

Desarrollo de Cálculos de Emisividades Aparentes en Cavidades por Medio del Método de Monte Carlo

Gerardo Gámez

Una tesis presentada para el grado de
Master en Física



Departamento de Física
Universidad Nacional Autónoma de Honduras

Mayo, 2017

Dedicado a

Mis hijas Valeria y Valentina

Desarrollo de Cálculos de Emisividades Efectivas en Cavidades por Medio del Método de Monte Carlo

Gerardo Gámez

Sometido para el grado de Master de Física

Mayo, 2017

Abstracto

La emisividad de un cuerpo oscuro es utilizada en el análisis infrarrojo para la determinación de la temperatura a la cual está irradiando. La emisividad es una magnitud física que depende de la temperatura, longitud de onda, geometría del objeto. La tesis esta centrada en la determinación de la emisividad aparente de cavidades de cuerpos oscuros por medio del método de Monte Carlo y software Python. Como se verá una cavidad tiene la característica de incrementar la emisividad de su abertura hasta valores cercanos a la unidad, esto hace que las cavidades sean buenos simuladores de cuerpos negros, y es de gran utilidad al momento de querer calibrar radiómetros, es decir las cavidades pueden servir de patrones para estos dispositivos. El poder calcular la emisividad aparente de las aberturas de las cavidades muestra su utilidad práctica ya que es un parámetro que se debe colocar en los radiómetros y así estos últimos puedan proporcionar una lectura correcta durante su calibración. El método de Monte Carlo esta basado en la estadística de probabilidades y es utilizado ampliamente para poder calcular integrales, como ser la emisividad aparente de una cavidad de un cuerpo oscuro. El software Python dispone de herramientas computacionales para llevar acabo algoritmos matemáticos y poder desarrollar cálculos de integrales con el método de Monte Carlo. Con los cálculos teóricos desarrollados se elaborará tabla de emisividades aparentes, una de estas emisividades aparentes se utiliza como parámetro para una cámara termográfica. Para la verificación del cálculo teórico se toma la lectura de la temperatura de la superficie de la abertura de la cavidad con la cámara termográfica con la emisividad aparente calculada y se compara esta lectura con la mostrada por sensores de temperatura y luego realizar un cálculo

del error de lectura entre ambos mecanismos de medición. En este caso los sensores de temperatura se utilizan como patrones para la cámara termográfica, ya que son de mayor precisión y realizan medición de contacto de las paredes de la cavidad.

Declaratoria

El trabajo en esta tesis es basado en la investigación llevada a cabo en el departamento de Física de la UNAH. Ninguna parte de esta tesis ha sido sometida para cualquier otro grado o calificación y es trabajo propio que no sea el texto referenciado.

Resultado esperado

El resultado esperado en esta tesis es la entrega de software en lenguaje Python con el cual se puedan hacer simulaciones de cálculos de emisividades aparentes en cavidades regulares. Estos datos calculados con un archivo Python se comparan con datos obtenidos experimentalmente con cámara termográfica para verificar el error experimental.

Objetivos generales

1. Desarrollar un procedimiento necesario para calcular la emisividad aparente de la abertura de cavidades de distintas geometrías mediante el método de Monte Carlo.
2. Desarrollar un programa en Python que permita calcular la emisividad aparente de la abertura de cavidades de distintas geometrías, mediante el método de Monte Carlo.
3. Determinar el error de los datos calculados para la emisividad aparente de la abertura de la cavidad por medio de la comparación de la lectura de temperatura por instrumentos de medición.

Objetivos específicos

1. Calcular la emisividad aparente de la abertura para una cavidad cúbica mediante el método de Monte Carlo.
2. Calcular la emisividad aparente de la abertura para una cavidad esférica mediante el método de Monte Carlo.
3. Calcular la emisividad aparente de la abertura para una cavidad cónica mediante el método de Monte Carlo.
4. Calcular la emisividad aparente de la abertura para una cavidad cilíndrica mediante el método de Monte Carlo.
5. Realizar un montaje experimental que consiste de una fuente de calor, una cavidad cúbica, sensores de temperatura RTD y una cámara termográfica que permita elaborar un cálculo del error esperado para la emisividad

aparente calculada para una cavidad cúbica, al comparar las lecturas de temperatura dadas por la cámara termográfica y los sensores de temperatura RTD.

Tabla de contenido

Abstract	III
Declaration	v
Resultado Esperado	VI
1. Radiación térmica	1
1.1. Ángulos Sólidos	3
1.2. Relación entre Radiancia y Exitancia	5
1.3. Relación entre Radiancia e Irradiancia	7
1.4. Radiación de Cuerpo Negro	8
1.5. Propiedades de un Cuerpo Negro	9
1.5.1. Emisor perfecto	9
1.5.2. Radiación isotrópica en una Cavidad Negra	10
1.5.3. Emisor perfecto en toda dirección y toda longitud de onda	10
1.6. Ley de distribución de Planck	11
1.7. Ley de despazamiento de Wien	11
1.7.1. Ley de Stefan-Boltzmann	12
1.8. Emisividad	13
1.9. Absorción, reflexión y transmisión de una superficie	15
1.9.1. Absortividad	16
1.9.2. Reflectividad	18
1.9.3. Reflectividad ρ	20
1.10. Balance de radiación	21
1.11. Ley de radiación térmica de Kirchoff	21

1.12. Cavidades como simuladores de cuerpo negro	22
1.13. Termografía	23
1.13.1. Ciencia térmica	23
1.13.2. Componentes de cámara termográfica	26
1.13.3. Calibración de cámaras termográficas	27
2. Método de Monte Carlo	29
2.1. Introducción	29
2.2. Simulación Monte Carlo	29
2.3. Probabilidad	30
2.4. Números aleatorios	31
2.4.1. Generación de números aleatorios y variables	31
2.5. Distribuciones de probabilidad	33
2.6. Variables aleatorias continuas	34
2.7. Teorema de Límite Central	35
2.8. Muestro de variables aleatorias	38
2.8.1. Muestreo de distribuciones de multivariabes	39
2.9. Caminos aleatorios, cadenas de Markov	40
2.9.1. Propiedades de una cadena de Markov Discreta	41
2.9.2. Estimadores y procesos de Markov	43
2.10. Aplicaciones utilizando la cadena de Markov	44
2.10.1. Transporte de radiación y caminos aleatorios	45
3. Método de traceado de Monte Carlo	50
3.1. Transferencia de calor por cambio radiativo entre superficies	50
3.2. El método de traceado de Monte Carlo	51
3.2.1. Paso 1: Inicialización de contadores de muestreo de función de dis- tribución de probabilidad	55
3.2.2. Paso 2: punto de emisión de rayo	55
3.2.3. Paso 3: determinar la dirección de emisión del rayo de energía	59
3.2.4. Paso 4: determinar el punto de intersección del rayo emitido con las paredes de la cavidad	61

3.2.5. Paso 6: determinar si el rayo de energía es absorbido o reflejado . . .	65
3.2.6. Paso 7: determinar si la reflexión es difusa o especular	66
3.2.7. Pasos 8e y 8d: determinar la dirección de la reflexión especular y difusa	66
3.3. Simulaciones de caminos aleatorios aplicados a cavidades para el cálculo de emisividades aparentes con el método de Monte Carlo	67
3.4. Comparación de datos calculados con datos medidos	70
 Bibliografía	 80
 Apéndice	 83
 A. Programas de python desarrollados	 83
A.1. Programa para el cálculo de emisividad aparente para una cavidad esférica	83
A.2. Programa para observar la trayectoria de los rayos de energía en una cavi- dad esférica	90
A.3. Programa para el gráfico de la emisividad aparente de la apertura de una cavidad esférica	93

Lista de figuras

1.1. Espectro electromagnético [2]	2
1.2. Radiación emitida por una superficie. (a) Distribución espectral. (b) Distribución direccional [2]	3
1.3. Ángulo sólido de una superficie hemisférica [4]	4
1.4. Emisión desde elemento diferencial dentro de una hemisfera hipotética [2] .	6
1.5. Naturaleza direccional de radiación incidente [2]	7
1.6. Geometría de cavidad para la derivación de las propiedades de un cuerpo negro [5]	10
1.7. Espectro de potencia emitida de un cuerpo negro [2]	12
1.8. Ley de Stefan-Boltzman	13
1.9. Comparación de emisión de superficie entre un cuerpo negro y una superficie real: (a) distribución espectral y (b) distribución direccional de radiancia aumiendo isotropía azimutal [5]	14
1.10. Procesos de absorción, reflexión, transmisión en un medio semitransparente [3]	16
1.11. Geometría para la BRDF [6]	19
1.12. Cavidad que aproxima a un cuerpo negro [2]	23
1.13. Imagen infrarroja [27]	24
1.14. Corriente de convección [9]	25
1.15. (a) Placa electrónica utilizada en cámaras FLIR ,(b) placas de microbolómetros 512 x 512 ALADDIN III, (c) 1024 x 1024 ALADDIN III [9] . .	27
1.16. Interacción del flujo radiante en mediciones con una cámara infrarroja [9] .	27
1.17. (a) Cuarto de laboratorio para la calibración de cámaras infrarrojas, (b) Conjunto de cuerpos negros [9]	28

2.1.	A la izquierda: Las primeras 800 letras de las 20,000 totales compiladas por Markov y tomando de del primer y medio capitulos del poema de Pushkin "Eu ^g eny Onegin". A la derecha: El conteo de Markov de vocales en la primera matriz de total de 40 matrices de 10 x 10 letras. [15]	46
3.1.	Rutas posibles de energía en una cavidad arbitraria [4]	51
3.2.	Diagrama lógico para la implementación de Monte Carlo, caminos aleatorios de transportación de radiación para una superficie difusa-especular, con paredes oscuras.	54
3.3.	Punto de emisión desde la abefrtura de la cavidad	58
3.4.	Puntos de intersección de la línea que define la trayectoria del rayo de energía con las superficies de una cavidad.	63
3.5.	A la izquierda la cavidad cilíndrica y a la derecha la cavidad cónica.	69
3.6.	A la izquierda la cavidad cónica cilíndrica y a la derecha la cavidad doblemente cónica.	69
3.7.	A la izquierda la cavidad cúbica y a la derecha la cavidad esférica.	70
3.8.	Modelo básico de cavidad para la comprobación del cálculo de emisividad aparente de la abertura con el método de Monte Carlo.	74
3.9.	A la izquierda: modelo básico de cavidad, a la derecha: sensores de temperatura y plc Unitronics V350	74
3.10.	Instrumentación utilizada	75
3.11.	Montaje de instrumentación	76
3.12.	Toma de imagen infrarroja de la cavidad.	76

Lista de tablas

3.1. Tabla resumen de cálculos para emisividades aparentes para una cavidad cilíndrica con diámetro = 10.0 u, altura = 10.0 u, radio de abertura desde 3.0 hasta 5.0 u.	71
3.2. Tabla resumen de cálculos para emisividades aparentes para una cavidad cónica con diámetro = 10.0 u, altura = 10.0 u, radio de abertura desde 3.0 hasta 5.0 u.	71
3.3. Tabla resumen de cálculos para emisividades aparentes para una cavidad cónica - cilíndrica con diámetro = 10.0 u, altura = 10.0 u, radio de abertura desde 3.0 hasta 5.0 u.	72
3.4. Tabla resumen de cálculos para emisividades aparentes para una cavidad doble cónica con diámetro = 10.0 u, altura = 20.0 u, radio de abertura desde 3.0 hasta 5.0 u.	72
3.5. Tabla resumen de cálculos para emisividades aparentes para una cavidad cúbica con lado = 10.0 u, lado de abertura desde 5.0 hasta 10.0 u.	73
3.6. Tabla resumen de cálculos para emisividades aparentes para una cavidad esférica con diámetro = 10.0 u, radio de abertura desde 3.0 hasta 5.0 u.	73
3.7. Toma de datos de temperatura entre la temperatura medida por la cámara termográfica y los sensores de temperatura de la cavidad	77

Capítulo 1

Radiación térmica

Uno de los principales retos en la inspección infrarroja para la correcta calibración de un radiómetro o cámara termográfica es la determinación apropiada de la emisividad de un cuerpo negro. Las cavidades se utilizan para aumentar la emisividad de una superficie dada y llevarla cercano al valor de la unidad la que corresponde a un cuerpo cercano al comportamiento de un cuerpo negro.

