$
(3.50)

Donde P_K , ε y D_i representan las variables que definen el balance de energía por turbulencia y la tasa de cambio en el campo de velocidades debido a la turbulencia, el modelado de estos términos es el siguiente: (I) P_K representa la tasa de producción de energía cinética por turbulencia:

$$P_K = -\tau_{ij} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \tag{3.51}$$

(II) ε representa la tasa de disipación de energía debido a la turbulencia:

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial \acute{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \acute{u}_i}{\partial x_j}} = C \frac{K^{3/2}}{l_0}$$
(3.52)

(III) D_i representa el término difusivo de turbulencia:

$$D_i = \frac{1}{2}\overline{\vec{u}_k \vec{u}_k \vec{u}_i} + \overline{\vec{p}}\overline{\vec{u}_i} = -\frac{\nu_T}{\sigma_K}\frac{\partial K}{\partial x_i}$$
(3.53)

Donde $\nu_T = l_0 k^{1/2}$, esta formulación de la viscosidad de vórtice se le atribuye a Kolmogorov y Prandtl.

Ejemplos sobre este modelo se observan en trabajos como el de *Barth y Baldwin* (Wilcox, 2006, Página 25 y 26).

• Modelos de dos ecuaciones (Two-Equation Model): Como su nombre los indica, este modelo se diferencia del anterior por la formulación de dos ecuaciones de transporte independientes que se resuelven para dos variables de transporte diferentes, una ecuación por cada variable de transporte, que son K y ε respectivamente. La ecuación adicional de transporte que modela la disipación de energía (ε) es la siguiente:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u}_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = P_{\varepsilon} + D_{\varepsilon} - \Phi_{\varepsilon} + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_i \partial x_i}$$
(3.54)

El modelado de los términos que aparecen en esta nueva ecuación se lleva a cabo de la siguiente manera:

(I) P_{ε} es llamado el término de producción de energía, el cual asume que la tasa

de disipación de energía debido a la turbulencia, es gobernada por el nivel de anisotropía existente en los esfuerzos de Reynolds y el gradiente medio de velocidad:

$$P_{\varepsilon} = -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} \tau_{ij} \frac{\overline{\dot{u}}_i}{x_j} \tag{3.55}$$

(II) D_{ε} es llamado el *término difusivo*, se implementa la hipótesis de un gradientetransporte para su modelado:

$$D_{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_{\varepsilon}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right)$$
(3.56)

(III) Φ es llamado el término de destrucción, la destrucción de disipación de energía debido a la turbulencia es definida por la escala de vórtices y longitud de mezclado, es decir que la turbulencia ocurre de forma isotrópica:

$$\Phi_{\varepsilon} = C_{\varepsilon^2} \frac{\varepsilon^2}{K} \tag{3.57}$$

Ejemplos de este modelo son el modelo $K - \varepsilon$ y el modelo $K - \omega$. Existen variantes del modelo $K - \varepsilon$ como ser el modelo *realizable* (Realisable $K - \varepsilon$ Model) de *Shih (1994)*. Otra variante muy interesante del modelo de turbulencia $K - \varepsilon$ es el modelo RNG (RE-NORMALISATION GROUP) por Yakhot y Orszag (1992). Sobre el modelo $K - \omega$, este se diferencia del modelo $K - \varepsilon$ por el ajuste de la escala temporal, $\omega = \varepsilon/K$, este valor se sustituye en la ecuación adicional (3.54).

 Modelos de esfuerzo-transporte (Stress-Equation Model): Este modelo es llamado también Modelo τ_{ij} – ε. La principal diferencia de este modelo de turbulencia en comparación con los demás es el modelado de la ecuación de transporte de Reynolds y la ecuación de transporte para la tasa de disipación de energía (2.127). Para este modelo, las ecuaciones antes mencionadas quedan así:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \overline{u}_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} = P_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} - \frac{\partial C_{ijk}}{\partial x_k} + \nu \frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial x_k \partial x_k}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u}_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} \tau_{ij} \frac{\overline{u}_i}{x_j} + C_{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{K}{\varepsilon} \tau_{ij} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_i \partial x_i}$$
(3.58)

Dependiendo de la situación, los términos de la ecuación de transporte de Reynolds, a saber, Π_{ij} , ε_{ij} , y C_{ijk} tendrán cierta forma y comportamiento, por ejemplo, suponer un comportamiento no lineal entre la presión y los esfuerzos de los vórtices (Alfonsi, 2009). Véase el trabajo de Sultan, Rahman, Rushd y Zendehboudi (2017), en su investigación simulan un flujo multifásico granular usando un esquema euleriano a través de una tubería anular. Usando un modelo basado en los esfuerzos de Reynolds RSM (REYNOLD STRESS MODEL), encuentra las pérdidas de altura de presión en el flujo, corroborando sus resultados con la literatura existente sobre el tema.



Figure 3.14. Ilustración de un flujo laminar y turbulento con su respectivo número de Reynolds

3.3.1 Uso del modelo de turbulencia $K - \varepsilon$

Los autores siguientes han utilizado modelos de turbulencia $\mathbf{K} - \varepsilon$ para simular problemas de transporte usando técnicas CFD:

N. M. Martins, Soares, Ramos y Covas (2016) formulan una simulación en 3D para un golpe de ariete ("Waterhammer" en inglés) en válvulas de control. El fin es predecir cuando estos cambios bruscos de presión sucederán en una red compleja de tuberías a alta presión en sistemas hidroeléctricos. Para el modelado con CFD se utilizó el Modelo de turbulencia K – ε:

$$\rho \frac{D\bar{u}_i}{Dt} = \rho \mathbf{B}_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i u'_j} \right)$$
(3.59)

Los esfuerzos provocados por la turbulencia están dados por:

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} \tag{3.60}$$

Para los modelos de turbulencia usando las ecuaciones de promedio temporal *RANS*, existen dos formas de describir los *esfuerzos de Reynolds* y estos son los modelos $K - \varepsilon$ y $K - \omega$. En este caso se utilizó el modelo $K - \varepsilon$, las ecuaciones son:

$$\frac{\tau_{ij}}{\rho} = -\bar{u}'_i \bar{u}'_j = 2\nu_T S_{ij} - \frac{2}{3} K S_{ij}$$
(3.61)

Donde la energía cinética de la turbulencia, K, se define como:

$$K = \frac{1}{2}\overline{u_i'u_i'} \tag{3.62}$$

Y ν_T es llamada la *viscosidad-eddy cinemática* y S_{ij} es el tensor de las deformaciones, dado por:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u_j}}{\partial x_i} \right)$$
(3.63)

Las ecuaciones de transporte adicionales para este model
o $K-\varepsilon$ son:

$$\frac{\partial(\rho K)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho K u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] + G_K + G_b - \rho \varepsilon - Y_M + S_K \quad (3.64)$$

у

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\varepsilon u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j} \right] + \rho C_1 S\varepsilon - \rho C_2 \frac{\varepsilon^2}{K + \sqrt{\nu\varepsilon}} + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{K} C_{3\varepsilon} G_b + S_{\varepsilon}$$
(3.65)

Donde μ_t es la viscosidad de turbulencia dada por $\mu_t = \rho C_{\mu} K^2 / \varepsilon$, G_k representa la energía cinética debido al gradiente de velocidad promedio, G_b es la energía cinética debido a la fuerza boyante, Y_M representa la contribución debido a la fluctuación de la dilatación en turbulencia compresible para la tasa de disipación de energía en general, S_K y S_{ε} son variables definidas por el autor del artículo. Los valores σ_K y σ_{ε} son respectivamente el número de Prandtl de turbulencia para k y ε . $C_2, C_{1\varepsilon}$ y $C_{3\varepsilon}$ son constantes. Los parámetros C_1 , ν y S, están dados por:

$$C_{1} = \max\left[0,43, \frac{\nu}{\nu+5}\right]$$

$$\nu = S\left(\frac{K}{\varepsilon}\right)$$

$$S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$$
(3.66)

Este modelo está basado en la *hipótesis de Boussinesq*, que asume el valor de μ_t como una cantidad isotrópica, que en algunos casos no necesariamente es cierto.

- Jines (2017) en su trabajo simula un flujo incompresible a través de un codo a 90 grados.
 Esto son el fin de calcular la pérdida de altura de presión en dicho accesorio. Se usa una variante del modelo K ε, es el modelo K ε realizable.
- Nimadge y Chopade (2017) en su artículo explican como simular un flujo incompresible

a través de una junta en T. En su trabajo utiliza un modelo $K - \varepsilon$ para resolver las ecuaciones de movimiento del flujo, esto con el fin de encontrar las caídas de presión por el accesorio mencionado.

Yeoh, Liu, Tu y Timchenko (2011b) indagan en la eficiencia de una turbina en una planta hidroeléctrica. Utilizan técnicas CFD para encontrar la pérdida de altura de presión en el flujo de la turbina. Usan un modelo K – ε para realizar esto, las ecuaciones de transporte para este caso fueron:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) - \nabla \cdot (\mu_{eff} \nabla \mathbf{U}) = \nabla p' + \nabla \cdot (\mu_{eff} \nabla \mathbf{U})^T + \mathbf{B}$$
(3.67)

Donde:

$$\mathbf{U} = \bar{U} + u$$

$$\bar{U} = \int_{t}^{t+\Delta t} \mathbf{U} dt$$

$$p' = p + \frac{2}{3}\rho K$$

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_{t}$$

$$\mu_{t} = C_{\mu}\rho \frac{K^{2}}{\varepsilon}$$
(3.68)

Las ecuaciones de transporte que modelan la turbulencia son:

$$\frac{\partial \rho K}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}K) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_K} \right) \nabla K \right] + P_K - \rho \varepsilon$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}\varepsilon) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + \frac{\varepsilon}{K} (C_{\varepsilon 1} P_K - C_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon)$$
(3.69)

Donde $C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, \sigma_K$ y σ_{ε} son constantes, P_K es la producción de turbulencia debido a

las fuerzas viscosas, que se expresa como:

$$P_{K} = \mu_{t} \nabla \mathbf{U} \cdot (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^{T}) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{U} (3\mu_{t} \nabla \cdot \mathbf{U} + \rho K) + p_{Kb}$$
(3.70)

- Doroshenko, Doroshenko, Zapukhliak, Poberezhny y Maruschak (2019) en su trabajo proponen una simulación de un flujo multifásico a través de una tubería de gas con accesorios, como ser codos y Tees. En su modelo utilizó un esquema lagrangiano donde se empleó el modelo de turbulencia K – ε, llamado también modelo de Reynolds alto, un modelo basado en el uso de las ecuaciones de promedio temporal RANS.
- Osman y Ovinis (2019) en su investigación sobre chorros flotantes usan el modelo K ε para simular el flujo de un derrame de aceite sobre el océano. El proceso de la simulación involucra las siguientes etapas:
 - 1. Definir la geometría del chorro sobre el océano.
 - 2. El diseño del mallado.
 - 3. Definir las condiciones de frontera.
 - 4. Modelado del flujo usando las ecuaciones de Navier-Stokes de promedio temporal (RANS) y el modelo de turbulencia $K \varepsilon$.
- Rodríguez (2016) en su tesis, modela un descargador a vórtice que lleva un flujo turbulento usando las ecuaciones de Navier-Stokes de promedio temporal (RANS). Uno de los aspectos más interesantes de su trabajo es la *escala de turbulencia* utilizada en el modelo. Utiliza, primero, celdas de 0.3m de longitud y luego vuelve a simular el flujo con 0.1m de longitud, establece una relación bastante importante entre el diseño del mallado y la geometría del descargador, en esto influye mucho el modelo a escala escogido usando los principio de similitud dinámica. La técnica CFD implementada fue el modelo de turbulencia $K - \varepsilon$, RNG $K - \varepsilon$ y el enfoque adaptativo LES.

- El ensamble presentado por Januário y Maia (2020) en su artículo sobre una simulación CFD-DEM (DISCRETE ELEMENT METHOD) para una tubería que conduce desperdicios de minas, carbón o cualquier otro mineral, simulan la sedimentación o el depósito de sedimentos en el fondo de la tubería mencionada anteriormente, esto es requerido y necesario para el diseño de tuberías de lodos o flujos bifásicos (sólido-líquido) es decir, flujos de líquidos con partículas sólidas. La técnica CFD implementada en el problema (solver) es el uso de los elementos finitos discretos DISCRETE ELEMENT METHOD, esto para la discretización y mallado del problema. El modelo de turbulencia implementado es él $K \varepsilon$ junto con las ecuaciones de promedio temporal (RANS). La simulación se realizó en tres códigos de uso libre, entre ellos Open ∇ FOAM[®]. El autor brinda detalles sobre el equipo implementado para el desarrollo de la simulación:
 - 1. Procesador de 3.4 GHZ
 - 2. Memoria RAM de 32 GB
 - 3. Disco Duro de estado sólido (SSD) de 120 GB
 - 4. Tarjeta de video de 3 GB (GPU DDR5 card)
- El modelo $K \varepsilon$ también puede implementarse para simular la turbulencia de flujos externos, véase el trabajo de Sanches (2004) sobre la aplicación de técnicas CFD para diseñar la resistencia al viento de instalaciones deportivas . El ensamble consiste en el uso de una malla basada en el método de los volúmenes finitos para calcular el impacto del viento (carga de viento por succión) sobre una estructura, en este caso un estadio.
- Una variante muy importante y también muy reciente del modelo K ε es el modelo R – K – ε implementado por Ngamalieu (2015) en su trabajo sobre vertederos y flujos turbulentos. Una de las principales diferencias del modelo antes mencionado es la

modelación de la viscosidad turbulenta:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon}$$

$$C_\mu = \frac{1}{A_0 + A_s \frac{kU^*}{\varepsilon}}$$
(3.71)

En el ensamble se presenta también el uso del método de los volúmenes fraccionados, VOF (VOLUME OF FRACTION), que introduce el uso de una variable $c, 0 \le c \le 1$, que varía según la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial u_j c}{\partial x_j} = 0, \quad 0 \le c \le 1$$
(3.72)

Esta variable define el volumen de agua por celda en el mallado utilizado en el solver. El autor, además de todo lo anterior, implementa técnicas de programación en paralelo, esto con el fin de usar con eficacia los recursos computacionales disponibles.

- Una de las variantes del modelo K ε es el modelo realizable (Realizable K ε model), este modelo es implementado para el cálculo de grandes cambios de presión en sistemas de tuberías, esto es mostrado en la investigación de N. M. C. Martins, Brunone, Meniconi, Ramos y Covas (2017), el uso de este modelo implica que los esfuerzos de turbulencia cumplen con cierta restricción matemática en su modelado.
- Otra de las variantes del modelo K ε, es el modelo RNG K ε, en este caso es implementado para simular la descarga lateral de un canal para control de inundaciones, es una abertura lateral con forma trapezoidal, reciben el nombre de vertederos (Ghaderi, Dasineh, Abbasi & Abraham, 2020).
- Una vez más, se muestra un ejemplo del modelo K ε realizable para el cálculo de presiones transitorias, o diferenciales de presión altos, como ser golpes de ariete, esto realizado en el ensamble propuesto por N. M. Martins y col. (2016), implementa la variante K ε realizable para modelar la turbulencia, utiliza un mallado realizado en

software CAD (por ejemplo AutoCAD) basado en el método de los volúmenes finitos y el algoritmo SIMPLE que relaciona la presión y la velocidad.

 Una de las aplicaciones más interesantes del modelo K – ε es en el cálculo de velocidades en un flujo de calor a través de un intercambiador resolviendo Las ecuaciones de Navier-Stokes con promedio temporal, Giraldo (2017) expone el proceso de mallado y resolución con el modelo K – ε, utiliza el programa de post-procesado *ParaView* para realizar sus gráficos.

3.3.2 Uso del modelo de turbulencia $\boldsymbol{K} - \boldsymbol{\omega}$

Los autores siguientes han implementado el modelo turbulencia $K - \omega$ para resolver problemas de transporte:

 Stefanski y col. (2018) en su artículo sobre el uso de modelos de turbulencia junto con el método de los elementos finitos para el cálculo de problemas de transporte con CFD, implementan una versión modificada del modelo K – ω, en el cual se pretende mejorar el proceso de discretización con el método de los elementos finitos. La formulación estándar del modelo es la siguiente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho H u_j) = -P + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \tau_{ij} - q_j) + \beta^* \rho \omega k \qquad (3.73)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho k u_j) = P + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \beta^* \rho \omega k$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \omega u_j) = \frac{\gamma \omega}{k} P + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] - \beta \rho \omega^2$$

Donde E es la energía total, H es la entalpía, k es la energía cinética. El esfuerzo τ_{ij} está dado por:

$$\tau_{ij} = 2(\mu + \mu_t)\overline{\mathbf{S}}_{ij} - \frac{2}{3}\rho k\delta_{ij}$$

$$\overline{\mathbf{S}}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$
(3.74)

La viscosidad del vórtice (Eddy Viscocity) μ_t y el factor de corrección de Kato-Launder

P, están definidos como sigue:

$$\mu_{t} = \frac{\rho \kappa}{\omega}$$

$$P = \mu_{t} \Omega S - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{i}}{\partial x_{j}} - \frac{\partial u_{j}}{\partial x_{i}}\right)^{2}}$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{i}}{\partial x_{j}} + \frac{\partial u_{j}}{\partial x_{i}}\right)^{2}}$$
(3.75)

Los factores $\sigma_k, \sigma_\omega, \gamma, \beta^*, \beta$ tienen los siguientes valores por defecto:

7

$$\sigma_k = 0.5$$
 $\sigma_\omega = 0.5$ $\beta^* = 9/100$ $\gamma = 5/9$ $\beta = 3/40$ (3.76)

La modificación del modelo estándar $K - \omega$, consiste en la tasa de producción de energía k y la formulación de la viscosidad de vórtice μ_t , quedando el siguiente modelo:

$$k = \psi(\tilde{k}, 0, \epsilon_k)\tilde{k}$$

$$\tilde{\mu}_t = \mu_t - \frac{\rho\psi(-\tilde{k}, 0, \epsilon_k)\tilde{k}}{\omega_{\infty}}$$

$$D_k = \beta^* \rho \omega_{\infty} \psi(-\tilde{k}, 0, \epsilon_k)\tilde{k}$$
(3.77)

La ecuación de energía modificada queda así:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\tilde{k}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\tilde{k}u_j) = P + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu + \sigma_k\tilde{\mu}_t)\frac{\partial\tilde{k}}{\partial x_j}\right] - \beta^*\rho\omega k - D_k$$
(3.78)

Esta modificación permite obtener una mejor estabilidad al momento de aproximar la solución y el fenómeno de turbulencia, el artículo incluye resultados de la NASA en la simulación de un alerón perteneciente a un Onera M6 transónico.

• Una variante muy utilizada en cálculos de transportes de fluidos con técnicas CFD es el uso del modelo $K - \omega$ SST (SHEAR STRESS TRANSPORT), usado por (Devolder,

Troch & Rauwoens, 2018) en su artículo sobre el rompimiento de olas simuladas en $Open\nabla FOAM^{\textcircled{B}}$. El modelo consiste en lo siguiente:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial u_j k}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \sigma_k \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] = P_k - \beta^* \omega k$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial u_j \omega}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \sigma_\omega \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] = \frac{\gamma}{\nu_t} G - \beta^* \omega^2 + 2(1 - F_1) \frac{\sigma_{\omega^2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}$$

$$P_k = \operatorname{Min} \left(G, 10\beta^* k \omega \right)$$

$$G = \nu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\operatorname{Max}(a\omega 1, SF_2)}$$
(3.79)

El modelo fue idealizado en 1992 por *Menter*, provee una mejor aproximación en situaciones donde se toma en cuenta el efecto del esfuerzo cortante debido a la turbulencia y el gradiente adverso de presión que separa el flujo, mejorando así la aproximación.

- Un ensamble muy interesante y bastante original fue el presentado por Bassi, Crivellini, Rebay y Savini (2005) en su artículo sobre el uso de Galerkin discontinuo junto con la técnica de los volúmenes finitos para resolver las ecuaciones de promedio temporal de Reynolds. El objetivo fue mejorar la aproximación usando un espacio de prueba y un mallado apropiado.
- Una de las aplicaciones de las ecuaciones de Navier-Stokes con promedio temporal de Reynolds es en la simulación de saltos hidráulicos. El autor utiliza varios métodos para comprobar sus resultados, utiliza Open√FOAM[®] para realizar la simulación. Entre los modelos escogidos utiliza K − ω y K − ω SST (Viti, Valero & Gualtieri, 2018).

3.4 Implementación de OpenVFOAM[®] para simular flujos turbulentos

En el uso de técnicas CFD para simular flujos turbulentos existen muchas opciones en software, alguna opción tal vez haya sido mencionada con anterioridad. Para fines de esta investigación se hará uso del Open ∇ FOAM[®]. Es un software libre de código abierto que permite simular gran cantidad de flujos. Se puede descargar de forma gratuita en https://openfoam.org/. Algunos ejemplos sobre su uso y aplicación son los siguientes artículos:

- En el campo de la Hidrodinámica se puede programar en Open√FOAM[®] para calibrar y adaptar los solvers y poder resolver problemas específicos como ser problemas de flujos transónicos y flujos incompresibles (Matvey V. and Kraposhin and Daniil A. Ryazanov and Kirill A. Vatutin & Elizarova, 2018).
- En el área de Transferencia de calor, Fadiga, Casari, Suman y Pinelli (2020) presentan en su artículo *CoolFOAM*. Una librería que usa el código fuente de Open√FOAM[®] para extender su aplicación al campo de la Termodinámica.
- Una de las características más deseables y atractivas de Open√FOAM[®] es la capacidad de realizar ensambles con distintas librerías. Un ejemplo de esto se muestra en el trabajo de Zerbib, Lassen Mebarek y Escouflaire (2016). En su artículo publicado muestra como usar el método de los elementos finitos con distintas librerías disponibles de Open√FOAM[®].
- Uno de los campos donde Open√FOAM[®] es utilizado, es en el campo de la Aéreoacústica. El autor en su artículo presenta su propia librería para realizar simulaciones en Open√FOAM[®] (Epikhin, Evdokimov, Kraposhin, Kalugin & Strijhak, 2015).
- La creación de nuevas librerías para cálculos con técnicas CFD es una de las características más sobresalientes de Open√FOAM[®], al ser de código abierto se puede formular nuevos solvers para adaptar el código fuente de Open√FOAM[®] a nuevos

problemas de transporte que involucren las ecuaciones de Navier-Stokes. Mukha, Rezaeiravesh y Liefvendahl (2019) en su artículo dan a conocer la creación de una librería en Open ∇ FOAM[®] para simular un flujo haciendo uso del enfoque LES (large eddy simulation) de aproximación.

- Open√FOAM[®] ofrece librerías y solvers que dan la posibilidad de usar técnicas de programación en paralelo (Multi-thread). Ejemplo de esto se observa en el artículo publicado por Liu y col. (2019) donde proponen un solver multi-escala para simular un flujo viscoelástico.
- Otra fabulosa opción que ofrece Open√FOAM[®] es el uso de solvers multifásicos. Por dar un ejemplo, Westermaier y Kowalczyk (2020) comparte su ensamble para simular flujos multifásicos en su artículo sobre flujos no newtonianos, la librería se llama compressibleInterFoam.
- La creatividad y la evolución de los cálculos en Open√FOAM[®] son sorprendentes, para mencionar se tiene el artículo de Mangani, Buchmayr, Darwish y Moukalled (2017) sobre transferencia de calor, donde propone un ensamble con la formulación arbitraría euleriana-lagrangiana para simular un fluido turbulento, utiliza el modelo de turbulencia K−ω SST y formula la discretización del mallado haciendo uso de librerías ya existentes en Open√FOAM[®].
- Para fortalecer la confianza en el uso de Open√FOAM[®], muchos autores han tratado de comparar sus resultados con otros software disponibles, para citar un ejemplo, Welahettige y Vaagsaether (2018) en su investigación sobre flujos compresibles en un mezclador, compara sus resultados obtenidos en Open√FOAM[®] con los resultados obtenidos en ANSYS FLUENT. Logra obtener gráficos en ParaView muy parecidos a los obtenidos en FLUENT.
- Peña García (2017) en su investigación implementa $Open \nabla FOAM^{\textcircled{B}}$ para simular numéri-

camente un sistema de propulsión. Para el mallado en tres dimensiones, utiliza la librería snappyHexMesh y el solver pimpleDyMFoam para completar la simulación.

- En el campo de la Ingeniería costera, en su artículo Li, Wang, Yan, Gong y Ma (2018) presentan su simulación de ondas (olas del mar) inducidas por flujo de corriente haciendo uso dé Open√FOAM[®]. Aproxima la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes por medio de un modelo cuasi arbitrario euleriano-Lagrangiano de elementos finitos QALE-FEM (QUASI-ARBITRARY LAGRANGIAN EULERIAN FINITE ELEMENT METHOD). El solver implementado es *interDyMFoam* a la vez que implementa un mallado dinámico para simular el oleaje.
- En la simulación de un flujo de gas (Jet), Epikhin, Kraposhin y Vatutin (2019) implementan en su artículo las siguientes librerías de Open√FOAM[®], *pimpleCentralFoam*, *dbnsTurbFoam*, *QGDFoam*, y *libAcoustic*.
- Para simular flujos multifásicos, OpenVFOAM[®] cuenta con una librería llamada *multiphaseEulerFoam*. Ejemplo de esto se puede apreciar en el trabajo de F.Tocci (2016), donde simula un flujo de gas-líquido por una tubería vertical haciendo uso de un enfoque completamente euleriano del fluido junto con el método de volúmenes fraccionados (VOF).
- En la industria minera se necesita muchas veces trasladar flujos con lodos o partículas suspendidas, se puede utilizar Open√FOAM[®] para simular flujos de este tipo (Slurry Flows). Por citar un caso, en el artículo de Schouten, Keetels y van Rhee (2019) donde implementan la librería *TwoPhaseEulerFoam* para simular el flujo con partículas suspendidas.
- Otra simulación que puede realizarse en Open√FOAM[®] es sobre ondas explosivas o de propagación. Mediante el solver *rhoCentralFoam* para simular las ondas expansivas (Blast Waves), en su trabajo Elaskar (2019), simula ondas de choque debido a explosiones

de Sedov.

- Rad (2019) y Nguyen y Indraratna (2020) en su libro presentan una recopilación de muchas aplicaciones de Open√FOAM[®] y la variedad de solvers, ensambles, mallados, librerías y extensiones disponibles en los distintos campos donde las Ecuaciones de Navier-Stokes tienen protagonismo, entre ellos la Mecánica de suelos y la Hidrogeología.
- En el modelado de flujos en turbinas, se ha implementado OpenVFOAM[®] para simular turbinas de viento en tres dimensiones y turbinas con flujos multifásicos (Nuernberg & Tao, 2018; Y. Zhang, Deng & Wang, 2019).

3.4.1 Diseño de geometría y mallado del problema

Los tipos de discretización más importantes en el uso de técnicas CFD, según Ansorge (2005) son:

- El enfoque empleado en un mallado haciendo uso del método de los elementos finitos FEM (FINITE ELEMENT METHOD).
- El enfoque empleado en un mallado haciendo uso del método de los volúmenes finitos FVM (FINITE VOLUME METHOD).
- El enfoque empleado en un mallado haciendo uso del método de las diferencias finitas
 FDM (FINITE DIFFERENCE METHOD)

La mallas (Grids) se pueden clasificar en dos grandes grupos, mallas estructuradas, donde los elementos son regulares y se ajustan a la geometría del problema y para problemas con geometrías complejas, se implementan mallas no Estructuradas, donde con la ayuda de software CAD (COMPUTER-AIDED DESIGN) se utilizan distintos tipos de geometrías en los elementos de la malla, por ejemplo, uso de triángulos y cuadriláteros dependiendo la complejidad del problema, también dependiendo del tipo de acople de las ecuaciones, las mallas pueden ser mallas escalonadas (Y. Wang, 2015) o mallas co-localizadas (Ansorge, 2005, Página 151, 152). Las mallas escalonadas se diferencian de las mallas co-localizadas en el almacenamiento de valores escalares en los nodos, en un acople escalonado se tiene un grupo de nodos para almacenar cantidades de campos escalares del flujo por volumen de control y otro grupo de nodos que son en sí los que definen la geometría del problema para el cálculo de los campos de velocidades. En la malla co-localizada no se necesita guardar los valores de cantidades escalares por separado.

3.4.2 Proceso de diseño y construcción de mallados para un problema en específico

Cuando el proceso de discretizado está completo se procede a construir la malla para la solución del problema, en este caso se utilizan programas como ser $Blender^{\mathbb{R}}$ ¹ que ofrecen un espacio idóneo y especializado para configurar y diseñar la geometría del problema. En este caso nos interesan flujos masivos por gravedad que se pueden encontrar en una represa hidroeléctrica. Primero se creará el mallado con algún software disponible y adecuado para diseñar o modelar la pieza que pudiera encontrarse en el sistema hidráulico. Por ejemplo, un flujo por gravedad con presión dentro de una tubería de alimentación a una turbina.



Figure 3.15. Diseño de las mallas en $Blender^{\mathbb{R}}$

¹Para más información visite https://www.blender.org/

3.4.3 Uso de librerías de OpenFOAM y su estructura

La documentación de Open FOAM[®] se encuentra en el siguiente sitio web https://www. openfoam.com/documentation/guides/latest/doc/index.html. Las siguientes librerías pueden ser implementadas para simular el flujo por gravedad hacia una turbina, entre otras obras hidráulicas encontradas en una represa:

- IcoFoam: Es un solver para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo incompresible, véase para más detalle https://www.openfoam.com/documentation/ guides/latest/doc/guide-applications-solvers-incompressible-icoFoam.html
- HopeFoam: Es un solver que implementa el método de Galerkin discontinuo para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes, revise el siguiente enlace para más información https://github.com/HopeFOAM/HopeFOAM.
- 3. +dsmcFoam: Es un solver que implementa la integral de Monte Carlo para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes, sobre la documentación e información disponible del solver, véase https://www.openfoam.com/documentation/guides/latest/api/dsmcFoam_8C. html
- 4. fft: Es un solver que implementa la transformada rápida de Fourier, aquí se puede ver más información sobre la librería en Open√FOAM[®] https://www.openfoam.com/ documentation/guides/latest/api/classFoam_1_1fft.html

Estas librerías pueden ser implementadas para simular cierto flujo a través de cierta geometría. Estos mallados pueden ser diseñados en un software CAD y luego renderizados y discretizados en Blender o cualquier otro software disponible. Por último, se utiliza $Open\nabla FOAM^{\ensuremath{\mathbb{R}}}$ para crear los archivos de post-procesados. Con esto se pasará a la siguiente parte del proceso de simulación, animación y renderizado en $ParaView^{\ensuremath{\mathbb{R}}}$.