Existen varios métodos para determinar la emisividad de una superficie plana como ser utilizar una cámara termográfica calibrada para que por medio de software se ajuste la emisividad hasta encontrarla.

Como menciona Prokhorov [1] se han desarrollado muchos métodos experimentales para el cálculo de emisividades de cavidades que en su mayoría sirven para comprobar los métodos computacionales, debido a las distintas variable que depende la emisividad como ser la longitud de onda, temperatura, rango espectral, geometría, ángulos, materiales.

Para lograr realizar un cálculo de la emisividad aparente de una cavidad, se comienza introduciendo conceptos de radiación, de acuerdo a [2] se define radiación térmica como la razón a la cual la energía es emitida por la materia como resultado de su temperatura.

Todos los cuerpos emiten a nuestro alrededor: los muebles, las paredes, las puertas, el suelo, los edificios, el sol. Estas oscilaciones de emisión son sostenidas por la energía interna es decir por la temperatura de la materia. Por lo que se asocia la emisión térmica con las condiciones de excitación térmica de la materia. Todas las formas de materia emiten radiación. Se concentrará en la emisión como un fenómeno superficial.

En la mayoría de los sólidos y líquidos la radiación que es emitida se origina por moléculas

que están dentro de una distancia de $1 \mu\text{m}$ desde la superficie expuesta, por lo que la emisión es vista como un fenómeno de superficie en escala macro.

La radiación puede ser vista como la propagación de ondas electromagnéticas. Para la propagación de radiación en un medio en particular, la frecuencia ν y la longitud de onda λ , están relacionadas por

$$\lambda = \frac{c}{\nu}, \tag{1.0.1a}[1]$$

Donde c es la velocidad de la luz en el medio. Para la propagación en el vacío, $c_0 = 2,998 \times 10^8 \text{ m/s}$. El espectro electromagnético completo se puede ver en la siguiente imagen 1.1.

Los rayos gamma, rayos X y radiación ultravioleta que son de onda corta son de primaria importancia para los estudios de físicos de alta-energía y los ingenieros nucleares, mientras que las microondas de onda larga y ondas de radio ($\lambda > 10^5 \mu\text{m}$) son de interés para los ingenieros eléctricos. La porción del espectro, que se extiende desde aproximadamente 0.1 a $100 \mu\text{m}$ e incluye una porción de UV, luz visible e infrarrojo (IR), que es dicho como radiación térmica por que es causada y afectada por el estado térmico y la temperatura de la materia.

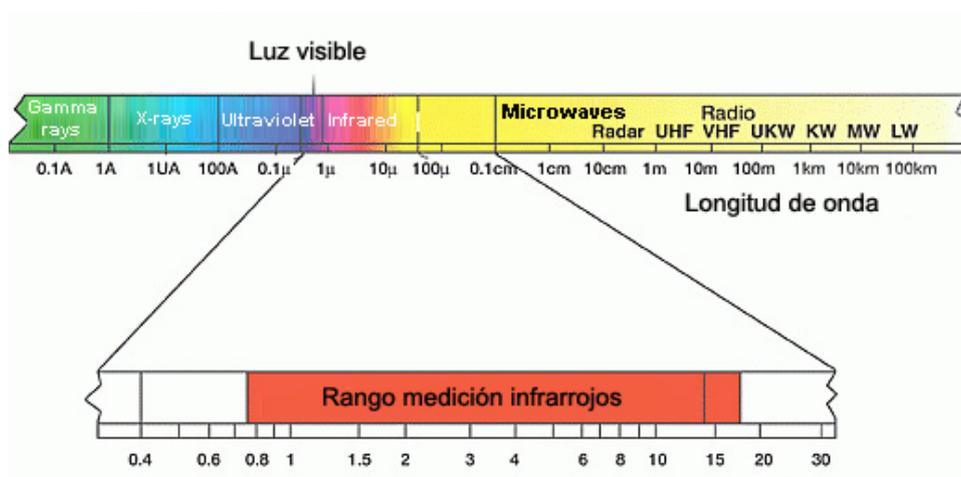


Figura 1.1: Espectro electromagnético [2]

Como menciona [3] es importante notar que la radiación térmica emitida por una superficie envuelve un rango de longitudes de onda. Mas aún como se muestra en la

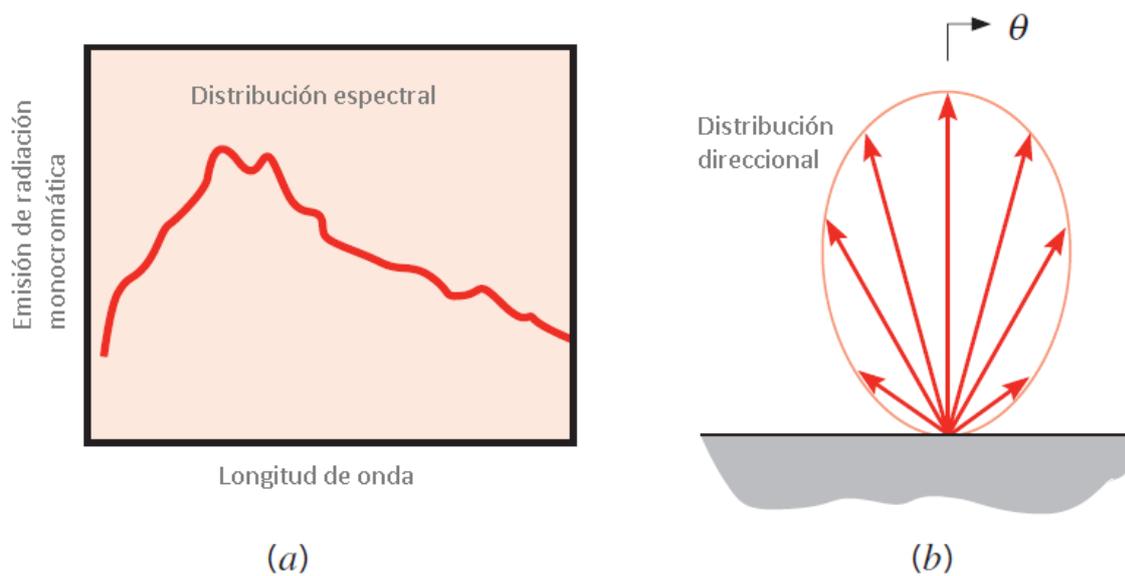


Figura 1.2: Radiación emitida por una superficie. (a) Distribución espectral. (b) Distribución direccional [2]

imagen 1.2, la cantidad de radiación por unidad de intervalo de longitud de onda, varia con la longitud de onda. La naturaleza espectral de la radiación térmica es una de las dos características que complica su descripción. La segunda descripción esta relacionada con su naturaleza direccional como se muestra en la imagen 1.2, una superficie puede emitir preferencialmente en ciertas direcciones, creando una distribución direccional de la radiación emitida. Para poder cuantificar apropiadamente el campo de radiación, se debe por lo tanto estar listo para tratar ambas las características direccionales y espectrales.

1.1. Ángulos Sólidos

La radiación infrarroja puede incidir en una superficie y ser reflejada o emitida en diferentes direcciones. Los ángulos sólidos nos dan una perspectiva matemática de las propiedades de dirección de la radiación. En [4] se define el vector de dirección en términos de coordenadas esféricas. Se considera un punto P sobre una superficie opaca dA radiando dentro de otro medio, por ejemplo aire como se muestra en imagen 1.3.

Es aparente que la superficie puede irradiar en infinidad de direcciones con cada *rayo* penetrando a través de una *hemisfera* de radio unitario como se indica en la figura 1.3. La superficie total de la hemisfera, $2\pi \cdot 1^2 = 2\pi$, es conocida como el ángulo sólido total

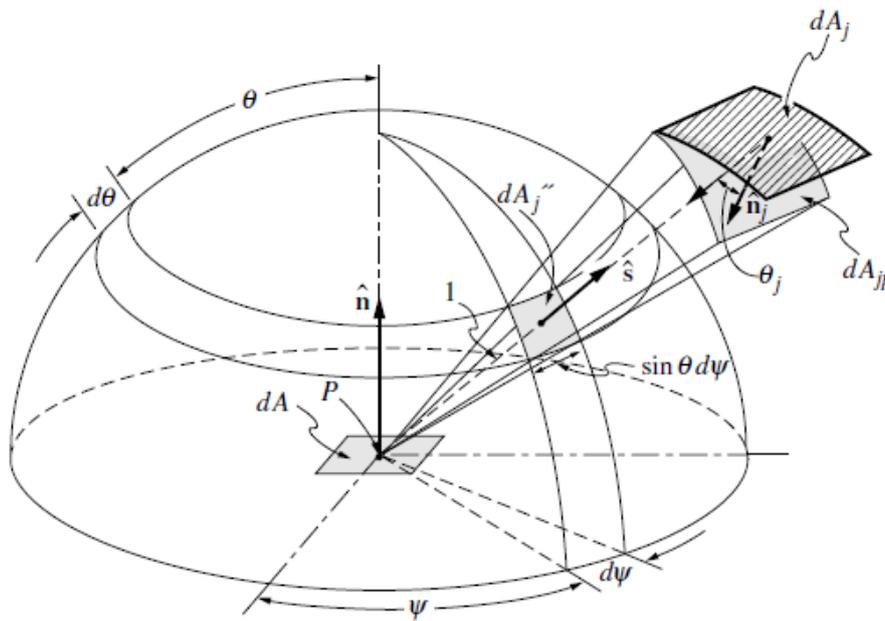


Figura 1.3: Ángulo sólido de una superficie hemisférica [4]

sobre la superficie. Una dirección de emisión arbitraria desde la superficie esta especificada por el vector unitario de dirección \hat{s} , el cual puede ser expresado en términos del ángulo polar θ (medido desde la *normal de la superficie* \hat{n}) y el *ángulo azimutal* ϕ (medido entre un eje arbitrario, eje x comumente, sobre la superficie y la proyección de \hat{s} sobre la superficie). Es visto que, para una hemisfera, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

El *ángulo sólido* con el cual una superficie infinitesimal dA_j es visto desde un punto P esta definido como la proyección de la superficie sobre un plano normal al vector dirección, dividido por el cuadrado de la distancia S entre dA_j y P , como se muestra en la figura 1.3. Si la superficie esta proyectada sobre la hemisfera unitaria sobre el punto, el ángulo sólido es igual al area proyectada sobre si misma, o

$$d\omega = \frac{dA_{jp}}{S^2} = \frac{\cos \theta_j dA_j}{S^2} = dA''_j, \tag{1.1.2a} [2]$$

Por lo que, un ángulo infinitesimal es simplemente un área infinitesimal sobre una esfera unitaria, o

$$d\omega = dA''_j = \sin \theta d\theta d\phi, \tag{1.1.2a} [3]$$

Integrando sobre todas las superficies posibles obtenemos,

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi, \quad (1.1.2a) [4]$$

para el ángulo sólido total sobre a superficie, como visto anteriormente. El ángulo sólido con el cual una superficie finita A_j es visto desde un punto P , sigue inmediatamente de ecuación [2] como

$$\omega = \int_{A_{jp}} \frac{dA_{jp}}{S^2} = \int_A \frac{\cos \theta_j dA_j}{S^2} = \int_{A_j} dA''_j = A''_j, \quad (1.1.2a) [5]$$

que es la proyección de A_j sobre la hemisfera sobre P .