3.4.4 Uso de ParaView con OpenFOAM

 $ParaView^{\mbox{\ensuremath{\mathbb{R}}}}$ es un software multiplataforma utilizado para visualizar archivos de datos, es decir, renderizar una simulación numérica implementando los archivos de post-procesados, en este caso los cálculos realizados por medio dé Open ∇ FOAM[®]. Para más información sobre el uso de ParaView, véase https://www.paraview.org/.

3.4.5 Programación en OpenFOAM

El proceso de programación en $Open\nabla FOAM^{\otimes}$ se realiza en lenguaje de programación C++. OpenFOAM contiene un conjunto de clases que permiten escribir las ecuaciones de una manera pseudo-matemática. Por ejemplo, si se quiere escribir la siguiente ecuación en $Open\nabla FOAM^{\otimes}$:

$$\frac{\partial(\mathbf{V})}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\cdot(\mathbf{V}\mathbf{V}) = \nu\nabla\cdot\mathbf{V}^2$$
(3.80)

Se implementarían las siguientes clases para escribirla:

```
fvVectorMatrix UEqn
(
fvm::ddt(V)
+ 0.5*fvm::div(phi, V)
- fvm::laplacian(nu, V)
```

```
);
```

UEqn.solve();

Se puede mencionar ahora algunas clases implementadas en $Open\nabla FOAM^{\otimes}$:

- Label, Scalar, dimensionedScalar, Vector
- Storage Classes
- GeometricField, Time, database

Si se quisiera escribir un bucle para resolver y graficar la ecuación, se haría de la siguiente manera 2 :

```
while (runTime.loop())
{
Info << "Time = " << runTime.timeName() << nl << endl;</pre>
#include "CourantNo.H"
fvVectorMatrix UEqn
(
fvm::ddt(U)
+ 0.5*fvm::div(phi, U)
- fvm::laplacian(nu, U)
);
UEqn.solve();
U.correctBoundaryConditions();
phi = (fvc::interpolate(U) & mesh.Sf());
runTime.write();
Info<< "ExecutionTime = " << runTime.elapsedCpuTime() << " s"</pre>
<< " ClockTime = " << runTime.elapsedClockTime() << " s"
<< nl << endl;
}
```

²Revise : https://wiki.openfoam.com/Programming

3.5 Formulación de ensambles en OpenVFOAM®

3.5.1 Método de Monte Carlo en OpenFOAM

Se formulará un ensamble usando el modelo de turbulencia $K - \varepsilon$. Se usará la escala para flujos eulerianos. Se propondrá una formulación débil para resolver el problema usando una discretización con el método de volúmenes finitos acoplado con el método de la integral Monte Carlo, un ejemplo del método de Monte Carlo aplicado al CFD es en la simulación de flujos multifásicos (White y col., 2018). Al aplicar el escalamiento apropiado, se logra encontrar una forma asintóticamente equivalente de las ecuaciones de promedio temporal (RANS), esto es:

$$\frac{\partial \overline{u_i}^*}{\partial t^*} + \overline{u_i}^* \frac{\partial \overline{u_j}^*}{\partial \overline{x_i}^*} = \frac{1}{Re^2} \frac{\rho^2 g L^3}{\mu^2} \overline{f_i}^* + \frac{\partial}{\partial \overline{x_i}^*} \left[-\overline{p}^* \delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial \overline{x_i}^*} + \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial \overline{x_j}^*} \right) - \overline{u_i' u_j'}^* \right]$$
(3.81)

Para un número de Reynolds alto, es decir, $Re \to \infty$, la ecuación 3.81 pierde algunos términos, quedando entonces:

$$\frac{\partial \overline{u_i}^*}{\partial t^*} + \overline{u_j}^* \frac{\partial \overline{u_i}^*}{\partial \overline{x_j}^*} = \frac{\partial}{\partial \overline{x_i}^*} \left[-\overline{p}^* \delta_{ij} - \overline{u_i' u_j'}^* \right]$$
(3.82)

A esta ecuación se le aplica el método de los volúmenes finitos, para esto, se expresa la ecuación en su forma diferencial y también a la vez se integra para un volumen de control. Esto se plantea así:

$$\int_{0}^{V} \rho \frac{\partial \overline{U}^{*}}{\partial t^{*}} dV + \int_{0}^{V} \rho \nabla \cdot (\overline{U}^{*} \overline{U}^{*} - \overline{\sigma}^{*}) dV = -\int_{0}^{V} \rho \nabla \overline{p}^{*} dV$$
(3.83)

Donde $\overline{\sigma}$ representa el esfuerzo de Reynolds y \overline{U}^* representa el campo de velocidades escalado para un flujo euleriano. Se utiliza el teorema de integrales de la divergencia, con esto se llega a esto:

$$\int_{0}^{V} \rho \frac{\partial \overline{U}^{*}}{\partial t^{*}} dV + \int_{0}^{S} \rho (\overline{U}^{*} \overline{U}^{*} - \overline{\sigma}^{*}) \cdot \mathbf{dA} = -\int_{0}^{V} \rho \nabla \overline{p}^{*} dV$$
(3.84)

A la vez también se formula la integral para la ecuación de continuidad, con esto el método de los volúmenes finitos queda aplicado:

$$\int_{0}^{V} \rho \nabla \cdot \overline{U}^{*} dV = 0$$

$$\int_{0}^{V} \rho \frac{\partial \overline{U}^{*}}{\partial t^{*}} dV + \int_{0}^{S} \rho (\overline{U}^{*} \overline{U}^{*} - \overline{\sigma}^{*}) \cdot \mathbf{dA} = -\int_{0}^{V} \rho \nabla \overline{p}^{*} dV$$
(3.85)

Se formula ahora la forma débil para cada término en cada una de las ecuaciones 3.85. Para ello se escribe la integral como una suma, cada derivada se escribe como una expresión de diferencias finitas. Se utiliza el teorema integral de la divergencia en la ecuación de continuidad:

$$\sum_{l=1}^{N} \rho(\overline{u}_{i,l}^{*} \cdot \boldsymbol{n}_{i,l}) \Delta A_{i,l} = 0$$

$$\rho\left(\frac{\overline{u}_{i,l+1}^{*} - \overline{u}_{i,l}^{*}}{\Delta t^{*}}\right) \Delta V + \sum_{l=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \rho\left[(\overline{u}_{i,l}^{*} \cdot \overline{u}_{i,m}^{*} - \overline{\sigma_{i,l,m}}^{*}) \cdot \boldsymbol{n}_{i,l}\right] \Delta A_{i,l} = -\rho\left(\frac{\overline{p}_{i,l+1}^{*} - \overline{p}_{i,l}^{*}}{\Delta \overline{x}^{*}}\right) \Delta V$$
(3.86)

Todo lo anterior es válido para un volumen de control i, de la dirección l y la dirección m, \overline{x}^* representa la distancia que separa las caras del volumen de control. Para generar los valores de presión, se acopla la siguiente ecuación:

$$\overline{u}_{i,l+1}^* = \overline{u}_{i,l}^* + (\overline{p}_{i,l+1}^* - \overline{p}_{i,l}^*) \frac{\Delta t^*}{\Delta \overline{x}^*}$$
(3.87)

La expresión 3.87 acopla el campo de presión con el campo de la velocidad, generando los valores de presión en cada volumen de control. Por último se formulan los esfuerzos de Reynolds $\overline{\sigma}$, estos esfuerzos se acoplan de la siguiente manera:

$$\overline{\sigma}^* = \left(1 + \frac{\mu_t}{\mu}\right) \left(\nabla \overline{U}^* + \nabla \overline{U}^{*T}\right) - \frac{2}{3}K^* \mathbf{I}$$

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{K^{*2}}{\varepsilon^*}$$
(3.88)

Usando notación de índice, ahora se reescriben los esfuerzos, esto es:

$$\overline{\sigma}_{i,l,m}^* = \left(1 + \frac{\mu_t}{\mu}\right) \left(\frac{\partial \overline{u}_{i,l}^*}{\partial \overline{x}_m^*} + \frac{\partial \overline{u}_{i,m}^*}{\partial \overline{x}_l^*}\right) - \frac{2}{3} \overline{K_{i,l}}^* \delta_{lm}$$
(3.89)

Para integrar los esfuerzos en las ecuaciones 3.86, se sustituyen las derivadas en sus formas de diferencias o su forma débil, de lo cual se obtiene lo siguiente:

$$\overline{\sigma}_{i,l,m}^* = \left(1 + C_\mu \rho \frac{\overline{K_{i,l}}^2}{\mu \overline{\varepsilon}_{i,l}}\right) \left(\frac{\overline{u}_{i,l+1}^* - \overline{u}_{i,l}^*}{\Delta \overline{x}_m^*} + \frac{\overline{u}_{i,m+1}^* - \overline{u}_{i,m}^*}{\Delta \overline{x}_l^*}\right) - \frac{2}{3} \overline{K}_{i,l}^* \delta_{lm}$$
(3.90)

Donde K es la energía cinética debido a la turbulencia y ε es la tasa de disipación de energía. Para cerrar el problema se añaden las ecuaciones para K y ε :

$$\frac{\partial(\rho K)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\overline{U}\rho K\right) - \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_K}\right)\nabla K\right] = \mu_t G_K - \rho\varepsilon$$

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\overline{U}\rho\varepsilon\right) - \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\nabla\varepsilon\right] = C_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{K}\mu_t G_K - C_{2\varepsilon}\rho\frac{\varepsilon^2}{K}$$
(3.91)

Con esto, ya todo está acoplado y listo para por fin aplicar métodos de Monte Carlo. Primero se integran las ecuaciones 3.91 para un volumen de control en su forma adimensional o escalada(Baker, 2014):

$$\int_{V} \rho \frac{\partial \overline{K}^{*}}{\partial t^{*}} dV + \int_{V} \rho \nabla \cdot \left(\overline{U}^{*} \overline{K}^{*}\right) dV - \int_{V} \frac{\rho}{Pe} \nabla \cdot \left[\left(1 + \frac{\mu_{t}}{\sigma_{K} \mu}\right) \nabla \overline{K}^{*} \right] dV = \int_{V} \rho \mu_{t} G_{K} dV - \int_{V} \rho \overline{\varepsilon}^{*} dV \\
\int_{V} \rho \frac{\partial \overline{\varepsilon}^{*}}{\partial t^{*}} dV + \int_{V} \rho \nabla \cdot \left(\overline{U}^{*} \overline{\varepsilon}^{*}\right) dV - \int_{V} \frac{\rho}{Pe} \nabla \cdot \left[\left(1 + \frac{\mu_{t}}{\sigma_{\varepsilon} \mu}\right) \nabla \overline{\varepsilon}^{*} \right] dV = \int_{V} \rho C_{1\varepsilon} \frac{\overline{\varepsilon}}{\overline{K}^{*}} \mu_{t} G_{K} dV - \int_{V} C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^{2}}{\overline{K}} dV \tag{3.92}$$

Ahora se plantea la integral del Monte Carlo para los términos del lado derecho de las ecuaciones anteriores, se evalúa el *número de Péclet* cuando $Pe \rightarrow \infty$. Se usa el teorema

integral de la divergencia y se formula la integral de Monte Carlo:

$$\rho\left(\frac{K_{i,l+1} - \overline{K_{i,l}}}{\Delta t}\right) \Delta V + \sum_{l=1}^{N} \left(\overline{u}_{i,l}^{*} \overline{K_{i,l}} \cdot \boldsymbol{n}_{i,l}\right) \Delta A_{i,l} = \rho \frac{N'}{N} \mathbf{Max}(\mu_{t}G_{k}) \Delta V - \rho \frac{N'}{N} \mathbf{Max}(\varepsilon) \Delta V$$

$$\rho\left(\frac{\varepsilon_{i,l+1} - \overline{\varepsilon}_{i,l}}{\Delta t}\right) \Delta V + \sum_{l=1}^{N} \rho\left(\overline{u}_{i,l}^{*} \overline{\varepsilon}_{i,l} \cdot \boldsymbol{n}_{i,l}\right) \Delta A_{i,l} = \rho C_{1\varepsilon} \mu_{t} \frac{N'}{N} \mathbf{Max}(H) \Delta V - \rho C_{2\varepsilon} \frac{N'}{N} \mathbf{Max}(J) \Delta V$$
(3.93)

Se implementa *la integral de Monte Carlo* (Véase 8) para resolver las integrales del lado derecho en cada ecuación diferencial parcial en 3.91, se formula una distribución para los valores K, ε , G_K , H y J. El muestreo consiste en N eventos de los cuales N' son los que satisfacen la condición. Para un mallado estructurado (BlockMesh de Open ∇ FOAM[®]), las ecuaciones 3.86, 3.93, 3.90, 3.87 son las ecuaciones del ensamble propuesto. La distribución para las variables mencionadas anteriormente, son valores aleatorios generados por una distribución de probabilidad, estas son las siguientes:

$$u_{i,n}' = \Delta X_{i,n} / \Delta t$$

$$K_{i,n} = \frac{1}{2} u_{i,n}' u_{i}' + K_{i-1,n}$$

$$\varepsilon_{i,n} = f(K_{i,n}) + \varepsilon_{i-1,n}$$

$$H_{i,n} = h(K_{i,n}, \varepsilon_{i,n}) \leq \frac{\varepsilon_{i,n}}{K_{i,n}} G_K$$

$$J_{i,n} = g(K_{i,n}, \varepsilon_{i,n}) \leq \frac{\varepsilon_{i,n}^2}{K_{i,n}}$$

$$G_K = \left\| \nabla U + \nabla U^T \right\| \geq 0 \quad \text{(Es el determinante del Tensor)}$$
(3.94)

Donde f, g, y h son distribuciones de probabilidades, dan como valores de salida, los valores esperados para ε , H y J. La simulación de la energía cinética turbulenta funciona de la siguiente manera, para cada volumen de control i, se calcula la energía cinética K_i , esto se logra obteniendo la variación de la velocidad, calculando el cambio de desplazamiento ΔX_i dentro del volumen de control i, usando dos posiciones aleatorias dentro del volumen de control para cierto Δt . Se calculan los valores para H_i , J_i , y G_K . Los valores que no satisfacen la condición se excluyen y luego se contabilizan los que si llenaron el requerimiento (N'). Por último se calculan los valores promedio:

$$\overline{K_{i}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} K_{i,n}$$

$$\overline{\varepsilon_{i}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_{i,n}$$

$$\mathbf{Max}(H_{i}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} H_{i,n} + \Delta H$$

$$\mathbf{Max}(J_{i}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} J_{i,n} + \Delta J$$
(3.95)

Para finalizar el ensamble, se formula la ecuación matricial, las incógnitas a encontrar son $\overline{u}_{i,l+1}$, $K_{i,l+1}$, $\varepsilon_{i,l+1}$, $\overline{p}_{i,l+1}$, y $\overline{u}_{i,m+1}$, son diferencias progresivas (Upwind Scheme), se usán las librerías de Open ∇ FOAM[®] para simular un flujo con cierta geometría. El proceso consiste en calibrar el solver para las ecuaciones encontradas, esto se logra modificando las carpetas de la simulación, la librería se llama +dsmcFoam (Véase 11).

Con esto se finaliza la formulación del ensamble haciendo uso del método de Monte Carlo ³. Véase ahora otro ensamble más interesante, haciendo uso del FEM y transformada de Fourier.