Los ángulos sólidos son un espacio de dos dimensiones: similar a la dirección que un ángulo que representa una dimensión que puede variar entre 0 y π (medido en radianes, equivalente a la longitud de arco), el ángulo sólido puede variar entre 0 y 2π (medidos en esteradianes, sr, equivalente al área superficial sobre una hemisfera).

1.2. Relación entre Radiancia y Exitancia

Se puede expresar las relaciones que hay entre la radiación de una superficie como ser la radiación incidente, reflejada, emitida. Cada uno de estos términos, si las distribuciones espectrales y direccionales de la radiación espectral $L'_{\lambda,em}(\lambda, \theta', \phi')$ son conocidos, la potencia irradiada por unidad de area de la superficie emitiendo asociada con la emisión dentro de cualquier ángulo sólido o sobre cualquier intervalo de longitud de onda puede ser determinado como lo hace DeWitt[3], integrando

$$\frac{d\Phi_\lambda}{dA} = L'_{\lambda,em}(\lambda, \theta', \phi') \cdot \cos \theta' \cdot d\omega', \quad (1.2.2a) [6]$$

donde Φ_λ es la potencia radiante espectral [$W \cdot \mu m^{-1}$]. Por ejemplo, sustituyendo en ecuación [1.1.2a], la potencia radiante espectral por unidad de area asociada con la emisión dentro de un espacio hemisférico sobre dA (imagen 1.4), la cual es definida como la auto-exitancia espectral, $M_{\lambda,em}[W \cdot m^{-2} \cdot \mu m^{-1}]$, puede ser expresada como

$$M_{\lambda,em}(\lambda) = \frac{d\phi'_{\lambda,em}}{dA} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} L'_{\lambda,em}(\lambda, \theta', \phi') \cdot \cos \theta' \cdot \sin \theta' \cdot d\theta' d\phi', \quad (1.2.2a) [7]$$

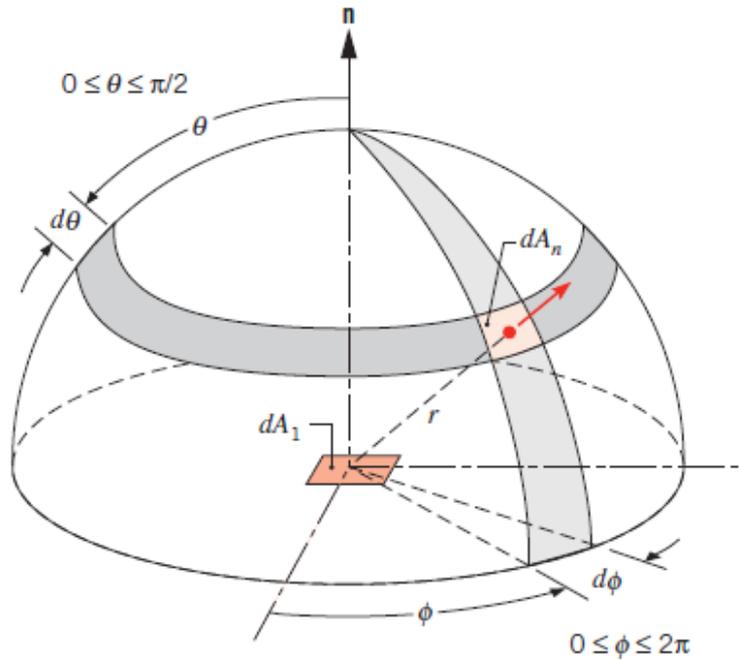


Figura 1.4: Emisión desde elemento diferencial dentro de una hemisfera hipotética [2]

Segue que la potencia radiante espectral por unidad de área emitida sobre todas las longitudes de onda y todas las posibles direcciones, la cual es definida como la auto-extancia total, $M_{em}[\text{W}\cdot\text{m}^{-2}]$, es

$$M_{em} = \int_0^{\infty} M_{\lambda,em}(\lambda) \cdot d\lambda = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} L'_{\lambda,em}(\lambda, \theta', \phi') \cdot \cos \theta' \cdot \sin \theta' \cdot d\theta' d\phi' d\lambda, \quad (1.2.2a) [8]$$

cuando se habla de un emisor difusor isotrópico, también conocido como el correspondiente a una superficie lambertiana, en el cual la radiancia de la radiación emitida es independiente de la dirección. Sigue de [8] que

$$M_{\lambda,em}(\lambda) = \pi L'_{\lambda,em}(\lambda), \quad (1.2.2a) [9]$$

Similarmente

$$M_{em} = \pi L'_{em}, \quad (1.2.2b) [10]$$

donde $L'_{em}[\text{W}\cdot\text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1}]$ es la radiancia total de la radiación emitida.

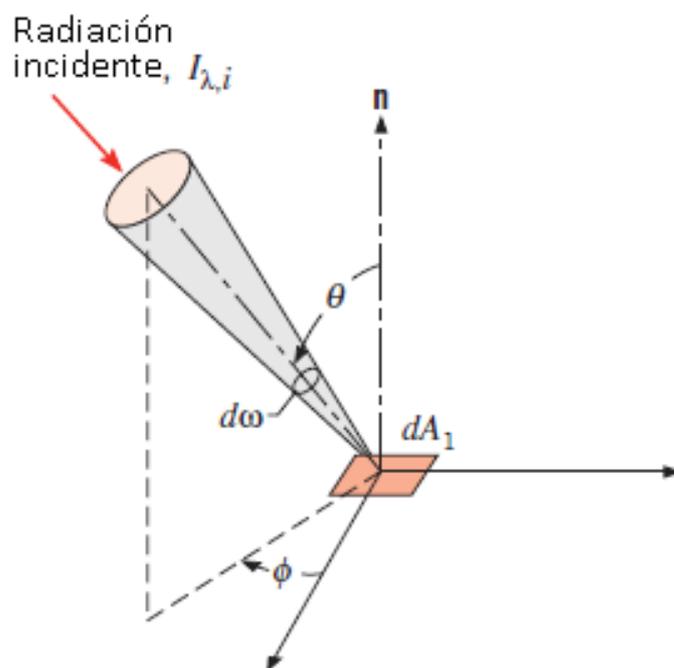


Figura 1.5: Naturaleza direccional de radiación incidente [2]

1.3. Relación entre Radiancia e Irradiancia

La radiación incidente sobre una superficie puede ser originada por emisión y reflexión de otras superficies y tiene distribuciones específicas de dirección y espectro. Como se muestra en imagen 1.5, la radiación incidente puede ser caracterizada en términos de la radiancia espectral incidente, $L_{\lambda,i}$.

Esta definida como la razón de la energía radiante, ϕ_i , (potencia radiante) a la longitud de onda λ que es incidente desde la dirección (θ, ϕ) , por unidad de área de la dirección normal de la superficie incidente, por unidad de ángulo sólido en esta dirección, por unidad de longitud de onda $d\lambda$ y λ . Esto es,

$$L_{\lambda,i} = \frac{d^3\Phi_i}{dA \cdot \cos \theta \cdot d\omega \cdot d\lambda}, \quad (1.3.3a) [11]$$

La irradiancia espectral, $E_\lambda [\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \mu\text{m}^{-1}]$, esta definida como la potencia radiante espectral a la longitud de onda λ , incidente sobre una superficie por unidad de área de la superficie por unidad de intervalo de longitud de onda $d\lambda$ alrededor de λ . Esto es,

$$E_\lambda = \frac{d\Phi_{\lambda,i}}{dA}, \quad (1.3.2a) [12]$$

y sustituyendo en ecuación (1.3.3a)[12], sigue que

$$E_\lambda(\lambda) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} L_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta d\phi, \quad (1.3.2a) [13]$$

La irradiancia total, $E[\text{W}\cdot\text{m}^{-2}]$, representa la razón a la cual la radiación es incidente por unidad de area desde todas las direcciones y en todas las longitudes de onda, sigue que

$$E = \frac{d\Phi_i}{dA} = \int_0^\infty E_\lambda(\lambda) \cdot d\lambda, \quad (1.3.2a) [14]$$

y de la ecuación 1.3.2a

$$E = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} L_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) \cdot \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi d\lambda, \quad (1.3.2b) [15]$$

Para una superficie lambertiana, donde $L_{\lambda,i}$ es independiente de (θ, ϕ) sigue que

$$E_\lambda(\lambda) = \pi L_{\lambda,i}(\lambda), \quad (1.3.3a) [16]$$

y de la ecuación 1.3.2b

$$E = \pi L_i, \quad (1.3.3b) [17]$$

1.4. Radiación de Cuerpo Negro

De acuerdo a [5] un *cuerpo negro* esta definido como un cuerpo ideal que permite que *toda* la radiación incidente ingrese en el (no hay energía reflejada) e internamente absorbe *toda* la radiación incidente (no hay energía transmitida), Por lo tanto un cuerpo negro es un perfecto absorbedor para toda la radiación incidente.

Como un absorbedor perfecto, sirve como un estandard con el cual los absorbedores reales

pueden ser comparados. Un cuerpo negro también emite la máxima energía radiante y por lo tanto sirve como un estándar ideal con un cuerpo real emitiendo radiación.

Solamente unos pocos materiales, tales como el carbón negro, carboridio, platino negro, oro negro, y algunas pinturas negras especiales sobre sustratos absorbentes, se acercan a un cuerpo negro en su habilidad de absorber energía. Un cuerpo negro deriva su nombre desde la observación que buenos absorbentes de luz visible aparentan de hecho negros al ojo. Como sea, excepto para la región visible, el ojo no es un buen indicador en su habilidad de indicador sobre el rango de longitudes de onda de radiación térmica. Por ejemplo, una superficie pintada con pintura a base de agua es un buen absorbente de radiación infrarroja emitida a temperatura de habitación, aunque es un pobre absorbente para la región de longitudes de onda más cortas características de la luz visible como esta evidenciado por su apariencia blanca.

1.5. Propiedades de un Cuerpo Negro

1.5.1. Emisor perfecto

Se puede considerar un cuerpo negro a temperatura uniforme colocado en vacío dentro de una cavidad perfectamente aislada de forma arbitraria cuyas paredes son cuerpos negros a temperatura uniforme inicialmente diferente de la del cuerpo negro encerrado (imagen 1.6). Después de un periodo de tiempo, el cuerpo negro y la cavidad tendrán una temperatura de equilibrio uniforme. En esta condición de equilibrio el cuerpo negro radiará energía así como absorbe. Para probar esto, se considera que ocurriría si las cantidades de radiación no fueran iguales con el sistema con temperatura uniforme. Entonces el cuerpo negro debería incrementar o decrementar su temperatura. Esto conllevaría una cantidad neta de calor transferido entre dos cuerpos con igual temperatura, lo cual viola la segunda ley de la termodinámica. Sigue que, un cuerpo negro absorbe la máxima radiación incidente posible de la cavidad en cualquier dirección y en cualquier longitud de onda, también debe de emitir la máxima cantidad de radiación.

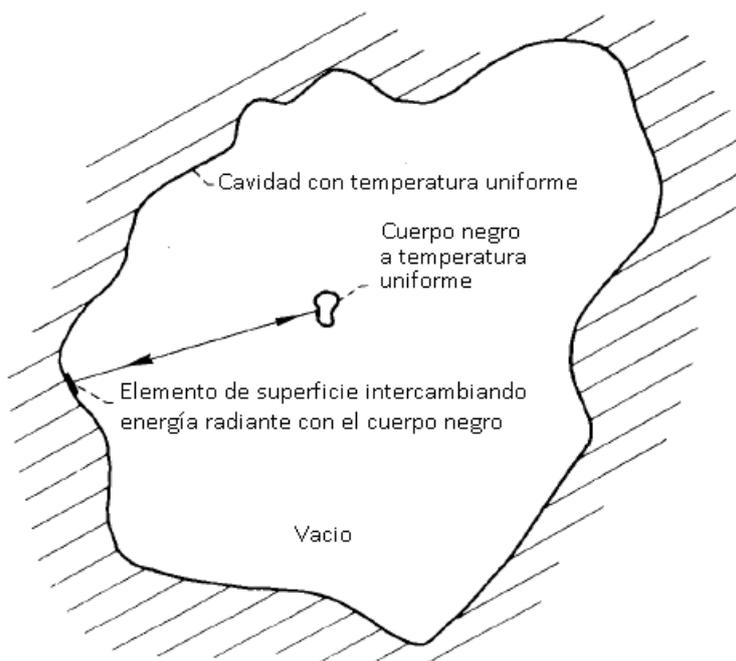


Figura 1.6: Geometría de cavidad para la derivación de las propiedades de un cuerpo negro [5]

1.5.2. Radiación isotrópica en una Cavidad Negra

Ahora, se considera la cavidad isotérmica con paredes negras y forma arbitraria como se muestra en la imagen 5, se mueve el cuerpo negro a otra posición, y se rota a otra orientación. El cuerpo negro debe aún estar a la misma temperatura por que la cavidad completa permanece isotérmica. Consecuentemente el cuerpo negro debe emitir la misma cantidad de radiación como antes, para estar en equilibrio, el cuerpo debe estar recibiendo la misma cantidad de radiación de las paredes de la cavidad. Por lo tanto, la radiación total recibida por el cuerpo negro es independiente de la orientación del cuerpo o la posición en la cavidad. Por lo tanto, la radiación viajando a través de cualquier punto dentro de la cavidad es independiente de su posición o dirección. Esto significa que la radiación negra llenando la cavidad es *isotrópica*.

En adición para emitir la máxima posible radiación total, un cuerpo negro emite la máxima energía posible en toda dirección y a cada longitud de onda.

1.5.3. Emisor perfecto en toda dirección y toda longitud de onda

Dado que el cuerpo negro no puede violar la segunda ley de la termodinámica y se puede decir que un cuerpo negro debe emitir la máxima energía posible en toda dirección y en toda longitud de onda para mantener la condición de equilibrio térmico.

1.6. Ley de distribución de Planck

La ley de distribución de Planck se explica en [5] en la cual para un cuerpo negro la distribución espectral de potencia emisiva hemisférica e intensidad radiante en el vacío esta dada como una función de la longitud de onda y la temperatura absoluta del cuerpo negro por

$$e_{\lambda b}(\lambda, T) = \frac{2hc_0}{\lambda^5(e^{\frac{hc_0}{\lambda kT}} - 1)}, \quad (1.6.3a) [18]$$

que también es conocida como radiancia espectral $L_{\lambda,b}(\lambda, T)$. Donde $h = 6,626 \times 10^{-24}$ J·s y $k = 1,3807 \times 10^{-23}$ J·K⁻¹ son las constantes universales de Planck, respectivamente, $c_0 = 2,9979 \times 10^8$ m/s es la velocidad de la luz en el vacío y T es la temperatura absoluta del cuerpo negro [K]. Para una mejor comprensión de la ecuación anterior se muestra su gráfico en la imagen 1.7.

Algunas observaciones que se pueden hacer de la imagen anterior es que un cuerpo negro es visible a una temperatura de 5800 K comparativa a la radiación solar, a medida se incrementa la temperatura a cualquier longitud de onda la radiación emitida incrementa, dentro de cierto rango a menores longitudes de onda a una temperatura dada la radiación emitida se disminuye. Se puede ver del grafico el corrimiento del máximo para curvas de temperatura constante hacia longitudes de onda menores. Esto se conoce como ley de Wien.

1.7. Ley de desplazamiento de Wien

Otra ecuación que relacion dentro de un intervalo determinado de longitudes de onda la radiación emitida máxima en un longitud de onda en función de la temperatura absoluta, esta dada por la ley de desplazamiento de Wien [5]

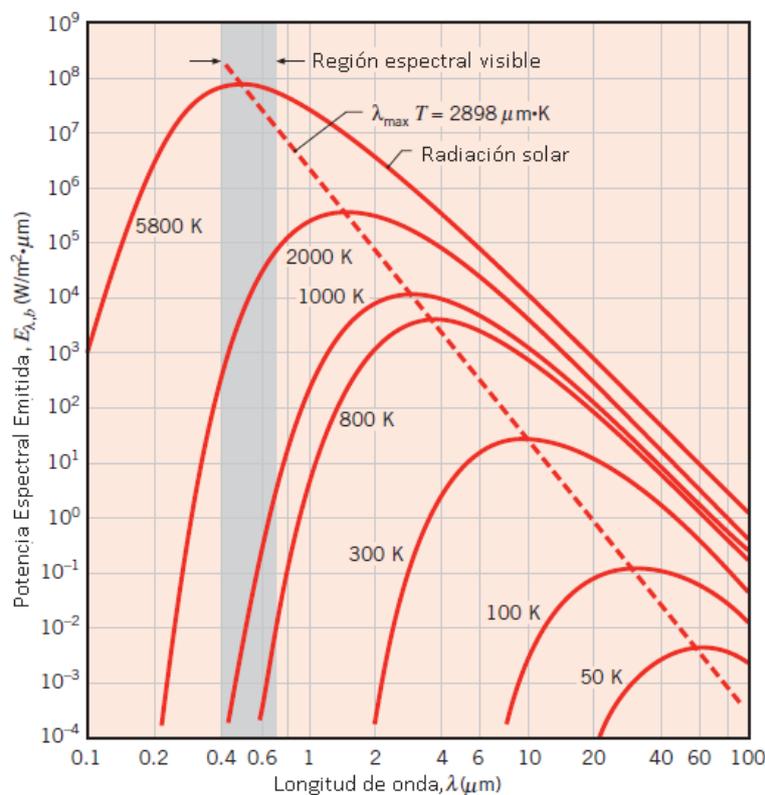


Figura 1.7: Espectro de potencia emitida de un cuerpo negro [2]

$$\lambda_{max}T = C_3, \quad (1.7.2a) [19]$$

donde la constante de radiación $C_3 = 2897,7 \mu m \cdot K$.

El gráfico de esta ecuación se puede observar en la imagen 1.6 como la línea punteada, esta ecuación nos proporciona el pico del gráfico de la ley de distribución de Plank para un cuerpo negro.

1.7.1. Ley de Stefan-Boltzmann

Tomando la ecuación 1.6.3a e integrándola sobre todas las longitudes de onda, se encuentra el área bajo la curva que proporciona una relación entre la exitancia como función de la temperatura absoluta, es conocida como la Ley de Stefan-Boltzman en honor a Jozef Stefan y Ludwig Boltzmann y esta dada por

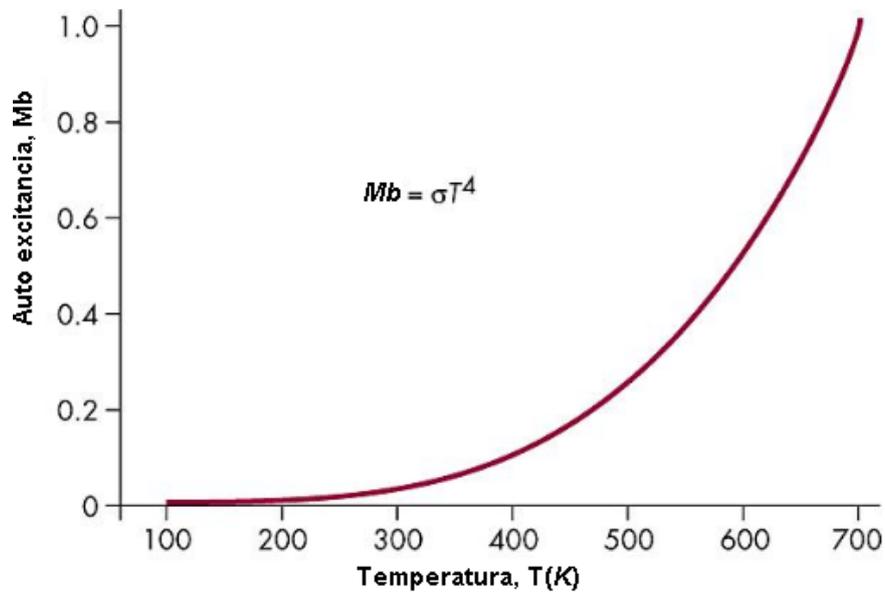


Figura 1.8: Ley de Stefan-Boltzman

$$M_b = \int_0^{\infty} M_{\lambda,b} \cdot d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{2hc_0}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc_0}{\lambda kT}} - 1 \right)}, \quad (1.7.2a) [20]$$

con resultado

$$M_b = \sigma T^4, \quad (1.7.2b) [21]$$

donde σ es la constante de Boltzmann con valor

$$\sigma = \frac{2k^4\pi^5}{15c_0^2h^3} = 5,670 \times 10^{-8} \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}, \quad (1.7.3a) [22]$$