³Para más detalles véase https://www.openfoam.com/documentation/guides/latest/api/dsmcFoam_8C_ source.html

3.5.2 Método de transformada rápida de Fourier en OpenFOAM

Se formulará un ensamble usando el modelo de turbulencia $K - \omega$. Se usará una escala para flujos eulerianos. Se resolverá el problema usando una discretización basada en el método de Galerkin discontinuo acoplado con transformada rápida de Fourier. El uso de la transformada rápida de Fourier queda relegado a la aplicación de métodos espectrales. También para algunos flujos incompresibles se implementa la transformada rápida de Fourier para acelerar la convergencia usando técnicas de programación en paralelo (Costarelli, Paz, Dalcin & Storti, 2011). Se inicia el ensamble haciendo mención de la ecuación 3.82, junto con la ecuación de continuidad y las ecuaciones del modelado de turbulencia $K - \omega$:

$$\nabla \cdot \overline{U}^{*} = 0$$

$$\frac{\partial \overline{U}^{*}}{\partial t^{*}} + \nabla \cdot (\overline{U}^{*} \overline{U}^{*} - \overline{\sigma}^{*}) = -\nabla \overline{p}^{*}$$

$$\frac{\partial \omega^{*}}{\partial t^{*}} + \nabla \cdot \overline{U}^{*} \omega^{*} - \alpha \left[\frac{\omega^{*}}{K^{*}} \sigma_{ij}^{*} \frac{\partial \overline{u}_{i}^{*}}{\partial x_{j}^{*}} \right] + \gamma \omega^{*2} = 0$$

$$\frac{\partial K^{*}}{\partial t^{*}} + \nabla \cdot \overline{U}^{*} K^{*} - \sigma_{ij}^{*} \frac{\partial \overline{u}_{i}^{*}}{\partial x_{j}^{*}} = 0$$

$$\overline{\sigma}_{ij}^{*} = \left(1 + \frac{\mu_{t}}{\mu} \right) \left(\frac{\partial \overline{u}_{i}^{*}}{\partial \overline{x}_{i}^{*}} + \frac{\partial \overline{u}_{j}^{*}}{\partial \overline{x}_{i}^{*}} \right) - \frac{2}{3} K^{*} \delta_{ij}$$

$$\mu_{t} = C_{\mu} \rho \frac{K}{\omega}$$

$$(3.96)$$

Donde todas las ecuaciones han sido escaladas para un flujo euleriano y acopladas para reducir el número de ecuaciones. Se procede ahora a usar la transformada de Fourier en el sistema de ecuaciones diferenciales parciales:

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{\partial\overline{u_{i}^{*}}}{\partial\overline{x_{j}^{*}}}\right\} = 0$$

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{\partial\overline{u_{i}^{*}}}{\partial\overline{t^{*}}} + \overline{u_{j}^{*}}\frac{\partial\overline{u_{i}^{*}}}{\partial\overline{x_{j}^{*}}}\right\} = \mathfrak{F}\left\{\frac{\partial}{\partial\overline{x_{i}^{*}}}\left[-\overline{p}^{*}\delta_{ij} - \left(1 + C_{\mu}\frac{K^{*}}{\omega^{*}\mu}\right)\left(\frac{\partial\overline{u}_{i}^{*}}{\partial\overline{x}_{i}^{*}} + \frac{\partial\overline{u}_{j}^{*}}{\partial\overline{x}_{i}^{*}}\right) - \frac{2}{3}K^{*}\delta_{ij}\right]\right\} \quad (3.97)$$

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{\partial\omega^{*}}{\partial\overline{t^{*}}} + \overline{u}_{i}^{*}\frac{\partial\omega^{*}}{\partial\overline{x}_{i}^{*}} - \alpha\frac{\omega^{*}}{K^{*}}\left[\frac{\partial K^{*}}{\partial\overline{t^{*}}} + \overline{u}_{i}^{*}\frac{\partial K^{*}}{\partial\overline{x}_{i}^{*}}\right] + \gamma\omega^{*2}\right\} = 0$$

La transformada de las ecuaciones diferenciales sería:

$$ih_{i} \cdot \mathfrak{F}\left\{\overline{u_{i}}^{*}\right\} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t^{*}} \mathfrak{F}\left\{\overline{u_{i}}^{*}\right\} + ih_{i} \cdot \mathfrak{F}\left\{\overline{u_{i}}^{*}\overline{u_{j}}^{*}\right\} - \mathfrak{F}\left\{\overline{u_{i}}^{*}\frac{\partial\overline{u_{j}}^{*}}{\partial\overline{x_{j}}^{*}}\right\} = -ih_{i} \cdot \mathfrak{F}\left\{\overline{u_{i}}^{*}\frac{\partial\overline{u_{j}}^{*}}{\partial\overline{x_{j}}^{*}}\right\} + \left[\mathfrak{F}\left\{\frac{\partial}{\partial\overline{x_{i}}^{*}}\left(1 + C_{\mu}\frac{K^{*}}{\omega^{*}\mu}\right)\left(\frac{\partial\overline{u}_{i}}{\partial\overline{x_{j}}^{*}} + \frac{\partial\overline{u}_{j}}{\partial\overline{x_{i}}^{*}}\right)\right\} - ih_{i} \cdot \frac{2}{3}\mathfrak{F}\left\{K^{*}\right\}\delta_{ij}\right]$$

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{\partial\omega^{*}}{\partial t^{*}} + \overline{u}_{i}^{*}\frac{\partial\omega^{*}}{\partial\overline{x_{i}}^{*}} - \alpha\frac{\omega^{*}}{K^{*}}\left[\frac{\partial K^{*}}{\partial t^{*}} + \overline{u}_{i}^{*}\frac{\partial K^{*}}{\partial\overline{x_{i}}^{*}}\right] + \gamma\omega^{*2}\right\} = 0$$

$$(3.98)$$

Se procederá a dar un tratamiento especial a la siguiente transformada:

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{\partial}{\partial \overline{x_i}^*}\left(1+C_{\mu}\frac{K^*}{\omega^*\mu}\right)\left(\frac{\partial \overline{u}_i^*}{\partial \overline{x}_j^*}+\frac{\partial \overline{u}_j^*}{\partial \overline{x}_i^*}\right)\right\}$$
(3.99)

Primero se aproximará el término $C_{\mu} \frac{K^*}{\omega^* \mu}$. Sea $K^* \approx \overline{u_i}^{*2}$, y $\omega \approx \overline{u_i}^* / \beta$. Se agrupan las constantes y se obtiene lo que sigue a continuación:

$$C_{\mu} \frac{K^*}{\omega^* \mu} \approx \overline{\beta} \cdot \overline{u_i}^*, \quad \text{Si} \quad \overline{\beta} = \frac{C_{\mu}\beta}{\mu}$$
 (3.100)

Tomamos el término 3.99, se aplica la derivada del producto, y se aproxima el resultado usando 3.100:

$$\overline{\beta}\frac{\partial\overline{u_i}^*}{\partial\overline{x_i}^*} \left(\frac{\partial\overline{u}_i^*}{\partial\overline{x}_j^*} + \frac{\partial\overline{u}_j^*}{\partial\overline{x}_i^*}\right) + \overline{\beta}^*\overline{u}_i^* \left(\frac{\partial^2\overline{u}_i^*}{\partial\overline{x}_j^{*2}} + \frac{\partial^2\overline{u}_i^*}{\partial\overline{x}_i^*\partial\overline{x}_j^*}\right) + \left(\frac{\partial^2\overline{u}_i^*}{\partial\overline{x}_j^{*2}} + \frac{\partial^2\overline{u}_i^*}{\partial\overline{x}_i^*\partial\overline{x}_j^*}\right)$$
(3.101)

Se procede a calcular la transformada de Fourier término a término, haciendo $\overline{\beta} = 1$, se cancelan algunos términos, quedando:

$$ih_{i}\mathfrak{F}\left\{\overline{u_{i}}^{*}\frac{\partial\overline{u_{j}}^{*}}{\partial\overline{x_{i}}^{*}}\right\} + \mathfrak{F}\left\{\overline{u_{j}}^{*}\frac{\partial^{2}\overline{u_{i}}^{*}}{\partial\overline{x_{i}}^{*2}}\right\} - h_{i}h_{j}\mathfrak{F}\left\{\overline{u_{i}}^{*}\right\} = -ih_{i}\mathfrak{F}\left\{\overline{u_{i}}^{*}\frac{\partial\overline{u_{j}}^{*}}{\partial\overline{x_{j}}^{*}}\right\} - h_{i}^{2}\mathfrak{F}\left\{\overline{u_{i}}^{*}\overline{u_{j}}^{*}\right\} + \mathfrak{F}\left\{\overline{u_{j}}^{*}\frac{\partial^{2}\overline{u_{i}}^{*}}{\partial\overline{x_{i}}^{*2}}\right\} - h_{i}h_{j}\mathfrak{F}\left\{\overline{u_{i}}^{*}\right\}$$
(3.102)

Un procedimiento similar se hace en la tercera ecuación en 3.98, el término con la constante α , desaparece por la suposición de que el flujo es euleriano (número de Reynolds alto, es

decir, $Re \to \infty$) y queda:

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{\partial\omega^{*}}{\partial t^{*}} + \overline{u}_{i}^{*}\frac{\partial\omega^{*}}{\partial\overline{x}_{i}^{*}} + \gamma\omega^{*2}\right\} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t^{*}}\mathfrak{F}\left\{\omega^{*}\right\} + ih_{i}\cdot\mathfrak{F}\left\{\omega^{*}\overline{u_{i}}^{*}\right\} - \mathfrak{F}\left\{\omega^{*}\frac{\partial\overline{u_{i}}^{*}}{\partial\overline{x_{i}}^{*}}\right\} = -\gamma\mathfrak{F}\left\{\omega^{*2}\right\}$$
(3.103)

Una vez finalizado el proceso de expresar el sistema de ecuaciones diferenciales en el espacio espectral, se utiliza la transformada discreta de Fourier para aproximar los valores de u_i , ω , K, y p_i . Para ello se implementa el método de elemento finito de Galerkin discontinuo, se escoge un espacio de prueba, usando polinomios ortogonales (Véase 10). Se suavizan las transformadas usando interpolaciones de polinomios ortogonales, el sistema de ecuaciones diferenciales ahora solo contiene derivadas temporales. Open ∇ FOAM[®] ofrece una librería para realizar una simulación con métodos espectrales, es la librería fft (Véase 11), una vez suavizado el sistema de ecuaciones diferenciales parciales parciales, es decir, haber encontrado la formulación débil del sistema de ecuaciones diferenciales parciales y entonces haber encontrado la aproximación de la solución, se calcula la transformada inversa, este método espectral es bien conocido como Fourier- Galerkin (Véase 9).

Con este ensamble finaliza la sección del proceso de ensamble y modelado asintótico ⁴. Ahora se usará $Open\nabla FOAM^{\otimes}$ con diferentes ensambles para generar archivos post-procesados, todo para una misma geometría. Por último, se procederá a comparar y a comentar sobre cada gráfico renderizado en ParaView.

⁴Para más detalles sobre la clase de Open ∇ FOAM[®] antes mencionada, puede visitar https://www.openfoam.com/documentation/guides/latest/api/fft_8H_source.html

4. **RESULTADOS**

4.1 Definición del problema de transporte de fluidos

En esta sección se presentarán los resultados obtenidos de distintas simulaciones realizadas en $Open\nabla FOAM^{\otimes}$ y renderizadas en ParaView. Al principio de esta investigación se contextualizó el problema de transporte de flujos en una represa hidroeléctrica. Se procederá a localizar la sección de tubería que se quiere modelar y diseñar que forma parte de la represa.

Una represa es una estructura que fue diseñada para retener un flujo de agua, ya sea un río, así como se muestra en la figura 4.1. El flujo de agua que se logra retener se utiliza para producir energía eléctrica haciendo uso de una turbina. Partiendo de esto, el agua del embalse debe transportarse de tal manera que la energía mecánica del flujo pueda convertirse en energía eléctrica. Debe diseñarse este conducto con las dimensiones correctas para el buen funcionamiento de la turbina.



Figure 4.1. Represa hidroeléctrica Chief Joseph, véase más en https://en.wikipedia.org/wiki/Chief_Joseph_Dam

El flujo que se quiere transportar sería entonces:

- (I) Es un flujo por gravedad y con gran volumen o caudal.
- (II) Es un flujo euleriano, ya que adquiere gran velocidad. Debe considerarse un modelo de turbulencia apropiado.
- (III) Es un flujo con transiente de presión, es decir, la presión aumenta a medida el flujo avanza por el conducto. La presión es distinta de cero en la frontera. Se debe prevenir el golpe ariete (Water Hammer) a la turbina para evitar daños.
- (IV) Las dimensiones de la tubería (diámetros, longitudes y conexiones) deben ser tales que el flujo sea manejable y permita el buen funcionamiento de la turbina.

El esquema constructivo interno de la turbina es el siguiente. El peso del agua en el embalse genera una presión hidrostática en el inicio del tramo de tubería, así que al inicio se puede tener un diámetro lo suficientemente grande para prevenir aplastamientos en la compuerta, el diámetro se va reduciendo a medida se acerca a la turbina. Véase la figura 4.2 para entender mejor lo dicho anteriormente:



Figure 4.2. Corte constructivo de la tubería de alimentación para una turbina Kaplan (Yaseen y col., 2020, Página 12)
4.2 Configuración de la simulación usando similitud dinámica

El objetivo principal de simular el flujo hacia la turbina, para ello se utiliza un modelo a escala que tenga la similitud dinámica con el problema a resolver. Esto con el fin de ahorrar costo computacional. Al ser también una tubería cilíndrica, se aprovecha la simetría existente del problema, puede simularse en solo dos dimensiones. El modelo a escala debe tener las mismas condiciones de frontera que el problema original. Una vez importados los archivos que definen la geometría del problema, se definen en ParaView las condiciones de frontera. Se calibra el solver para ajustarlo al flujo descrito en la sección anterior. Por último se crean los archivos de post-procesados en Open ∇ FOAM[®] y luego se renderizan en ParaView.

4.2.1 Primera simulación

Para la primera simulación se implementó la librería simpleFoam ¹. Es una librería disponible para flujos incompresibles, bajo la carpeta pipeCycle. La librería utiliza el modelo de turbulencia $K - \varepsilon$ realizable. Para la geometría y mallado del problema se implementó el software libre Salome 9.9². La geometría consiste en un modelo que involucra dos diámetros diferentes en la entrada y salida del flujo (inlet y outlet respectivamente), algo parecido a un cono truncado (Véase 1.1). Véase la figura 4.3 para ver la consola de Salome 9.9, el archivo de mallado (Mesh.unv) se exporta y se copia en la carpeta de simulación. se utiliza el comando ideasUnvToFoam para convertirlo en un mallado con extensión que pueda utilizarse en Open ∇ FOAM[®]. La figura 4.4 muestra el archivo case.foam renderizado luego de la simulación. Para usar Open ∇ FOAM[®] en sistema operativo Windows se usa el Kernel de Linux/Ubuntu disponible para usuarios wsl2 en Windows 10. Para ejecutar la simulación se debe calibrar el solver, para ello se debe cambiar y editar los archivos que se contengan en las carpetas de simulación. Para realizar esta tarea, puede usar un editor como ser notepad $c++^3$. Se mostrará los cambios realizados en las carpetas colocando las clases y valores correspondientes a la

¹Véase más https://www.openfoam.com/documentation/guides/latest/doc/index.html

²Véase en https://www.salome-platform.org/

³Véase más en https://notepad-plus-plus.org/



simulación en cuestión, por último se mostrarán los gráficos 3D renderizados en ParaView.