De la ecuación 1.2.2b se obtiene la expresión para la radiancia total asociada a un cuerpo negro

$$L_b = \frac{M_b}{\pi}, \quad (1.7.2a) [23]$$

1.8. Emisividad

Sabiendo que radiación emitida por un cuerpo negro es la máxima radiación posible emitida por un cuerpo, la radiación emitida a una determinada longitud de onda y

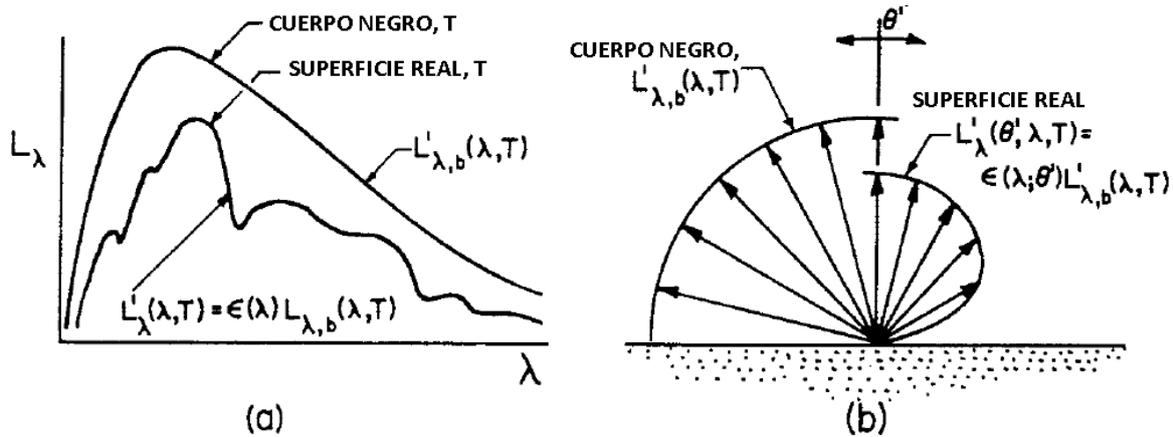


Figura 1.9: Comparación de emisión de superficie entre un cuerpo negro y una superficie real: (a) distribución espectral y (b) distribución direccional de radiancia aumentando isotropía azimutal [5]

temperatura absoluta por una superficie ideal es referenciada a la de un cuerpo negro, a esta propiedad se le conoce como emisividad. La distribución espectral de potencia de radiación depende de la longitud de onda y la temperatura, en un superficie real se debe analizar el comportamiento de la radiancia como función de estas dos variables [3].

Como se muestra en la imagen 1.9 la potencia de radiación por unidad de area varía en comportamiento de un cuerpo negro versus un cuerpo real, así también la distribución de dirección de radiación varía con respecto a la distribución de un cuerpo real. La emisividad direccional-espectral a una determinada longitud de onda y temperatura absoluta de una superficie esta dada por la razón de la radiación emitida por la superficie y la radiación de un cuerpo negro [3]

$$\epsilon(\lambda, \theta', \phi', T) = \frac{L'_{\lambda,em}(\lambda, \theta', \phi', T)}{L'_{\lambda,b}(\lambda, T)}, \quad (1.8.2a) [24]$$

La dependencia de la emisividad puede ser simplificada a $\epsilon(\lambda, \theta')$.

También se encuentra que la emisividad hemisférica espectral, $\epsilon(\lambda; 2\pi)$, representa un promedio sobre todas las direcciones dentro del espacio hemisférico sobre la superficie y esta definido como

$$\epsilon(\lambda, 2\pi) = \frac{M_{\lambda,em}(\lambda, T)}{M_{\lambda,b}(\lambda, T)} \quad (1.8.2a) [25]$$

Utilizando la ecuación (1.2.2a)[8], queda

$$\epsilon(\lambda, 2\pi) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} L_{\lambda,em}(\lambda, \theta', \phi', T) \cdot \cos \theta' \cdot \sin \theta' \cdot d\theta' d\phi'}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} L_{\lambda,b}(\lambda, T) \cdot \cos \theta' \cdot \sin \theta' \cdot d\theta' d\phi'} \quad (1.8.2a) [26]$$

Sabiendo que el radiación emitida por un cuerpo negro es independiente de la dirección,

$$\epsilon(\lambda, 2\pi) = \frac{L_{\lambda,b}(\lambda, T) \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \epsilon(\lambda; \theta', \phi') \cdot \cos \theta' \sin \theta' \cdot d\theta' \cdot d\phi'}{\pi L_{\lambda,b}(\lambda, T)} \quad (1.8.2a) [27]$$

Si se asume que la emisividad, $\epsilon(\lambda; \theta', \phi')$ es independiente del ángulo azimuthal, ϕ' , se obtiene,

$$\epsilon(\lambda; 2\pi) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \epsilon(\lambda; \theta') \cdot \cos \theta' \cdot \sin \theta' \cdot d\theta' \quad (1.8.2a) [28]$$

Para un emisor difuso isotrópico, $\epsilon(\lambda; \theta')$ debe ser independiente de la dirección. Por lo que sigue, $\epsilon(\lambda; 2\pi) = \epsilon(\lambda; \theta')$

En el caso de radiación emitida por un cuerpo real, se puede expresar como

$$M_b = \epsilon \sigma T^4, \quad (1.8.2a) [29]$$

1.9. Absorción, reflexión y transmisión de una superficie

La irradiancia espectral está definida como el flujo por unidad de area incidente sobre una superficie por unidad de longitud de onda, como en ecuación (1.3.2.a),

$$E_\lambda = \frac{d\Phi_{\lambda,i}}{dA}, \quad (1.9.2a) [30]$$

Este flujo incidente, $\Phi_{\lambda,i}$ al interactuar con un medio se puede descomponer, como menciona [3], la situación mas general es cuando se tiene un medio semitransparente

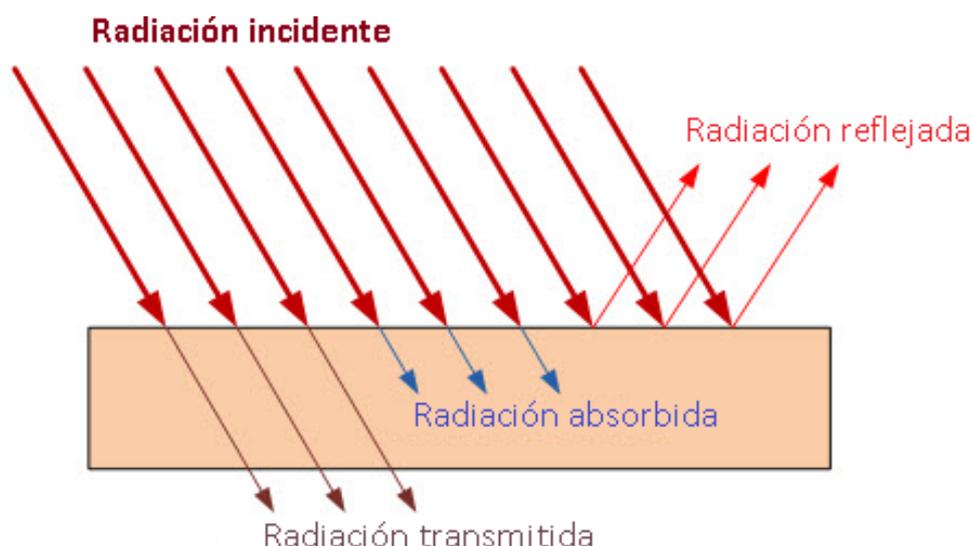


Figura 1.10: Procesos de absorción, reflexión, transmisión en un medio semitransparente [3]

de tal manera que las componentes resultantes de la irradiación espectral de este medio pueden ser una porción de radiación reflejada, absorbida y transmitida, tal que

$$\Phi_{\lambda,i} = \Phi_{\lambda,r} + \Phi_{\lambda,a} + \Phi_{\lambda,t} \quad (1.9.2a) [31]$$

Una situación similar, son los cuerpos opacos, en los cuales la absorción ocurre en una profundidad en el medio de algunas longitudes de onda desde la superficie, de tal manera que los procesos de absorción y reflexión, son fenómenos de superficie.

1.9.1. Absortividad

Es conveniente ver una descripción microscópica de los fenómenos de emisión y absorción. Einstein demostró que un átomo puede absorber un fotón de energía, hf [14], proveniente de un campo de radiación y hacer una transición desde un estado energético inferior, E_1 , hasta un estado energético superior, E_2 , donde $E_2 - E_1 = hf$. La probabilidad de absorción por unidad de tiempo por átomo se puede escribir $B_{12}u(f, T)$, donde B_{12} es el coeficiente de absorción de Einstein y $u(f, T)$ es la densidad de energía por unidad de frecuencia en el campo de radiación. Cuando un átomo en el estado 2 ya está excitado, se observa que posee una probabilidad definida por segundo de efectuar una transición es-

pontanea de vuelta al nivel 1. La velocidad de transición espontánea puede caracterizarse por el coeficiente A_{21} (transiciones por unidad de tiempo).

Si se considera una mezcla de átomos y radiación en equilibrio térmico a la temperatura T . Las poblaciones N_1 y N_2 de los niveles energéticos E_1 y E_2 satisfacen la relación de Boltzman

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-(E_2-E_1)/k_B T} = e^{-hf/k_B T} \quad (1.9.2a) [32]$$

El número de átomos que van de 1 a 2 por unidad de tiempo es igual a $N_1 u(f, T) B_{12}$, el número de átomos que van de 2 a 1 por unidad de tiempo es igual a $N_2 y(f, T) B_{21}$

En equilibrio dinámico el número de transiciones hacia arriba por unidad de tiempo debe ser igual al número de transiciones hacia abajo por unidad de tiempo, se tiene

$$N_1 u(f, T) B_{12} = N_2 [B_{21} u(f, T) + A_{21}] \quad (1.9.2a) [33]$$

Al utilizar la ecuación (1.9.2a)[32], lo anterior queda en

$$u(f, T) = \frac{A_{21}}{B_{12} e^{hf/k_B T} - B_{21}} \quad (1.9.2a) [34]$$

De la ley de radiación de cuerpo negro mencionada en la ecuación (1.6.3a)[18] se obtiene que

$$B_{21} = B_{12} \quad (1.9.2a) [35]$$

La ecuación anterior menciona que cualquier átomo que tenga una probabilidad finita por unidad de tiempo de absorción tiene una probabilidad *igual* de emisión. Como se verá mas adelante también en la ley de Kirchoff.

La absorptividad es la fracción de flujo incidente que es absorbido por la superficie, tal que,

$$\alpha = \frac{d\Phi_a}{d\Phi_i} \quad (1.9.2a) [36]$$

Así como la emisividad, la absorptividad puede ser caracterizada por dependencia direccional y espectral. La absorptividad espectral $\alpha(\lambda; \theta, \phi; T)$, de una superficie a temperatura T esta definida como la fracción de radiancia espectral incidente desde la dirección θ, ϕ que es absorbida por la superficie, matemáticamente,

$$\alpha(\lambda; \theta, \phi; T) = \frac{L_{\lambda,a}(\lambda, \theta, \phi, T)}{L_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi)} \quad (1.9.2a) [37]$$

En muchas aplicaciones es deseable trabajar la absorptividad representando la dirección promedio sobre el espacio hemisférico sobre la superficie, esto es,

$$\alpha(\lambda; 2\pi; T) = \frac{E_{\lambda,a}(\lambda)}{E_{\lambda}(\lambda)} \quad (1.9.2a) [38]$$

Y la absorptividad hemisférica total, $\alpha(t; 2\pi; T)$, representa el promedio sobre la dirección y la longitud de onda.

$$\alpha(t; 2\pi; T) = \frac{E_a(\lambda)}{E} \quad (1.9.2a) [39]$$

1.9.2. Reflectividad

La reflexión es el proceso mediante el cual la radiación incidente en una superficie deja tal superficie desde el sitio de incidencia sin cambiar en frecuencia [6]. Esta definición de reflectancia como el porcentaje de luz que rebota” de una superficie. Se pueden derivar dos funciones: la *BRFD*, f_r , que describe la relación de la radiancia reflejada a la radiancia incidente; la *reflectancia* ρ , el cual describe la relación del flujo reflejado al flujo incidente.

BRDF

La función f_r , conocida por sus siglas en inglés, BRFD, función de distribución de reflectancia bidericcional, esta definida como [6]

$$f_r(d\vec{\omega}_i \rightarrow d\vec{\omega}_r) = \frac{dL_r(d\vec{\omega}_i, d\vec{\omega}_r, E)}{L_i(d\vec{\omega}_i)d\vec{\omega}_i^N} \left[\frac{1}{sr} \right] \quad (1.9.2a) [40]$$

su geometría esta ilustrada en la imagen 1.9.

$dL_r(d\vec{\omega}_i, d\vec{\omega}_r, E)$, es la radiancia espectral diferencial del flujo reflejado en $d\vec{\omega}_i, d\vec{\omega}_r$, y el término del denominador, $L_i(d\vec{\omega}_i)d\vec{\omega}_i^N$, es la irradiancia diferencial resultante de la radiancia espectral incidente con la componente normal del ángulo sólido diferencial $d\vec{\omega}_i^N$

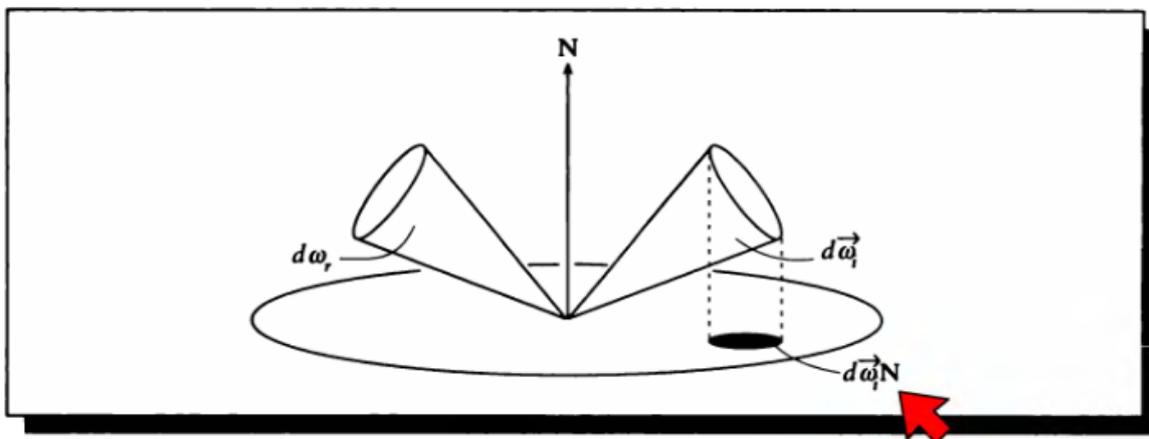


Figura 1.11: Geometría para la BRDF [6]

La BRDF es la descripción fundamental como una superficie refleja. Caracteriza la reflectividad de la superficie en términos de el ángulo sólido incidente, la luz incidente, y el ángulo sólido incidente. La BRDF puede tomar valores desde 0 a infinito. Hay dos simples pero importantes propiedades de la BRDF que deberían ser guardadas en mente cuando se trabaja con estas funciones.

La primera es la *reciprocidad*, la cual simplemente establece que si se cambian los papeles de la energía reflejada con incidente, nada cambia. Esto es

$$f_r(d\vec{\omega}_i \rightarrow d\vec{\omega}_r) = f_r(d\vec{\omega}_r \rightarrow d\vec{\omega}_i) \quad (1.9.2a) [41]$$

La segunda propiedad importante de la BRDF es que debe estar normalizadas. Esto es que la energía total propagada en respuesta a alguna irradiación no debe ser mas que la energía recibida.

La BRDF puede ser perfectamente especular o perfectamente difusa .

Superficie perfectamente especular

Para una superficie la cual dispone de una reflexión perfectamente especular de acuerdo a [6] se dice que $\theta_r = \theta_i$, es decir el ángulo del haz de luz reflejado es igual al ángulo del haz de luz incidente y el ángulo azimutal $\phi_r = \phi_i \pm \pi$.

Superficie perfectamente difusa

Para una superficie la cual dispone de reflexión perfectamente difusa de acuerdo a [6], el haz de luz se refleja en todas las direcciones, similar a un proceso de emisión.

1.9.3. Reflectividad ρ

La relación entre la radiación reflejada y la radiación incidente es la reflectividad ó reflectancia, al igual que la emisividad y la transmitancia debe estar entre valores 0 y 1. La reflectividad se denota por la letra ρ y es una medición que relaciona el flujo reflejado con el flujo incidente, que debido a la conservación de la energía dispone un valor ente 0 y 1. Se define la reflectancia ρ como

$$\rho(\omega_i \rightarrow \omega_r) = \frac{d\Phi_r(\omega_r)}{d\Phi_i(\omega_i)} \quad (1.9.2a) [42]$$

La BRDF y la reflectividad se relacionan de acuerdo a, [6]

$$\rho(\omega_i \rightarrow \omega_r) = \frac{\int_{\omega_r} \int_{\omega_i} f_r(d\vec{\omega}_i \rightarrow \vec{\omega}_r) d\vec{\omega}_i^N d\vec{\omega}_r^N}{\int_{\omega_i} d\vec{\omega}_i^N} \quad (1.9.2a) [43]$$

La dirección de reflexión depende de la función bidireccional, BRDF, del material. La fracción de energía reflejada dentro de todas las posibles direcciones es igual a la reflectancia espectral hemisférica direccional, o

$$\rho'(\lambda, \theta_i, \psi_i) = \int_{2\pi} \rho''(\lambda, \theta_i, \psi_i, \theta_r, \psi_r) \cos \theta_r d\Omega_r, \quad (1.9.2a) [44]$$

$$\rho'(\lambda, \theta_i, \psi_i) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \rho''(\lambda, \theta_i, \psi_i, \theta_r, \psi_r) \cos \theta_r \sin \theta_r d\Theta_r d\Omega_r, \quad (1.9.2a) [45]$$

en el caso de una reflexión especular pura, la dirección de la reflexión sería,

$$\psi_r = \psi_i + \pi, \quad (1.9.2a)[46]$$

$$\theta_r = \theta_i, \quad (1.9.2a)[47]$$

Conociendo la BRDF es posible calcular la reflectividad, por simplificación se puede considerar superficies perfectamente difusas o perfectamente especulares. Se podría interpretar la reflectividad como la cantidad de radiación reflejada y la BRDF en como es reflejada esta radiación de acuerdo a las propiedades de la superficie. En algunas ocasiones la reflectividad se puede expresar como una combinación entre reflectividad de superficie perfectamente difusa y la reflectividad de superficie perfectamente especular, $\rho(\lambda) = \rho_s(\lambda) + \rho_d(\lambda)$.

1.10. Balance de radiación

De la ecuación 1.9.2a[31] y la figura 1.10, el balance de radiación incidente que se absorbe, transmite, refleja por un medio determinado, matemáticamente se puede escribir

$$\rho + \alpha + \tau = 1 \quad (1.10.2a)[48]$$

Para un cuerpo opaco las transmisividad es cero por lo que la ecuación de balance de radiación se reduce a

$$\rho + \alpha = 1 \quad (1.10.2a)[49]$$

1.11. Ley de radiación térmica de Kirchoff

El intercambio de energía por medio de calor por radiación térmica entre dos o mas cuerpos, esta dado por la potencia absorbida y emitida por cada uno de ellos. El flujo emitido por unidad de superficie por uno de los cuerpos esta dado por

$$\frac{d\Phi_{\lambda,a}(\theta', \phi', d\omega')}{dA} = \epsilon(\lambda; \theta', \phi') \cdot L_{\lambda,b}(\lambda, T) \cdot \cos \theta' \cdot d\omega' \quad (1.11.2a) [50]$$

Mientras que el flujo emitido por unidad de superficie por este cuerpo esta dado por

$$\frac{d\Phi_{\lambda,a}(\theta', \phi', d\omega')}{dA} = \alpha(\lambda; \theta', \phi') \cdot L_{\lambda,b}(\lambda, T) \cdot \cos \theta' \cdot d\omega' \quad (1.11.2a) [51]$$

Si el cuerpo alcanza el equilibrio térmico con su entorno entonces el flujo emitido por unidad de superficie es igual al flujo absorbido por unidad de superficie, de tal manera que la emisividad se puede igualar a la absorptividad, esto es la ley de radiación térmica de Kirchoff.

$$\alpha(\lambda; \theta, \phi) = \epsilon(\lambda; \theta', \phi') \quad (1.11.2a) [52]$$

Esta igualdad aplica aunque el cuerpo no se encuentre en equilibrio térmico ya que depende solamente de la dirección y la longitud de onda. Dado que la emisividad es una propiedad de las superficies reales cuyo valor se encuentra entre 0 y 1, de 1.8.2a[29] se puede ver que ninguna superficie real puede tener una auto-excitancia mayor que la de un cuerpo negro a una temperatura determinada, y esto otra relación establecida por la ley de radiación térmica de Kirchoff.

1.12. Cavidades como simuladores de cuerpo negro

Una cavidad tiene la característica de poder aumentar la emisividad de su abertura hasta un valor cercano a la unidad, por lo que la abertura de una cavidad es un simulador de cuerpo negro. Esto ocurre debido a la radiación incidente que ingresa a la cavidad interacciona con las paredes internas, a diferencia de una superficie abierta la radiación dentro de la cavidad experimenta varias reflexiones lo que aumenta la probabilidad de que eventualmente sea absorbida, esta absorción incrementada hace que tanto la absorptividad y la emisividad de la apertura de la cavidad dispongan de un aumento aparente mayor a la absorptividad y la emisividad de sus paredes internas, como en figura 1.12.

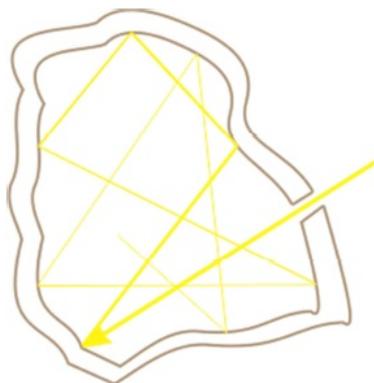


Figura 1.12: Cavidad que aproxima a un cuerpo negro [2]

1.13. Termografía

Dado a que en el experimento de comprobación de los cálculos a realizar para la emisividad aparente de una cavidad, se utiliza una cámara termográfica, se dedica esta sección a describir la ciencia de la termografía.