Figure 4.3. IDE de la consola Salome 9.9 para eleborar mallados que puedan ser usados en Open ${\rm \overline{V}FOAM}^{\circledast}$



Figure 4.4. Geometría exportada exitosamente de Salomé a Open ${\ensuremath{\overline{V}}} FOAM^{\mbox{\ensuremath{\mathbb{B}}}}$ y renderizada en ParaView



Figure 4.5. Cálculos realizados durante la simulación con el solver simpleFoam

Primero se calibra la carpeta 0, Véase la figura 4.7, los cambios se realizan teniendo el cuidado de llamar a la clase dentro del código fuente de $Open\nabla FOAM^{\otimes}$:

icio Non heeDrive - Personal becargas becumentos	htre pepsilon bak k k kbak nut nutbak nuTida bak p bbak J Jbak	Fecha de modificación 29/7/2022 14:51 28/7/2022 15:48 29/7/2022 14:51 29/7/2022 14:57 28/7/2022 15:48 29/7/2022 15:48 29/7/2022 15:36 29/7/2022 15:36 29/7/2022 15:36	n Tipo Archivo Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK	Tamaño 2 KB 2 KB			
heeDrive - Personal becargas # bocumentos # hágenes # onstant hropbox ste equipo OS (C;) ed	epsilon epsilon.bak kbak kbak nut nutbak nuTida nuTida p p p bak j j J Jaak	29/1/2022 1451 28/7/2022 1548 29/7/2022 1451 29/7/2022 1457 28/7/2022 1457 28/7/2022 1548 29/7/2022 1548 29/7/2022 1536 29/7/2022 1536 29/7/2022 1531	Archivo Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK	2 KB 2 KB 2 KB 2 KB 2 KB 2 KB 2 KB 2 KB			
bescargas bocumentos hagenes hagenes hojeKeih olyMesh onstant bropbox ste equipo OS (C;) ed	epsilon.bak k k kkbak nut nut buk nut Tilda nut Tilda bak y j j bak	28/7/2022 15:48 29/7/2022 14:51 29/7/2022 14:57 28/7/2022 14:57 28/7/2022 14:57 28/7/2022 14:57 28/7/2022 15:48 29/7/2022 15:36 29/7/2022 15:36 29/7/2022 15:36	Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK	2 KB 2 KB 2 KB 2 KB 2 KB 2 KB 2 KB 2 KB			
vocumentos * 1 nágenes * 1 nágenes * 1 nógenes * 1 nóg	k kbak nut nutbak nuTidabak p bak U Jbak	29/7/2022 14:51 29/7/2022 14:49 29/7/2022 15:48 29/7/2022 15:48 29/7/2022 15:46 29/7/2022 15:36 29/7/2022 15:36 29/7/2022 15:37 29/7/2022 15:01	Archivo Archivo BAK Archivo Archivo BAK Archivo Archivo BAK Archivo BAK Archivo Archivo BAK	2 KB 2 KB 2 KB 2 KB 2 KB 2 KB 2 KB 2 KB			
Accumentos	kbak nut nutbak nuTilda nuTilda.bak p p.bak U J.bak	29/7/2022 14:49 29/7/2022 14:57 28/7/2022 15:58 29/7/2022 15:58 29/7/2022 15:36 29/7/2022 15:36 29/7/2022 15:36 29/7/2022 15:51	Archivo BAK Archivo Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK	2 KB 2 KB 2 KB 2 KB 2 KB 2 KB 2 KB 2 KB			
nágenes * ipeCyclic olyMesh ionstant iste equipo oS (C) ed	nut nutbak nuTilda putildabak p p.bak U J.bak	29/7/2022 14:57 28/7/2022 15:48 29/7/2022 15:48 29/7/2022 15:38 29/7/2022 15:36 29/7/2022 15:36 29/7/2022 15:37 29/7/2022 15:01	Archivo Archivo BAK Archivo Archivo BAK Archivo Archivo BAK Archivo Archivo Archivo BAK	2 KB 2 KB 2 KB 2 KB 2 KB 2 KB 2 KB			
ipeCyclic i olyMesh i onstant i kropbox iste equipo os (C) ed	nutbak nuTilda p p.bak U J.bak	28/7/2022 15:48 29/7/2022 14:57 28/7/2022 15:48 29/7/2022 15:36 29/7/2022 15:36 29/7/2022 15:37 29/7/2022 15:01	Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK Archivo BAK	2 KB 2 KB 2 KB 2 KB 2 KB 2 KB 2 KB			
onstant in the second s	nuTilda p p.bak U U.bak	29/7/2022 14:57 28/7/2022 15:48 29/7/2022 15:36 29/7/2022 15:36 29/7/2022 15:17 29/7/2022 15:01	Archivo Archivo BAK Archivo Archivo BAK Archivo Archivo BAK	2 KB 2 KB 2 KB 2 KB 2 KB			
orostant constant con	nuTilda.bak p. p.bak U U.bak	28/7/2022 15:48 29/7/2022 15:36 29/7/2022 15:36 29/7/2022 15:17 29/7/2022 15:01	Archivo BAK Archivo Archivo BAK Archivo Archivo BAK	2 KB 2 KB 2 KB 2 KB			
ropbox bit ste equipo OS (C.) ed	p p.bak U U.bak	29/7/2022 15:36 29/7/2022 15:36 29/7/2022 15:17 29/7/2022 15:01	Archivo Archivo BAK Archivo Archivo BAK	2 KB 2 KB 2 KB			
vropbox b ste equipo OS (C:) ed	p.bak U U.bak	29/7/2022 15:36 29/7/2022 15:17 29/7/2022 15:01	Archivo BAK Archivo Archivo BAK	2 KB 2 KB			
ropbox	U U.bak	29/7/2022 15:17 29/7/2022 15:01	Archivo Archivo BAK	2 KB			
ropbox interequipo OS (C:) ed	U.bak	29/7/2022 15:01	Archivo BAK				
ste equipo OS (C:) ed			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	2 KB			
OS (C:)							
ed						Seleccio	une el archivo del que desea obtener la v
						Selecció	sie er arenno der que desca obtener la t
inur.							
nux							

Figure 4.6. Se modifican las carpetas y se reescriben los archivos encontrados en ellas.



Figure 4.7. Para editar los archivos se usa Notepad C++.

El diagrama de velocidades y presiones son los siguientes. El diagrama de presiones 4.8 muestra en el diámetro mayor (en rojo) una presión inicial debido a la presión hidrostática de la represa y en la abertura menor (en azul) una presión nula, debido a que el flujo sale a un canal, esto con el fin de prevenir un golpe ariete. El flujo se mueve del diámetro mayor hacia el menor.

Para el diagrama de velocidades 4.9, en el diámetro mayor (en azul) se observa una velocidad cero, ya que el movimiento del agua parte del reposo y en el diámetro menor (en Rojo) se obtiene la velocidad al final del conducto hacia el canal. Se puede observar como el efecto de la turbulencia puede apreciarse en las paredes del conducto. Ahora se procederá a simular un flujo con la misma geometría y las mismas condiciones de frontera. Esta vez usando una librería diferente con algoritmos para el cálculo del campo presiones diferente al utilizado anteriormente.



Figure 4.8. Diagrama del campo de presiones.



Figure 4.9. Diagrama del campo de velocidades.

4.2.2 Segunda simulación

Para esta simulación se pretende usar la librería *pisoFoam*. Se caracteriza por el uso del algoritmo PISO para el cálculo de presiones. Implementa el modelo de turbulencia $K - \varepsilon^4$ para simular la turbulencia. Se utilizó la misma configuración que en la simulación anterior, se realizaron los ajustes en el archivo *controlDict* de la carpeta *system* dentro de las carpetas de la simulación. Pudo observarse que el cálculo es mayor y le tomo más tiempo al procesador encontrar los campos. La librería pisoFoam no solo calcula los campos de presiones y velocidades, también campo de vorticidades, campos unidireccionales y aceleraciones, para la simulación estos fueron los resultados, véase la figura 4.10:



Figure 4.10. Ventana en Windows de la línea de comando en Ubuntu para la simulación con pisoFoam.

Ahora se revisará y mostrará cada diagrama renderizado en ParaView. Se pondrá más atención a los siguientes gráficos en 3D: vorticidades, presiones, velocidades en la dirección del flujo, aceleraciones.

⁴Véase https://www.openfoam.com/documentation/guides/latest/man/pisoFoam.html



Figure 4.11. Diagrama del campo de presiones con pisoFoam.



Figure 4.12. Diagrama del campo de velocidades en la dirección del flujo con pisoFoam.



Figure 4.13. Diagrama de vorticidades en la sección transversal del flujo con pisoFoam.



Figure 4.14. Diagrama de aceleraciones en la dirección del flujo con pisoFoam.

Puede apreciarse un parecido con el resultado anterior obtenido en la simulación con simpleFoam, esto tiene sentido porque es el mismo problema resuelto con diferentes métodos de cálculo. Puede apreciarse que en los gráficos de vorticidades y aceleraciones, los esfuerzos debido al movimiento del flujo se dan en la capa límite, es decir, en la pared del conducto como se esperaba. Con esto se termina la sección de simulaciones y gráficos en 3D con $Open \nabla FOAM^{\otimes}$ y ParaView. Los esfuerzos viscosos en la capa límite son mayores a medida se acercan al diámetro de menor tamaño. La vorticidad incrementa en el fondo del conducto debido al cambio de presión que experimenta el flujo a medida avanza hacia el diámetro más pequeño. Es posible observar que los esfuerzos para una razón de diámetros en el reductor 1:2, y con una reducción de presión del 50% de la presión inicial, la pieza no experimenta daños o no es sometida a esfuerzos considerables, esto quiere decir que la profundidad del desplante en la válvula de control en el embalse debe ser tal que la pieza experimente dicho cambio de presión, usando la razón de diámetros antes mencionada. Esto también muestra donde la pieza debe ser reforzada o llevar un material más adecuado. Si la capa límite hubiera sido más gruesa y se hubieran visto zonas en rojo, quiere decir que la razón de diámetros en el reductor o la profundidad de la válvula de control no son las adecuadas, se dan esfuerzos viscosos muy intensos que pudieran dañar la pieza. En resumen, los parámetros de diseño que se definen a partir de la simulación son:

- 1. **Profundidad de la válvula de control**: La presión hidrostática inicial está definida por esta longitud.
- 2. Diámetros en el reductor: La razón de los diámetros define las velocidades de entrada y salida en la pieza, si la vorticidad no es controlada, los esfuerzos viscosos en el diámetro de menor tamaño podrían ser considerables.
- 3. Tipo de material y espesor de la pieza: Si el espesor de la capa límite es demasiado pronunciado, entonces la pieza debe reforzarse en las regiones con mayor presencia de esfuerzos viscosos debido a la turbulencia.

5. DISCUSIÓN

En esta sección se discutirán algunos detalles que pueden deducirse de los resultados de las simulaciones realizadas en $Open\nabla FOAM^{\otimes}$. El objetivo de simular es poder ofrecer diseños coherentes y precisos que se adapten a las necesidades del problema de transporte. En este caso se deben diseñar los siguientes elementos de la tubería que alimentan a la turbina:

- Profundidad de la apertura medida desde el nivel del embalse (Intake pipe).
- Apertura de la compuerta en el embalse (Intake pipe and Control Gate).
- longitud del tramo desde la apertura hasta la tubería de alimentación a la turbina (Penstock).
- Posición de las chimeneas de equilibrio y válvulas de control.
- La relación de diámetros y la razón de cambio de ellos, es decir, con qué frecuencia se irá reduciendo el diámetro.



Figure 5.1. Elementos constructivos de una represa hidroeléctrica

En las simulaciones se reprodujo un cambio de diámetro entre tuberías de presión. En el primer diámetro, el flujo entra desde el embalse con una presión hidrostática inicial. En el trayecto hacia la turbina el diámetro se reduce de tal manera que se ajuste al diseño de la turbina. En este punto normalmente se coloca una estructura de control que permite regular los cambios de presión, el peligro latente en este caso es el golpe de ariete debido al transiente de presión, esta presión debe liberarse y esto se logra colocando chimeneas de control en puntos estratégicos del sistema de tuberías, también pueden construirse canales, si estos son superficiales.



Figure 5.2. Elementos hidráulicos dentro del esquema constructivo de la represa

Lograr la simulación tomando en cuenta estos elementos permite colocar los materiales y tomar las medidas necesarias para lograr el funcionamiento correcto de la turbina. Partiendo de la ecuación de energía de los principios de conservación, se logra obtener una ecuación muy práctica que es llamada *la ecuación de Bernoulli*:

$$Z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{g\rho} = Z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{g\rho} + H_f$$
(5.1)

También hay otra ecuación que surge de *la ecuación de continuidad* de los principios de conservación, es la ecuación siguiente:

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 \tag{5.2}$$

Donde Z_i representa las cotas de elevación, V_i representa las velocidades en cada diámetro, P_i representa las presiones, A_i representa las áreas de sección transversal en las tuberías y $H_f = \frac{C_1}{2g}V^2$ es la perdida de altura piezométrica (2.77). Usando notación vectorial e introduciendo escalamiento múltiple a las ecuaciones 5.2 y 5.1, se obtiene lo que sigue:

$$\rho g \nabla Z + \nabla P = -\left[C_1 + 1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right] \frac{\rho}{2} \langle V, V \rangle$$

$$\frac{2g\rho^2 L^3}{Re^2 \mu^2} \nabla Z^* + 2\nabla P^* = \beta \langle V^*, V^* \rangle$$
(5.3)

Donde $\beta = -\left[C_1 + 1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]$ y $\langle V, V \rangle = V^2$, *L* es la longitud del tramo de tubería. Con este escalamiento se puede relacionar el número de Reynolds, los diámetros de tubería y la presión. De esta forma se puede obtener la razón de los diámetros para el diseño. La simulación tiene un papel de ser una ayuda visual para el diseñador, para poder elegir la mejor geometría para su diseño, de ella se puede extraer los gradientes de presión y velocidad, también se pueden apreciar las áreas con mayor vorticidad y con presencia de esfuerzos viscosos que puedan dañar la tubería. Encontrar los picos de presión en el diseño es uno de los usos más importantes de las simulaciones en el diseño hidráulico.

Para los materiales de las tuberías se considera también la simulación y sus resultados, tuberías presurizadas, como ser el tramo donde se ubica la turbina, estas tienen que ser de acero y con el espesor necesario para soportar vibraciones y cambios repentinos de presión debido al flujo de agua. Los cambios de diámetro deben diseñarse a través de una simulación para decidir materiales, juntas constructivas, por ejemplo, si la tubería que viene del embalse es de concreto, debe diseñarse la junta para cambiar de material o elemento hidráulico.



Figure 5.3. Sección transversal del detalle constructivo de una turbina Kaplan.

6. CONCLUSIÓN

Esta última sección está destinada a reunir todos los puntos más importantes de la investigación. El objetivo principal de esta investigación era lograr simular un flujo dentro de un sistema hidráulico en una represa. Esto se llevó a cabo usando $Open \nabla FOAM^{\otimes}$. El proceso de simulación comienza con el modelamiento asintótico del problema de transporte, este flujo de agua a través de la tubería en el reductor de diámetro, es un flujo convectivo. El reductor de diámetro es un elemento hidráulico que permite la transición suave y homogénea de los diámetros de entrada en el embalse hacia la chimenea de control implementada para regular la presión. Al ser agua lo que se transporta, la densidad del flujo es constante, es un flujo incompresible y además es un flujo con transiente de presión y euleriano, es decir, con un número de Reynolds alto. Como es un flujo en una sola dirección, se puede modelar con un enfoque de promedio temporal (RANS) y con un modelo de turbulencia que se concentre en como la energía cinética se disipa y convierte en vórtices, pudiendo predecir las áreas o regiones del flujo con mayor presencia de esfuerzos viscosos, por ello se elige el modelo de turbulencia de dos ecuaciones $K - \varepsilon$. Para predecir los cambios de presión en la pieza, se implementa el algoritmo PISO y poder observar el campo de presiones dentro de la pieza. Se realizan dos simulaciones para poder comparar y poder relacionarlas a través de los conceptos de similitud dinámica, es decir, si las líneas de campo de velocidades tienen el mismo comportamiento, lo cual fue verificado y es capaz de observarse en los gráficos 3D renderizados en ParaView. Se revisa el campo de vorticidades y aceleraciones para asegurar que los esfuerzos viscosos debido a la turbulencia no sean capaces de romper la tubería. Las técnicas CFD suelen ser de mucha utilidad para definir el diseño y geometría final de los elementos. En este caso el costo computacional para diseñar la pieza no fue muy alto.

7. APÉNDICE A: MODELAMIENTO ASINTÓTICO DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

Según Moreau (2004), la Mecánica de los fluidos está inspirada en el modelamiento asintótico, o mejor dicho, las ecuaciones que definen el movimiento de los fluidos han sido fundamentadas en técnicas de modelamiento asintótico. Las técnicas de modelamiento asintótico permiten aproximar, o encontrar una expresión equivalente asintóticamente, es decir, que tenga un mismo comportamiento terminal. Los modelos asintóticos pueden dividirse en:

- 1. **Modelos generales**: Estos son los modelos de flujos del tipo, advectivo, difusivo y convectivo.
- 2. Modelos locales: Estos modelos parten de los modelos generales y se enfatizan en el uso de suposiciones especiales como ser, escalamiento, comportamiento de las líneas de campo (Stream Lines), modelado de la turbulencia, entre otros detalles.
- 3. **Modelos globales específicos**: Son modelos locales con ciertas geometrías y condiciones de fronteras bien especiales y únicas.

Las técnicas de modelamiento asintótico más empleadas son las siguientes:

- (I) Correspondencia asintótica: consiste en proponer la existencia de una solución local en una región interna que tenga el mismo comportamiento de la solución general en el dominio externo.
- (II) Escalamiento múltiple: consiste en encontrar la forma adimensional del problema con el fin de eliminar términos seculares. Aquí es donde aparece en escena el análisis adimensional y sus famosos Números Adimensionales.

(III) Homogeneización o promedios de cantidades vectoriales y escalares: consiste en la formulación ponderada o promediada del problema, es aquí donde entran en juego los enfoques adaptativos, como ser los de promedio temporal, promedio espacial o mejor valor esperado dentro un número finito de eventos con la misma similitud geométrica o dinámica.

En resumen, el modelamiento de las ecuaciones de Navier-Stokes consiste en la aproximación de los términos difusivo ($\mu \nabla^2 U$) y convectivo-advectivo ($\rho \nabla \cdot UU$). Se mostrará las distintas maneras en que se puede modelar un flujo usando técnicas de modelamiento asintótico:

- Berselli (2000) en su trabajo de tesis, se muestra el modelado asintótico de las ecuaciones de Navier-Stokes usando métodos variados, entre ellos el método de la descomposición de dominios.
- P. Joseph (2020) en su artículo sobre una solución exacta para las ecuaciones de Navier-Stokes, propone un ansatz en coordenadas cartesianas de la siguiente forma:

$$A = (ay^{3} + bx^{2}y + cy, dx^{3} + exy^{2} + fx, gx^{2} + gy^{2})$$
(7.1)

Usando polinomios ortogonales de Bessel, propone una solución exacta para un flujo en dos dimensiones.

- Kollmann (2019, Página 273, 274) en su libro sobre el fenómeno de la turbulencia, ofrece técnicas de modelado espectral para las ecuaciones de Navier-Stokes.
- Hieber y Robinson (2017, Página 94, 95) en su libro sobre el uso del análisis real para la formulación débil de las ecuaciones de Navier-Stokes, proponen diferentes tipos de modelamiento asintótico haciendo uso de los espacios de Sobolev.
- Ordaz y Sciences (2013) en su artículo demuestran que la ecuación de Ricatti es asintóticamente equivalente a las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo en una dirección.
- Slattery (2012, Página 217, 218) presenta en su libro muchas formas de usar las expansiones asintóticas para resolver problemas de transporte, como ser flujos incompresibles, flujos de calor por conducción o convección.

8. APÉNDICE B: INTEGRAL DE MONTE CARLO

Los métodos de Monte Carlo son un conjunto de técnicas computacionales que están basadas en el muestreo aleatorio y recursivo. Se usa el principio de aleatoriedad para resolver problemas que en esencia son de carácter determinista. Los métodos de Monte Carlo se pueden usar para resolver problemas como:

- Optimización
- Integración numérica
- Distribución de probabilidades

Algunos problemas físicos pueden ser demasiado complejos, por eso se implementan los métodos de Monte Carlo para poder encontrar una respuesta usando métodos estocásticos. Se pondrá más atención a las técnicas de integración de Monte Carlo para resolver problemas en el campo del CFD, véase algunos de ellos:

- Parés-Pulido (2021) en su trabajo sobre el uso de métodos de Monte Carlo para resolver las ecuaciones de Euler para un flujo Incompresible, implementa el método de los volúmenes finitos junto con técnicas de integración de Monte Carlo para encontrar una solución convergente o asintóticamente equivalente.
- 2. Q. Zhang y Zhang (2014, Página 3) en su artículo sobre el uso del ensamble MCFVEM (MONTE CARLO FINITE VOLUME ELEMENT METHOD), resuelven la ecuación convección-difusión (2.4). Para resolver el problema implementa la siguiente formulación de Monte Carlo:
 - Primero se define un espacio de prueba $U_h(D)$ y otro espacio $V_h(D)$.
 - Por cada i = 1, 2, 3, ...M, se encuentra una muestra para cada coeficiente de difusión $a(w_i, \cdot)$ que cumpla con la condición propuesta.

- El valor promedio de las muestras es $E[u] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} u_h[z(w_i)]$ y $E[Q(u)] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} Q[u_h(z(w_i))]$, donde E[u] y E[Q(u)] son los valores esperados promedios de la solución.
- Por último, se formula el error de discretización al formular la solución débil por medio del método de los elementos finitos.

La integral de Monte Carlo implementada en el artículo es:

$$I_{K}(f) = \int_{K} f(x)dx$$

$$I_{K,M}(f) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} f(x_{i})$$

$$I_{K}(f) \approx I_{K,M}(f)$$

(8.1)

Donde K es una colección de puntos aleatorios en el espacio de prueba, x_i es una secuencia de puntos aleatorios de K y f es una función continua y M es la cantidad de muestras en el espacio de prueba.

- 3. Badwaik, Klingenberg, Risebro y Ruf (2021) en su trabajo sobre el uso de métodos de Monte Carlo para la solución de las leyes de conservación aleatoria y flujos discontinuos, presentan un ensamble que consiste en la discretización por medio del método de los volúmenes finitos junto con la solución aproximada haciendo uso de la integral de Monte Carlo MCFVM (MONTE CARLO FINITE VOLUME METHOD).
- 4. Mishra, Schwab y Šukys (2013) trabajó con sistemas no lineales donde las leyes de conservación se aplican a flujos con condiciones de frontera que son aleatorias. Implementa el método de Monte Carlo para espacios multi-dimensionales MLMCFVM (MULTI-LEVEL MONTE CARLO FINITE VOLUME METHOD). El ensamble trata sobre la aplicación del método de los volúmenes finitos, encontrando una solución aproximada haciendo uso de la integral de Monte Carlo.

9. APÉNDICE C: TRANSFORMADA DE FOURIER

Según Julián (2020, Página 4) en su trabajo sobre transformada de Fourier, expresa que la integral de Fourier definida como sigue:

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$
 (9.1)

Surge de extender el análisis de frecuencias al dominio del tiempo, fue denominada así por Jean-Baptiste Joseph Fourier y es una transformación matemática utilizada para transformar las señales entre el dominio del tiempo (espacio) y el de la frecuencia. La transformada de Fourier tiene muchas aplicaciones en las Matemáticas y la Física, sobre todo porque ofrece la oportunidad de resolver ecuaciones diferenciales parciales PDE (PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS).

La transformada de Fourier puede denotarse como:

 $\mathcal{F}[f], \hat{f}, \mathcal{F}(f(t)), \mathcal{F}\{f(t)\}, F(f), F(\xi), \mathcal{F}(f)(\xi)$

Algunas propiedades de la transformada de Fourier son:

1. $\mathcal{F}\{a \cdot f + b \cdot g\} = a \mathcal{F}\{f\} + b \mathcal{F}\{g\}.$ 2. $\mathcal{F}\{f(at)\}(\xi) = \frac{1}{|a|} \cdot \mathcal{F}\{f\}\left(\frac{\xi}{a}\right)$ 3. $\mathcal{F}\{f(t-a)\}(\xi) = e^{-2\pi i \xi a} \cdot \mathcal{F}\{f\}(\xi)$ 4. $\mathcal{F}\{f\}(\xi-a) = \mathcal{F}\{e^{2\pi i a t}f(t)\}(\xi)$ 5. $\mathcal{F}\{f'\}(\xi) = 2\pi i \xi \cdot \mathcal{F}\{f\}(\xi)$ 6. $\mathcal{F}\{f\}'(\xi) = \mathcal{F}\{(-it) \cdot f(t)\}(\xi)$ Una de las formas más importantes de implementar la integral de Fourier es haciendo uso de la transformada discreta de Fourier:

$$X_{k} = \sum_{n=0}^{N-1} x_{n} \cdot e^{-\frac{i2\pi}{N}kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x_{n} \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) - i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \right],$$
(9.2)

Se quiere centrar la atención al uso de la transformada para resolver problemas de transporte de fluidos con técnicas CFD. Véase algunos casos:

 Zang, Streett y Hussaini (1989) en su trabajo sobre métodos espectrales, hacen una recolección de los distintos tipos de aproximaciones espectrales (Uso de la transformada discreta de Fourier) para resolver ecuaciones diferenciales parciales, de la forma:

$$u(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{u}_k e^{ikx}$$
(9.3)

Un tipo especial de expansión es la expansión de Chebyshev:

$$u(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{u}_k T_k(x) \tag{9.4}$$

Donde $T_k(x)$ es un polinomio de Chebyshev. La parte más sobresaliente de su trabajo está en la manipulación de estas expansiones junto con el método de Galerkin para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales parciales:

$$u^N = \sum_{k=\epsilon=J} \hat{u}_k \phi_k(x) \tag{9.5}$$

Donde $\phi_k(x)$ es un espacio de prueba o base en el método de Galerkin. En su investigación presenta el tratamiento de las ecuaciones diferenciales, mejor conocidas como las

ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\frac{d\hat{u}_{K}}{dt} + \nu |K|^{2} \hat{u}_{K} + iK\hat{p}_{K} = \hat{r}_{K}$$

$$iK \cdot \hat{u}_{K} = 0$$

$$\hat{r}_{K} = -\widehat{u \cdot \nabla u_{K}} + f_{K}$$

$$\hat{p}_{K} = -iK \frac{(K \cdot \hat{r}_{K})}{|K|^{2}}$$
(9.6)

Donde $u(x,t) = \sum \hat{u}(t)e^{iK\cdot x}$ y $p(x,t) = \sum \hat{p}(t)e^{iK\cdot x}$ son las formas semi-discretas para la velocidad y la presión. Por último, muestra como suavizar o en otras palabras usar el método de Galerkin para encontrar una interpolación de polinomios ortogonales que sea solución al sistema de ecuaciones diferenciales parciales.

 Núñez, Ramos y Lopez (2012) muestran en su investigación un acople con el método espectral Fourier-Galerkin junto con el método de volúmenes finitos en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{split} \rho \bigg(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_{\theta}^2}{r} \bigg) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \bigg[\frac{\partial}{\partial r} \bigg(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \bigg) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} \bigg] + \rho g_r \\ \rho \bigg(\frac{\partial v_{\theta}}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_{\theta}}{\partial z} + \frac{v_r v_{\theta}}{r} \bigg) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \bigg[\frac{\partial}{\partial r} \bigg(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_{\theta}) \bigg) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \bigg] + \rho g_{\theta} \\ \rho \bigg(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \bigg) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \bigg[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \bigg(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \bigg) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \bigg] + \rho g_z \end{split}$$

Figure 9.1. Ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas

El ensamble consiste en encontrar la forma espectral de las ecuaciones diferenciales en coordenadas cilíndricas para luego formular con el método de Galerkin una interpolación de polinomios ortogonales.

Por último, se hará mención de *la transformada rápida de Fourier* FFT (FAST FOURIER TRANSFORM). Es un algoritmo que permite calcular la transformada de una función usando un menor costo computacional. Implementada para calcular la transformada inversa de

funciones del espacio espectral que son muy complejas. El algoritmo más conocido es *el algoritmo de Cooley-Tukey*, este es el pseudo-código del algoritmo:

Algorithm PAR-R4-FFT **Input:** a *N*-point data $x, N = 2^t$ Output: x overwritten with its DFT $n \leftarrow 4^{t-1}$ 1. 2. for $p \leftarrow 1$ to t do 3. $l \leftarrow 4^p$ $s \leftarrow 4^{p-1}$ 4. 5. $v \leftarrow (s-1)/3$ for $i \leftarrow e$ to n-1 step $P \cdot C$ do 6. 7. $k \leftarrow i/s$ $j \leftarrow i \pmod{s}$ 8. 9. $\alpha \leftarrow x[kl+j]$ $\beta \leftarrow \omega[\nu + j, 0] \cdot x[kl + s + j]$ 10. $\gamma \leftarrow \omega[v+j,1] \cdot x[kl+2s+j]$ 11. $\delta \leftarrow \omega[\nu + j, 2] \cdot x[kl + 3s + j]$ 12. 13. $\tau_0 \gets \alpha + \gamma$ 14. $\tau_1 \gets \alpha - \gamma$ 15. $\tau_2 \gets \beta + \delta$ 16. $\tau_3 \leftarrow \beta - \delta$ 17. $x[kl+j] \leftarrow \tau_0 + \tau_2$ 18. $x[kl+s+j] \leftarrow \tau_1 - i\tau_3$ 19. $x[kl+2s+j] \leftarrow \tau_0 - \tau_2$ 20. $x[kl+3s+j] \leftarrow \tau_1 + i\tau_3$ 21. endfor 22. barrier 23. endfor

Figure 9.2. Algoritmo de la transformada rápida de Fourier

10. APÉNDICE D: POLINOMIOS DE SOBOLEV

Los polinomios ortogonales son ampliamente usados para aproximar las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales con métodos espectrales en el campo del CFD. Uno de los espacios más sobresalientes y usados en el campo del CFD es el *espacio de Sobolev* (Baker, 2014, Página 66). Es un espacio de producto interno definido como:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot g(x) d\mu_0 + \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}} f^{(k)}(x) g^{(k)}(x) d\mu_k$$
 (10.1)

La construcción de las secuencias de los polinomios regulares de Sobolev según Francisco Marcellán, Teresa E. Pérez (1995), puede lograrse de la siguiente manera, tomando una secuencia de polinomios ortogonales mónicos P_n y haciendo que el siguiente producto interno dentro de un espacio de Sobolev se cumpla con respecto a cierto funcional u, es decir, $\langle u, P_n P_m \rangle = k_n \delta_{nm}, k_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, entonces, a través del siguiente kernel puede formularse *la secuencia de polinomios regulares de Sobolev*:

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)P_k(y)}{\langle u, P_k^2 \rangle}$$
(10.2)

Las derivadas para esta secuencia de polinomios están definidas como sigue:

$$K_n^{(r,s)}(x,y) = \frac{\partial^{r+s}}{\partial^r x \partial^s y} K_n(x,y)$$
(10.3)

Todo esto válido para la siguiente forma bilineal φ , definida en un espacio de Sobolev:

$$\varphi(P_m, P_n) = \langle u, P_m P_n \rangle + \lambda P_m'(c) P_n'(c)$$
(10.4)

Una forma bilineal es una transformación lineal definida como $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Verifica la siguiente condición que $f(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(u, v_1) + \alpha_2 f(u, v_2)$ y $\alpha_1, \alpha_2, u, v_1 y v_2 \in \mathbb{R}$.