De acuerdo a [27], la termografía es la ciencia de adquisición y análisis de información térmica a partir de dispositivos de toma de imágenes sin contacto. Entre las características importantes de la termografía se tiene:

1. Sin contacto, es decir utiliza sensores remotos.
2. Es bidimensional, es decir permite la comparación entre diferentes áreas del objeto de la medida.
3. Se realiza en tiempo real, es decir la visualización muy rápida de objetos estacionarios.

La termografía abarca muchas áreas como ser: transmisión de calor, transmisión de radiación.

1.13.1. Ciencia térmica

Temperatura

La temperatura está asociada al movimiento medio de las moléculas y los átomos. Es una cantidad mecánica.



Figura 1.13: Imagen infrarroja [27]

Calor

El calor está relacionado con cuánta materia se encuentra a una temperatura dada. Contra más materia, más energía interna contiene, aunque su temperatura sea la misma.

Transmisión de calor

La transferencia de energía por medio de calor puede ocurrir por tres mecanismos:

1. Conducción (transmisión conductiva)
2. Convección (transmisión convectiva)
3. Radiación (transmisión radiativa)

Conducción

Es la transmisión de energía de movimiento (energía cinética) entre moléculas. Puede producirse en sólidos, líquidos y gases. La "nube de electrones" de un material metálico conductor es el responsable de la mayor parte de la conducción de calor a través del sólido. Un buen conductor eléctrico es también un buen conductos de calor.

$$\text{Potencia de conducción} = \frac{Q}{t} = k \cdot A \cot \left| \frac{dT}{dx} \right|$$

donde:

k: es el coeficiente de conducción de la muestra, con unidad de medida $\left[\frac{W}{m \cdot ^\circ C} \right]$.

A: es el área, sección transversal por la cual ocurre transferencia de calor, con unidad de

medida $[m^2]$.

$|\frac{dT}{dx}|$: se define como gradiente térmico, con unidad de medida $[\frac{°C}{m}]$.

Convección

Es un modo de transmisión de calor donde un fluido se pone en movimiento, debido a la gravedad, u otra fuerza másica (p.e. centrífuga). Este movimiento del fluido incrementa el calor transmitido de un lugar a otro. Es usualmente la forma predominante de transmisión de calor en líquidos y gases. Se utiliza para caracterizar el efecto combinado de la conducción y el movimiento del fluido.

$$\text{Potencia de convección} = \frac{Q}{t} = h \cdot A \cdot \Delta T$$

donde: h: es el coeficiente de convección del fluido, con unidad de medida $[\frac{W}{m^2 \cdot °C}]$.

A: es el área, sección transversal por la cual ocurre transferencia de calor, con unidad de medida $[m^2]$.

ΔT : es la diferencia de temperatura, con unidad de medida $[°C]$.

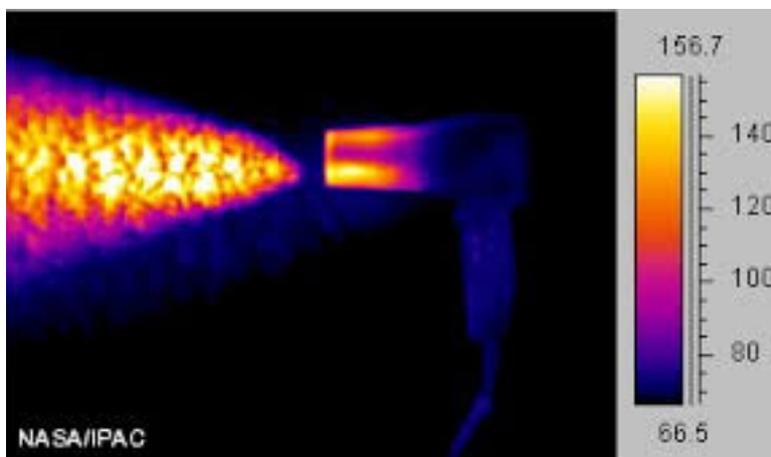


Figura 1.14: Corriente de convección [9]

Radiación electromagnética

Es la transmisión de calor por emisión y absorción de radiación térmica. Este es el mecanismo de transferencia de calor principalmente utilizado en la ciencia de la termografía y su ecuación esta dada por la ley de Stefan-Boltzman

La ciencia infrarroja trabaja actualmente con cámaras termográficas que operan principalmente en el rango de longitudes de onda del espectro electromagnético correspondiente a la radiación térmica.

Una cámara termográfica es un dispositivo de medición de temperatura por medio de radiación térmica.

1.13.2. Componentes de cámara termográfica

Lente

Las lentes de las cámaras termográficas están hechas de materiales cuya transmisividad es muy alta y tienen la función de enfocar la radiación térmica hacia los detectores de la cámara termográfica. Algunos materiales que muestran una alta transmisividad son CaF_2 y BaF_2 .

Detectores IR

Los detectores utilizados comúnmente por una cámara termográfica son:

1. Detectores fotónicos, la radiación se convierte directamente en una señal eléctrica.
2. Detectores térmicos, la radiación calienta cada célula del detector y se detecta el cambio de temperatura. Los microbolómetros son un ejemplo de estos detectores.

Parámetros necesarios para la medición de temperatura con una cámara termográfica

Dado que la cámara termográfica se utiliza similarmente que una cámara de celular debe lidiar con los factores ambientales que pueden afectar la radiación térmica que desea medir. La temperatura ambiente, la humedad relativa, la distancia, la emisividad de la muestra son algunos de los factores que afectan una medición de temperatura de una

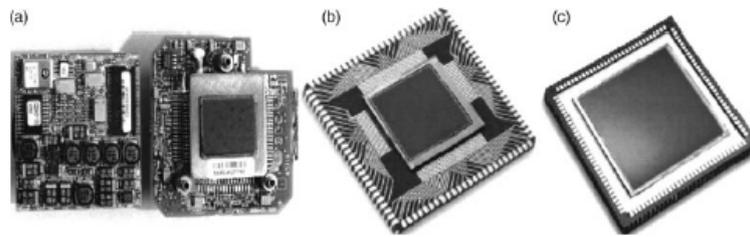


Figura 1.15: (a) Placa electrónica utilizada en cámaras FLIR, (b) placas de microbolómetros 512 x 512 ALADDIN III, (c) 1024 x 1024 ALADDIN III [9]

muestra para la cual se desea analizar. Estas propiedades del medio y de la muestra afectan factores como la reflectividad y la transmisividad que pueden al final darnos una lectura errónea de la temperatura del cuerpo analizado sino son compensados apropiadamente.

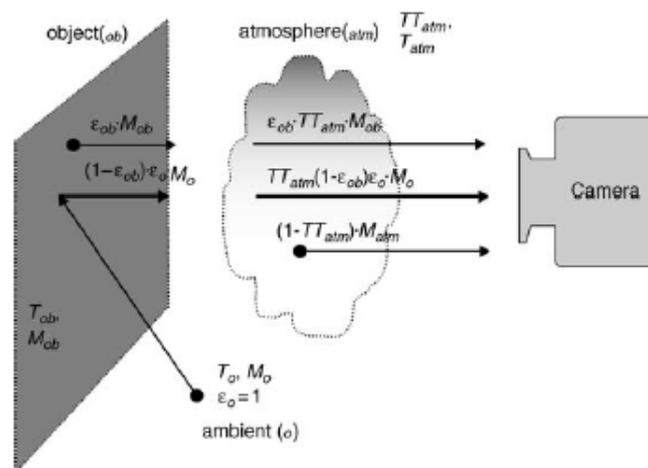


Figura 1.16: Interacción del flujo radiante en mediciones con una cámara infrarroja [9]

1.13.3. Calibración de cámaras termográficas

Para la calibración de una cámara termográfica se utilizan cavidades que sirven como cuerpos negros, comunmente los fabricantes de cámaras termográficas las utilizan en sus laboratorios.

Para realizar la calibración de estas cámaras termográficas es necesario conocer la emisividad aparente de las cavidades ya que es uno de los parámetros utilizados por la cámara termográfica para realizar sus mediciones de radiación infrarroja.

Esta tesis trata sobre el cálculo de las emisividades de cavidades de geometrías regulares.

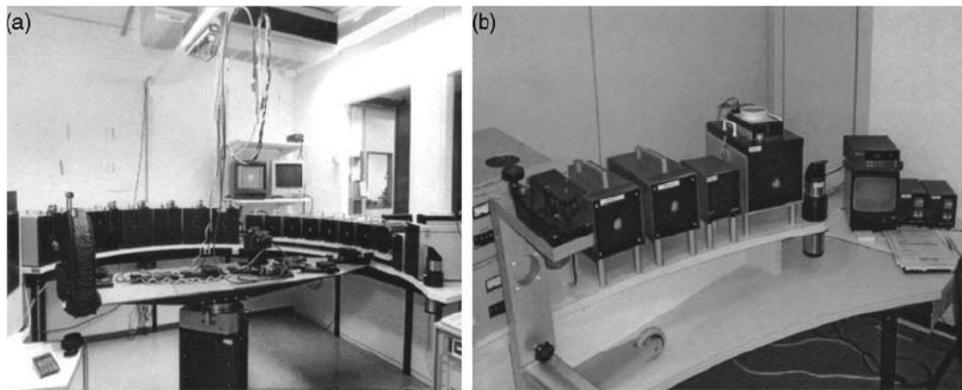


Figura 1.17: (a) Cuarto de laboratorio para la calibración de cámaras infrarrojas, (b) Conjunto de cuerpos negros [9]

Las cavidades que se utilizan en los laboratorios de calibración de cámaras termográficas son más complejas y desarrolladas con mayores especificaciones para el propósito de calibración.

Capítulo 2

Método de Monte Carlo

2.1. Introducción

El método de Monte Carlo ofrece mayor facilidad en la resolución de problemas complejos en relación a otros métodos numéricos convencionales.

El método data desde 1944 y desde entonces se ha improvisado con el desarrollo de la computadora. El método se utilizó por matemáticos y físicos en época de la segunda guerra mundial mientras se desarrollaba la bomba atómica relacionado en la resolución de problemas con la difusión de neutrones. Las personas que utilizaron este método fueron John Von Neuman y Stanislaw Ulam. El nombre de Monte Carlo proviene de la ciudad de Mónaco, que es famosa por los juegos de apuesta en casinos.[7]

2.2. Simulación Monte Carlo

Una simulación de Monte Carlo persigue la "dependencia de tiempo" de un modelo para el cual el cambio, o crecimiento, no procede de una manera rigurosa sino mas bien de manera estocástica la cual depende de números aleatorios que son generados durante la simulación [11]. Una de las dificultades que pueden encontrarse con estas simulaciones que utilizan el método de Monte Carlo son las limitaciones de la computadora tanto en tiempo como en memoria.

2.3. Probabilidad

El método de Monte Carlo es un método de naturaleza numérica estocástica, una secuencia de números aleatorios [10]. En física existen procesos cuya base es aleatoria, como ser el proceso de absorción, el cual se considera en este trabajo como un evento elemental a partir del cual se calculan otros eventos.