Estos polinomios pueden usarse como un espacio de prueba en el método de Galerkin. Un ejemplo de secuencias de estos polinomios sería:

$$Q_{n} = P_{n} + \sum_{j=0}^{n-1} a_{j} P_{j}(x)$$

$$= P_{n} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\langle u, Q_{n} P_{j} \rangle}{\langle u, P_{j}^{2} \rangle} P_{j}(x)$$

$$= P_{n} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\varphi(Q_{n}, P_{j}) - \lambda Q'_{n}(c) P'_{j}(c)}{\langle u, P_{j}^{2} \rangle} P_{j}(x)$$

$$= P_{n} - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda \frac{Q'_{n}(c) P'_{j}(c)}{\langle u, P_{j}^{2} \rangle} P_{j}(x)$$

$$= P_{n} - \lambda Q'_{n}(c) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{P_{j}(x) P'_{j}(c)}{\langle u, P_{j}^{2} \rangle}$$

$$= P_{n} - \lambda Q'_{n}(c) K_{n-1}^{(0,1)}(x, c)$$
(10.5)

Donde Q_n es un polinomio mónico de Sobolev de grado n y $\varphi(Q_n, P_j) = 0$. Los siguientes autores han realizado investigaciones en el uso de polinomios de Sobolev para el uso de expansiones de Fourier en métodos espectrales:

- Marcellán y Xu (2015, Página 36, 37) explican lo difícil que es encontrar una expansión ortogonal de Fourier para polinomios de Sobolev a través de técnicas comunes y ampliamente aceptadas, pero también menciona que en los últimos años se ha logrado encontrar expansiones ortogonales de Sobolev usando polinomios ortogonales clásicos (como ser Legendre-Sobolev) en vez de usar una expansión ortogonal estándar de Fourier con polinomios de Sobolev, esta ha sido la tendencia en los últimos años dentro de la comunidad de científicos que usa métodos espectrales para resolver ecuaciones diferenciales parciales.
- Canuto y Quarteroni (1982) en su artículo sobre polinomios ortogonales, publican los diferentes sistemas de interpolación espectral, usando distintas formas bilineales en un espacio de Sobolev.

11. APÉNDICE E: CÓDIGOS EN C++ DE LAS LIBRERÍAS UTILIZADAS EN OPENFOAM

Véase el código en C++:

```
/*-----*\
 _____
                     \\ / F ield
                   | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
  \\ / O peration
                   1
   \\ / And
                    | www.openfoam.com
   \\/
       M anipulation |
 _____
   Copyright (C) 2011-2016 OpenFOAM Foundation
                                   _____
License
   This file is part of OpenFOAM.
   OpenFOAM is free software: you can redistribute it and/or modify it
   under the terms of the GNU General Public License as published by
   the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or
   (at your option) any later version.
   OpenFOAM is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT
   ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or
   FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License
   for more details.
   You should have received a copy of the GNU General Public License
   along with OpenFOAM. If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.
Application
   dsmcFoam
Group
   grpDiscreteMethodssolvers
Description
   Direct simulation Monte Carlo (DSMC) solver
   for transient, multi-species flows.
\*-----*/
#include "fvCFD.H"
#include "dsmcCloud.H"
int main(int argc, char *argv[])
{
```

```
argList::addNote
   (
      "Direct simulation Monte Carlo (DSMC) solver"
      " for transient, multi-species flows."
   );
   #define NO_CONTROL
   #include "postProcess.H"
   #include "addCheckCaseOptions.H"
   #include "setRootCaseLists.H"
   #include "createTime.H"
   #include "createMesh.H"
   #include "createFields.H"
   Info<< "\nStarting time loop\n" << endl;</pre>
   while (runTime.loop())
   {
      Info<< "Time = " << runTime.timeName() << nl << endl;</pre>
      dsmc.evolve();
      dsmc.info();
      runTime.write();
      Info<< nl;</pre>
      runTime.printExecutionTime(Info);
   }
   Info<< "End\n" << endl;</pre>
   return 0;
```

}

Véase el código en C++:

License

This file is part of OpenFOAM.

OpenFOAM is free software: you can redistribute it and/or modify it under the terms of the GNU General Public License as published by the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or (at your option) any later version.

OpenFOAM is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License for more details.

You should have received a copy of the GNU General Public License along with OpenFOAM. If not, see http://www.gnu.org/licenses/>.

Class

Foam::fft

Description

Fast fourier transform using the fftw library.

The complex transform field is returned in the field supplied. The direction of transform is supplied as an argument (-1 = forward, 1 = reverse). The dimensionality and organisation of the array of values in space is supplied in the nn indexing array.

Note

The fftw library uses int only (no longs) for its dimensionality. SourceFiles

fft.C

```
\*-----*/
#ifndef fft_H
#define fft_H
#include "complexFields.H"
namespace Foam
{
class fft
{
public:
   enum transformDirection
  {
     FORWARD_TRANSFORM = -1,
     REVERSE_TRANSFORM = 1
  };
   static void fftRenumberRecurse
  (
     List<complex>& data,
     List<complex>& renumData,
```

```
const UList<int>& nn,
label nnprod,
label ii,
label 11,
label 12
```

);

//- fftRenumber: fold the n-d data array to get the fft components in
//- the right places.

static void fftRenumber(List<complex>& data, const UList<int>& nn);

//- Transform real-value data

// - uses the fftw real to half-complex method

// - result size is field.size()/2 + 1

static tmp<complexField> realTransform1D(const scalarField& field);

//- Transform real-value data

// - uses the fftw real to half-complex method

```
// - result size is field.size()/2 + 1
```

static tmp<complexField> realTransform1D(const tmp<scalarField>& field);

```
//- Transform complex-value data
static void transform
(
    complexField& field,
    const UList<int>& nn,
    transformDirection fftDirection
```

);

```
static tmp<complexField> forwardTransform
    (
        const tmp<complexField>& field,
        const UList<int>& nn
    );
    static tmp<complexField> reverseTransform
    (
        const tmp<complexField>& field,
        const UList<int>& nn
    );
    static tmp<complexVectorField> forwardTransform
    (
        const tmp<complexVectorField>& field,
        const UList<int>& nn
    );
   static tmp<complexVectorField> reverseTransform
    (
        const tmp<complexVectorField>& field,
        const UList<int>& nn
    );
};
                                  * * * * * * * * * * * * * * * * //
// * *
                                *
```

},	//	E	nd	na	ame	esp	pa	се	Fo	can	n																												
//	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	//	
#eı	ndi	Ĺſ																																					
//	**	<*:	**>	***	**	***	**>	***	***	***	***	***	***	***	***	**	***	***	***	**	**	***	***	***	**	***	**	***	***	**	**	**	***	<**	**	**	*	//	

REFERENCIAS

Onuchin, M. F. (1977). Screw compressors.

- Canuto, C. & Quarteroni, A. (1982). Approximation Results for Orthogonal Polynomials in Sobolev Spaces. *Mathematics of Computation*, 38(157), 67.
- Rai, M. M. (1989). Three-Dimensional Navier-Stokes Simulations of Turbine Rotor-Stator Interaction; Part I - Methodology Man.pdf. J. Propulsion, Vol. 5(NO. 3), 305-319.
- Zang, T. A., Streett, C. L. & Hussaini, M. Y. (1989). Spectral methods for CFD. Methods, 92(March 1989), 1-36.
- Huilgol, R. R. (1990). Some remarks on the difference between a bounding surface and a material surface. *International Journal of Engineering Science*, 28(8), 793-796.
- Francisco Marcellán, Teresa E. Pérez, M. A. P. (1995). Regular Sobolev Type Orthogonal Polynomials: Bessel Case. Rocky Mountains Journal of Mathematics, 25, 27.
- John D. Anderson, J. (1995). Computational fluid dynamics, the basics with applications (First edit). Mcgraw-Hill.
- Shames, I. H. (1996). Mechanics of Fluids (3rd edition). Boston: McGraw-Hill.
- Fletcher, C. A. J. (1998). Weighted Residual Methods BT Computational Techniques for Fluid Dynamics 1: Fundamental and General Techniques.
- Berselli, L. C. (2000). Dottorato di Ricerca in Matematica XI ciclo Tesi per il conseguimento del titolo some topics in fluid mechanics (Tesis doctoral).
- Duran, A. F. (2000). A numerical formulation to solve the ALE Navier-Stokes equations applied to the withdrawal of magma chambers A numerical formulation to solve the ALE Navier-Stokes equations applied to the withdrawal of magma chambers (Tesis doctoral).
- González Gutierrez, L. M. (2001). Integración de las ecuaciones de Navier-Stokes mediante el método de los elementos finitos y el método de las características : Aplicaciones a casos con superficie libre (Tesis doctoral).
- Ferziger, H, J. & Peric, M. (2002). Computational methods for fluid mechanics.
- R. Byron Bird, Warren E. Stewart, E. N. L. (2002). *Transport phenomena*. John Wiley & Sons, inc.
- Lewis, R. W., Nithiarasu, P. & Seetharamu, K. N. (2004). Fundamentals of the FEM for heat and fluid flow, 356.
- Moreau, R. (2004). Asymptotic modelling of fluid flow phenomena and its applications Volume 64.

- Sanches, J. (2004). Simulación numérica directa en paralelo de las ecuaciones de Navier Stokes en flujos con capa límite desprendida. Aplicaciones en instalaciones deportivas con gradas cubiertas, 193.
- Ansorge, R. (2005). Mathematical Models of Fluiddynamics.
- Bassi, F., Crivellini, A., Rebay, S. & Savini, M. (2005). Discontinuous Galerkin solution of the Reynolds-averaged Navier-Stokes and k-ω turbulence model equations. *Computers and Fluids*, 34 (4-5 SPEC.ISS.), 507-540.
- Cheney, M., Hoffmann, Christoph, R. M. M. M. S. W. R., Boonkkamp, J. H. M. t. T. & Technische. (2005). Partial Differential Equations SIAM Monographs and Computation - Partial Differential Equations Modeling, Analysis, Computation. Philadelphia: Society for Industrial y Applied Mathematics.
- Laurendeau and F Kafyeke E and Tuncer Cebeci & P.Shao, J. (2005). Computational Fluid Dynamics for Engineers From Panel to Navier-Stokes Methods with Computer Programs by Tuncer. Springer International Publishing.
- Dzodzo, M. B., Liu, B., Cioncolini, A. & Spiegelman, S. R. (2006). ICONE14-89549 Application of CFD for modelling flows in feed-water pipelines. *International Conference* on Nuclear Engineering, Proceedings, ICONE, 2006, pp. 293-301, 9 pages.
- Hoffman, J. & Johnson, C. (2006). Stability of the dual Navier-Stokes equations and efficient computation of mean output in turbulent flow using adaptive DNS/LES. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195(13-16), 1709-1721.
- Wilcox, D. C. (2006). Turbulence Modelling for CFD 3rd Edition.
- Graebel, W. (2007). Advanced Fluid Mechanics (First Edit). Academic Press.
- Krantz, W. B. (2007). Scaling Analysis in Modeling Transport and Reaction Processes.
- Malalasekera, H K Versteeg, W. (2007). Introduction to Computational Fluid Dynamics (2nd edition). Pearson Prentice Hall.
- Bustamante, C. A., Nieto, C. & Giraldoa, M. (2008). Solución de las ecuaciones de Navier-Stokes por el método de los volúmenes finitos aplicado a mallas no ortogonales. *Mecánica Computacional Vol XXVII, págs. 49-65 (artículo completo), 27*(2008), 49-65.
- Alfonsi, G. (2009). Reynolds-averaged Navier-Stokes equations for turbulence modeling. Applied Mechanics Reviews, 62(4), 1-20.
- Dillon, H. E., Emery, A. F., Cochran, R. J. & Mescher, A. M. (2010). Dimensionless versus Dimensional Analysis in CFD and Heat Transfer. COMSOL User Conference, (October).
- Zikanov, O. (2010). Essential computational fluid dynamics (1st Edition). John Wiley & Sons, inc.

- Costarelli, S., Paz, R., Dalcin, L. & Storti, M. (2011). Resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes utilizando CUDA. *Mecánica Computacional*, 64.
- Yeoh, G. H., Liu, C., Tu, J. & Timchenko, V. (2011a). Advances in computational fluid dynamics and its applications.
- Yeoh, G. H., Liu, C., Tu, J. & Timchenko, V. (2011b). Experimental and Numerical Simulations Predictions Comparison of Power and Efficiency in Hydraulic Turbine, Laura Castro, Gustavo Urquiza, Adam Adamkowski, and Marcelo Reggio Volume 2011, Article ID 146054, 8 pages Simulating. En Modelling and Simulation in Engineering (Vol. 2011).
- Bozorgnia, M. & Lee, J. J. (2012). Computational fluid dynamic analysis of highway bridges exposed to hurricane waves.
- Núñez, J., Ramos, E. & Lopez, J. M. (2012). A mixed Fourier-Galerkin-finite-volume method to solve the fluid dynamics equations in cylindrical geometries. *Fluid Dynamics Research*, 44(3).
- Slattery, J. C. (2012). Advanced Transport Phenomena. En Advanced Transport Phenomena (pp. xxiii-xxiv).
- Ceretani, A. N., Sanziel, M. C. & Portapila, M. (2013). Resolución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes con OpenFOAM : El problema del flujo en un canal con escalón. *Cuadernos del CURIHAM, Vol. 19, Año 2013, 19*(1967), 1-14.
- Gidaspow, D., Li, F. & Huang, J. (2013). A CFD simulator for multiphase flow in reservoirs and pipes. *Powder Technology*, 242, 2-12.
- Lizeth, K., Mellado, C., Ernesto, J., Ibarra, J. & Fonseca, F. R. (2013). Solución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles por el método de los volúmenes finitos Numerical solution of the incompressible Navier- Stokes equations with finite volume method. 1000(2), 17-29.
- Mishra, S., Schwab, C. & Šukys, J. (2013). Multi-level Monte Carlo Finite Volume Methods for Uncertainty Quantification in Nonlinear Systems of Balance Laws. Lecture Notes in Computational Science and Engineering, 92, 225-294.
- Ordaz, G. & Sciences, M. (2013). Solución general de La Ecuación de Navier-Stokes para describir la dinámica de un fluido viscoso homogéneo en una tubería abierta. 59(June), 217-223.
- Baker, A. J. (2014). Optimal Modified Continuous Galerkin CFD.
- Zhang, Q. & Zhang, Z. (2014). Monte carlo finite volume element methods for the convectiondiffusion equation with a random diffusion coefficient. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014.
- Blazek, J. (2015). Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications: Third Edition.

- Epikhin, A., Evdokimov, I., Kraposhin, M., Kalugin, M. & Strijhak, S. (2015). Development of a Dynamic Library for Computational Aeroacoustics Applications Using the OpenFOAM Open Source Package. Elsevier Masson SAS.
- Marcellán, F. & Xu, Y. (2015). On Sobolev orthogonal polynomials. Expositiones Mathematicae, 33(3), 308-352.
- Ngamalieu, U. A. (2015). Caracterización de vertederos hidráulicos mediante técnicas CFD, 75.
- Wang, Y. (2015). Universit ´ e Paris-Sud TH ESE par Solving Incompressible Navier-Stokes Equations (Tesis doctoral).
- Athulya, A. & Miji Cherian, R. (2016). CFD Modelling of Multiphase Flow through T Junction. Procedia Technology, 24 (Icetest 2015), 325-331.
- Celeita, D. A. (2016). Proyecto de grado: Creación del modelo CFD del montaje de un drenaje urbano considerando controles en tiempo real (Tesis doctoral, Universidad de los Andes).
- F.Tocci. (2016). Assessment of a hybrid VOF two-fluid CFD solver for simulation of gasliquid flows in vertical pipelines in OpenFOAM (Tesis doctoral).
- Martins, N. M., Soares, A. K., Ramos, H. M. & Covas, D. I. (2016). CFD modeling of transient flow in pressurized pipes. *Computers and Fluids*, 126, 129-140.
- Poroseva, S. V., Colmenares F., J. D. & Murman, S. M. (2016). On the accuracy of RANS simulations with DNS data. *Physics of Fluids*, 28(11).
- Rodríguez, F. (2016). Modelación numérica del flujo en un descargador a vórtice aplicando mecánica de fluidos computacional (CFD) (Tesis doctoral).
- Zeng, J., Li, H. & Zhang, D. (2016). Numerical simulation of proppant transport in hydraulic fracture with the upscaling CFD-DEM method. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 33, 264-277.
- Zerbib, N., Lassen Mebarek, A. H. & Escouflaire, M. (2016). Use OpenFoam coupled with the Finite Element Method suitable for Computational AeroAcoustics. proceedings, 4th OpenFoam Users Conference, Cologne, Germany, (October).
- C. Pozrikidis. (2017). Fluid Dynamics Theory, Computation, and Numerical Simulation (Third edit). Amherst, Massachusetts, USA: Springer US.
- Giraldo, A. (2017). Simulación mediante dinámica de fluidos computacional (CFD) de un intercambiador de flujo cruzado (Tesis doctoral).
- He, F., Dai, H., Huang, Z. & Wang, L. (2017). Nonlinear dynamics of a fluid-conveying pipe under the combined action of cross-flow and top-end excitations. *Applied Ocean Research*, 62, 199-209.
- Hieber, M. & Robinson, J. C. (2017). Lecture Notes in Mathematics 2254 Mathematical Analysis of the Equations.

- Jines, J. (2017). Simulación de Flujo Incompresible y de una Fase en Accesorio de Tuberías (Codo 90 ° de alto radio) mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD), para Cálculo de Factor de Pérdida K L. *Revista Tecnológica ESPOL – RTE*, 30(Agosto), 56-74.
- Mangani, L., Buchmayr, M., Darwish, M. & Moukalled, F. (2017). A fully coupled Open-FOAM® solver for transient incompressible turbulent flows in ALE formulation. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 71(4), 313-326.
- Martins, N. M. C., Brunone, B., Meniconi, S., Ramos, H. M. & Covas, D. I. C. (2017). CFD and 1D Approaches for the Unsteady Friction Analysis of Low Reynolds Number Turbulent Flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, 143(12), 04017050.
- Mora, X. (2017). Navier-Stokes equations: Unpredictability even without butterflies?
- Nimadge, G. B. & Chopade, S. V. (2017). Cfd Analysis of Flow Through T-Junction of Pipe. International Research Journal of Engineering and Technology(IRJET), 4(2).
- Peña García, Á. (2017). Numerical Analysis of a PWC propulsion system with OpenFoam (Tesis doctoral, Universidad de Cádiz).
- Salcedo, R., Bayón, A. & Chueca, P. (2017). Introduciendo la dinámica de fluidos computacional en el análisis de flujos en medio poroso.
- Sultan, R. A., Rahman, M. A., Rushd, S. & Zendehboudi, S. (2017). CFD simulation of slurry flow in annular pipelines. AIP Conference Proceedings, 1919(December 2017).
- Wang, C., Nilsson, H., Yang, J. & Petit, O. (2017). 1D–3D coupling for hydraulic system transient simulations. *Computer Physics Communications*, 210, 1-9.
- Xu, L., Tang, Y., Xu, X., Feng, Y. & Guo, Y. (2017). A high order discontinuous galerkin method based RANS turbulence framework for openfoam. ACM International Conference Proceeding Series, 404-408.
- Zambrano, H., Sigalotti, L. D. G., Klapp, J., Peña-Polo, F. & Bencomo, A. (2017). Heavy oil slurry transportation through horizontal pipelines: Experiments and CFD simulations. *International Journal of Multiphase Flow*, 91, 130-141.
- Zheng, J., Zhang, W., Jiang, J. & Guo, R. (2017). CFD simulation and experimental study of water-oil displacement flow in an inclined pipe. *International Journal of Heat and Technology*, 35(3), 663-667.
- Ateshian, G. A., Shim, J. J., Maas, S. A. & Weiss, J. A. (2018). Finite Element Framework for Computational Fluid Dynamics in FEBio. Journal of Biomechanical Engineering, 140(2), 1-48.
- Cabas, J. J. & Ariza, J. D. R. (2018). Modeling and simulation of a pipeline transportation process.
- Devolder, B., Troch, P. & Rauwoens, P. (2018). Performance of a buoyancy-modified k- ω and k- ω SST turbulence model for simulating wave breaking under regular waves using OpenFOAM®. *Coastal Engineering*, 138 (March), 49-65.
- He, T., Zhang, H. & Zhang, K. (2018). A smoothed finite element approach for computational fluid dynamics: applications to incompressible flows and fluid-structure interaction. *Computational Mechanics*, 62(5), 1037-1057.
- Li, Q., Wang, J., Yan, S., Gong, J. & Ma, Q. (2018). A zonal hybrid approach coupling FNPT with OpenFOAM for modelling wave-structure interactions with action of current. Ocean Systems Engineering, 8(4), 381-407.
- Matvey V. and Kraposhin and Daniil A. Ryazanov and Kirill A. Vatutin & Elizarova, T. G. (2018). New OpenFOAM solvers for transonic and incompressible flow simulations. Shanghai Jiao Tong University. Shangai.
- Nuernberg, M. & Tao, L. (2018). Three dimensional tidal turbine array simulations using OpenFOAM with dynamic mesh. *Ocean Engineering*, 147(February), 629-646.
- Piechota, P., Synowiec, P., Andruszkiewicz, A. & Wedrychowicz, W. (2018). Selection of the Relevant Turbulence Model in a CFD Simulation of a Flow Disturbed by Hydraulic Elbow — Comparative Analysis of the Simulation with Measurements Results Obtained by the Ultrasonic Flowmeter. Journal of Thermal Science, 27(5), 413-420.
- Quinodoz, F., Heidenreich, E. & Vilar, P. (2018). Resolución numérica de las ecuaciones de Navier Stokes mediante el método de volúmenes finitos y su aplicación como herramienta didáctica en cursos de mecánica de fluidos computacional. Congreso argentino de ingeniería mecánica.
- Seoane, M. F. (2018). Estudio CFD de la influencia del método utilizado para modelar la superficie libre en la resistencia al avance del buque. Estudio comparativo entre VOF y CLSVOF (Tesis doctoral, Escola Politécnica Superior).
- Stefanski, D. L., Glasby, R. S., Erwin, J. T., Allmaras, S. R., Coder, J. G. & Burgessn, N. K. (2018). A modified k-ω turbulence model for finite-element CFD. 2018 Fluid Dynamics Conference.
- Tian, Z. L., Liu, Y. L., Zhang, A. M. & Wang, S. P. (2018). Analysis of breaking and reclosure of a bubble near a free surface based on the Eulerian finite element method. *Computers and Fluids*, 170, 41-52.
- Tu, J., Yeoh, G.-H. & Liu, C. (2018). Computational Fluid Dynamics A Practical Approach Third Edition. Elsevier.
- Tuković, Z., Karač, A., Cardiff, P., Jasak, H. & Ivanković, A. (2018). OpenFOAM Finite Volume Solver for Fluid-Solid Interaction. Transactions of FAMENA, 42(3), 1-31.
- Viti, N., Valero, D. & Gualtieri, C. (2018). Numerical simulation of hydraulic jumps. part
 2: Recent results and future outlook. Water (Switzerland), 11(1), 1-18.
- Welahettige, P. & Vaagsaether, K. (2018). Comparison of OpenFOAM and ANSYS Fluent. Proceedings of The 9th EUROSIM Congress on Modelling and Simulation, EURO-SIM 2016, The 57th SIMS Conference on Simulation and Modelling SIMS 2016, 142 (December), 1005-1012.

- White, C., Borg, M. K., Scanlon, T. J., Longshaw, S. M., John, B., Emerson, D. R. & Reese, J. M. (2018). dsmcFoam+: An OpenFOAM based direct simulation Monte Carlo solver. *Computer Physics Communications*, 224, 22-43.
- Doroshenko, Y., Doroshenko, J., Zapukhliak, V., Poberezhny, L. & Maruschak, P. (2019). Modeling computational fluid dynamics of multiphase flows in elbow and T-junction of the main gas pipeline. *Transport*, 34(1), 19-29.
- Elaskar, S. (2019). Simulación de Ondas Explosivas Usando OpenFOAM. Mecánica Computacional, 37(26), 1075-1084.
- Epikhin, A., Kraposhin, M. & Vatutin, K. (2019). The numerical simulation of compressible jet at low Reynolds number using OpenFOAM. E3S Web of Conferences, 128, 10008.
- Karatzas, E. N., Stabile, G., Nouveau, L., Scovazzi, G. & Rozza, G. (2019). A reduced basis approach for PDEs on parametrized geometries based on the shifted boundary finite element method and application to a Stokes flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 347, 568-587. arXiv: 1807.07790
- Kollmann, W. (2019). Navier Stokes Turbulence (First Edit). Springer International Publishing.
- Liu, Y., Guo, X., Li, C., Wu, C. K., Zhang, X. & Yang, C. (2019). The Multi-Threaded Analysis of Multiscale Solver for Viscoelastic Fluids Based on Open FOAM. (109), 422-426.
- Mukha, T., Rezaeiravesh, S. & Liefvendahl, M. (2019). A library for wall-modelled largeeddy simulation based on OpenFOAM technology. *Computer Physics Communications*, 239, 204-224. arXiv: 1807.11786
- Osman, A. B. & Ovinis, M. (2019). Evaluation of K-Epsilon Model for Turbulent Buoyant Jet. 3(2), 55-64.
- Rad, M. T. (2019). Solidification meltingsource: a built-in fvoption in openfoam® for simulating isothermal solidification.
- Schouten, T. D., Keetels, G. H. & van Rhee, C. (2019). Suspended pipeflow with openfoam. International Conferences on Transport and Sedimentation of Solid Particles, TS 19(September), 337-344.
- Viet, N. T., Xiping, D., Tung, T. T., Conference, I. & Coasts, P. (2019). 10.1007@978-981-15-0291-0.
- Zhang, Y., Deng, S. & Wang, X. (2019). RANS and DDES simulations of a horizontal-axis wind turbine under stalled flow condition using OpenFOAM. *Energy*, 167, 1155-1163.
- Fadiga, E., Casari, N., Suman, A. & Pinelli, M. (2020). CoolFOAM: The CoolProp wrapper for OpenFOAM. Computer Physics Communications, 250(October), 107047.

- Ghaderi, A., Dasineh, M., Abbasi, S. & Abraham, J. (2020). Investigation of trapezoidal sharp-crested side weir discharge coefficients under subcritical flow regimes using CFD. Applied Water Science, 10(1), 1-12.
- Januário, J. R. & Maia, C. B. (2020). CFD-DEM simulation to predict the critical velocity of slurry flows. *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 13(1), 161-168.
- Julián, V. L. (2020). (The Fourier Transform in several variables and its applications to the study of PDEs) (Tesis doctoral, Universidad de Cantabría).
- Nguyen, T. T. & Indraratna, B. (2020). A Coupled CFD–DEM Approach to Examine the Hydraulic Critical State of Soil under Increasing Hydraulic Gradient. *International Journal of Geomechanics*, 20(9), 04020138.
- P. Joseph, S. (2020). Some exact solutions for incompressible couple stress fluid flows. Malaya Journal of Matematik, S(1), 648-652.
- Westermaier, S. & Kowalczyk, W. (2020). Implementation of Non-Newtonian Fluid Properties for Compressible Multiphase Flows in OpenFOAM. Open Journal of Fluid Dynamics, 10(02), 135-150.
- Yaseen, Z. M., Ameen, A. M. S., Aldlemy, M. S., Ali, M., Afan, H. A., Zhu, S., ... Tao, H. (2020). State-of-the art-powerhouse, dam structure, and turbine operation and vibrations. *Sustainability (Switzerland)*, 12(4).
- Badwaik, J., Klingenberg, C., Risebro, N. H. & Ruf, A. M. (2021). Multilevel Monte Carlo finite volume methods for random conservation laws with discontinuous flux. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 55(3), 1039-1065. arXiv: 1906. 08991
- Busto, S., Dumbser, M. & Río-Martín, L. (2021). Staggered semi-implicit hybrid finite volume/finite element schemes for turbulent and non-newtonian flows. *Mathematics*, g(22), 1-38.
- Díaz-Carrasco, P., Croquer, S., Tamimi, V., Lacey, J. & Poncet, S. (2021). Advances in numerical reynolds-averaged navier—stokes modelling of wave-structure-seabed interactions and scour. *Journal of Marine Science and Engineering*, 9(6).
- Gassner, G. J. & Winters, A. R. (2021). A Novel Robust Strategy for Discontinuous Galerkin Methods in Computational Fluid Mechanics: Why? When? What? Where? *Frontiers in Physics*, 8(January), 1-24.
- Mattos-Villarroel, Dante, E., Flores-Velazquez, Jorge, Ojeda-Bustamante, W., Iñiguez-Covarrubias, M., ... Salinas-Tapia, H. (2021). Hydraulic analysis of a compound weir (triangular-rectangular) simulated with computational fluid dynamics (CFD). *Tecnología y ciencias del agua*, 12(4), 112-162.
- Parés-Pulido, C. (2021). Finite volume methods for the computation of statistical solutions of the incompressible Euler equations. 1000, 1-35. arXiv: 2109.14521

Voet, L. J., Ahlfeld, R., Gaymann, A., Laizet, S. & Montomoli, F. (2021). A hybrid approach combining DNS and RANS simulations to quantify uncertainties in turbulence modelling. *Applied Mathematical Modelling*, 89, 885-906.