Si consideramos un evento elemental de una salida aleatoria de eventos, E_1, E_2, \dots, E_n (como ser lanzar dados), a cada uno de estos eventos se puede asociar una probabilidad, p_k o PE_k , la cual cae entre 0 y 1,

$$0 \leq p_k \leq 1 \quad (2.3.1a) [53]$$

Se considera $p_k = 0$ cuando un evento no puede ocurrir y $p_k = 1$ si es seguro que debe ocurrir. Se puede enumerar algunas propiedades de probabilidad de eventos:

1. $P_{E_i \text{ y/o } E_j} \leq P_i + P_j$.
2. Dos eventos son mutuamente excluyentes, es decir $P_{E_i \text{ y } E_j} = 0$ y $P_{E_i \text{ o } E_j} = 1$.
3. $P(\text{de eventos}) = \sum_i p_i = 1$, para todos los eventos posibles.
4. La probabilidad de una salida (E_i, F_j) es p_{ij} , llamada probabilidad conjunta para E_i y F_j .
5. Dos eventos se consideran independientes si $p_{ij} = p_{1i} \cdot p_{2j}$.
6. En caso de no ser independientes, se puede escribir la probabilidad conjunta como

$$p_{ij} = \left(\sum_k p_{ik} \right) \left[\frac{p_{ij}}{\sum_k p_{ik}} \right]$$

La salida de estos eventos aleatorios puede ser una variable lógica (verdadero o falso) o un número real x_i . Estos números se llaman variables aleatorias [11]. El valor esperado de estas variables aleatorias es:

$$\langle x \rangle \equiv E(x) \equiv \sum_i p_i x_i = \mu \quad (2.3.2a) [54]$$

Similarmente, cualquier función real $g(x_i)$ tiene entonces el valor esperado,

$$\langle g(x) \rangle \equiv E(g(x)) = \sum_i p_i g(x_i) \quad (2.3.2a) [55]$$

Un término importante de los valores esperados son las potencias de x . El momento n de x es definido como el valor esperado de la potencia n de x ,

$$\langle x^n \rangle \equiv \sum_i p_i x_i^n; \quad (2.3.2a) [56]$$

si $n = 2$,

$$\langle x^2 \rangle \equiv \sum_i p_i x_i^2. \quad (2.3.2a) [57]$$

El momento central de x es

$$\langle g_n(x) \rangle \equiv \langle (x - \mu)^n \rangle = \sum_i p_i (x_i - \langle x \rangle)^n. \quad (2.3.2a) [58]$$

El momento de mayor importancia es el caso que $n = 2$, que es llamado "varianza",

$$var(x) = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \sum_i p_i (x_i - \mu)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad (2.3.2a) [59]$$

2.4. Números aleatorios

El núcleo del método de Monte Carlo es la generación aleatoria, que es la generación de variables aleatorias que son distribuidas idénticamente e independientes de acuerdo a una distribución de probabilidad. En python se puede utilizar la librería random y la función randint, para generar números enteros aleatorios o también pueden generarse variables aleatorias de acuerdo a una distribución determinada como ser distribución beta, gamma, o normal.

2.4.1. Generación de números aleatorios y variables

La técnica mas común de generar números aleatorios es seleccionar una función que mapee los enteros en números aleatorios por ejemplo un generador lineal congruente dado por [7]

$$x_{n+1} = (ax_n + c) \bmod(m), \quad (2.4.2a) [60]$$

donde:

x_{n+1} es el próximo valor x_n es el valor actual a , c y m son constantes a elegir para mejorar el generador de números aleatorios.

Los números generados por un código de computadora en realidad no son aleatorios en su totalidad sino mas bien pseudo aleatorios, aún así si se eligen bien las constantes pueden considerarse lo suficiente aleatorios para ser utilizados. Para generar una salida en un rango de valores $(0, 1)$ se tiene de acuerdo a [8]

$$U_t = \frac{X_t}{m}, \quad (2.4.2a) [61]$$

Se pueden generar números aleatorios por medio de generadores multiples recursivos de acuerdo a [8]

$$X_t = (a_1 X_{t-1} + \dots + a_k X_{t-k}) \bmod(m), \quad (2.4.2a) [62]$$

para $t = k, k + 1, \dots$, en el set $(0, \dots, m-1)$. Siendo la salida tomada como la ecuación [2] de esta sección.

En las simulaciones que ayuden a calcular la emisividad aparente de una cavidad se utilizará el generador de números aleatorios en python con la función de la libreria *random*, *random.uniform(0,1)*, en la consola de python sería

```
>>> import random
>>> random.uniform(0,1)
0.038827120320285236
>>> random.uniform(0,1)
0.24364088183557486
>>> random.uniform(0,1)
0.80307403111053
```

2.5. Distribuciones de probabilidad

Si se consideran dos eventos que son mutuamente excluyentes y exhaustivos, por estos últimos se entiende que deben ocurrir al realizar un experimento, entonces:

$$P(A_1) = p, \quad x = 1; \quad P(A_0) = 1 - p, \quad x = 0. \quad (2.5.2a) [63]$$

La probabilidad de que la suma de N eventos independientes, esto es $X = \sum_{r=1}^N x_r$, sea igual a n , $X = n$, es la probabilidad de que n de los x_r fueron 1 y que $(N - n)$ fueron 0. Esto se puede calcular utilizando la distribución binomial

$$P(X = n) = \binom{N}{n} p^n (1 - p)^{N-n}, \quad (2.5.2a) [64]$$

$\binom{N}{n}$ es el coeficiente binomial. El valor esperado de X es

$$\langle X \rangle = Np. \quad (2.5.2a) [65]$$

y la varianza

$$var(X) = Np(1 - p). \quad (2.5.2a) [66]$$

Asumamos ahora que se tienen siempre dos salidas, 1 o 0, de un experimento: si la salida es 0, el experimento es repetido, de otra manera se detiene. La variable aleatoria de interés ahora es el número de experimentos hasta obtener una salida 1:

$$P(x = n) = (1 - p)^{n-1} p \quad (2.5.2a) [67]$$

Esto se conoce como la distribución geométrica.

En el caso que la probabilidad de éxito sea muy pequeña, la distribución de Poisson

$$P(x = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad (2.5.2a) [68]$$

representa una aproximación de la distribución binomial.

La mas importante de las distribuciones es la distribución Gaussiana

$$p_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.5.2a) [69]$$

2.6. Variables aleatorias continuas

También se pueden disponer de variables aleatorias de forma continua [10]. Dado que x es un número real, $-\infty \leq x \leq \infty$, una función de distribución puede ser definida como,

$$F(x) \equiv P \{ \text{una selección aleatoria de } X \text{ da un valor menor que } x \} = P \{ X \leq x \} \quad (2.6.2a) [70]$$

La función distribución puede tener intervalos sobre los cuales es diferenciable; en estos intervalos, la función de distribución de probabilidad (fdp) puede ser definida como

$$f(x) \equiv \frac{dF(x)}{dx} \geq 0. \quad (2.6.2a) [71]$$

La función de distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua x tiene una propiedad de normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(\infty) = 1. \quad (2.6.2a) [72]$$

El valor medio de x esta definido como

$$E(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad (2.6.2a) [73]$$

El valor esperado de una función de variable aleatoria esta definido como

$$E(g(x)) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx, \quad (2.6.2a) [74]$$

2.7. Teorema de Límite Central

Si variables aleatorias x_1, x_2, \dots, x_n son independientes entre si y tomadas de la misma distribución, el valor promedio $\bar{X}_N = \sum_{i=1}^N x_i/N$ en el límite $N \rightarrow \infty$ estará distribuido de acuerdo a la distribución Gaussiana, independientemente de la distribución a partir de las cuales son tomadas las x_i . Esto es conocido como "Teorema de Límite Central".

Con esto podemos estimar el valor de una función $g(x)$.

$$G_N = \frac{1}{N} \sum_i^N g(X_i), \quad (2.7.2a) [75]$$

$$\langle G_N \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx, \quad (2.7.2a) [76]$$

y

$$\text{var} \{G_N\} = \frac{1}{N} \text{var} \{g\}. \quad (2.7.2a) [77]$$

Esto quiere decir que a medida que $N \rightarrow \infty$, la distribución de los valores de G_N se aglomeran cerca de la media de acuerdo a $N^{-1/2}$.

Si la variable aleatoria que se utiliza en Monte Carlo está distribuida uniformemente entre 0 y 1, se puede calcular integrales con dicha variable.

$$f_u(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2.7.2a) [78]$$

Por ejemplo,

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4} \quad (2.7.2a) [79]$$

Puede ser escrito como

$$\int_0^1 f_u(x)\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4} \quad (2.7.2a) [80]$$

El valor de esta integral se puede encontrar como

$$G_1 = \frac{1}{N} \sum g(\xi_i) = \frac{1}{N} \sum (1 - \xi_i^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.7.2a) [81]$$

En python, el algoritmo sería :

```
import random
import math
suma = 0
N = 1000000
for i in range(1, N, 1):
    suma = math.sqrt(1.0 - (random.uniform(0,1))**2) + suma
media = suma/N
print("pi_cuartos_aproximado: ", media)
print("pi_cuartos_exacto: ", math.pi/4.0)
```

Lo que da como resultado,

```
pi_cuartos_aproximado: 0.7856610065063432
pi_cuartos_exacto: 0.7853981633974483
```

También se pudo encontrar el valor de esta integral de una manera diferente. Sabiendo que el area de un cuarto de círculo es igual a $\frac{\pi}{4}r^2$, se pueden dibujar puntos que son colocados de manera aleatoria en el cuadro de 1 unidad por lado y contar los puntos que caen dentro del cuarto de círculo, es decir,

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)g(x,y)dxdy = \frac{\pi}{4} \quad (2.7.2a) [82]$$

donde

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \text{ en } (0, 1) \otimes (0, 1) \\ 0 & \text{si en otro lugar} \end{cases} \quad (2.7.2a) [83]$$

y

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 > 1. \end{cases} \quad (2.7.2a) [84]$$

ya que x y y son independientes,

$$f(x, y) = f_u(x)f_u(y) \quad (2.7.2a) [85]$$

de tal manera que esta función se puede muestrear dibujando dos variables aleatorias uniformes independientes, ξ_i , η_i y formando un estimador, G_2 , el cual suma números las veces que $\xi_i^2 + \eta_i^2 \leq 1$. Esto en python sería

```
import random
import math
suma = 0
N = 1000000
for i in range(1, N, 1):
    x = random.uniform(0,1)
    y = random.uniform(0,1)
    suma_cuadrados = x**2 + y**2
    if suma_cuadrados <= 1.0:
        suma = suma + 1
media = suma/N
print("pi_cuartos_aproximado: ", media)
print("pi_cuartos_exacto: ", math.pi/4.0)
```

Dando como resultado,

pi_cuartos_aproximado: 0.78508

pi_cuartos_exacto: 0.7853981633974483

El método a utilizar dependerá de la varianza y la eficiencia del cálculo.

2.8. Muestro de variables aleatorias

Al realizar cálculos con el método de Monte Carlo es requerido muestrear correctamente la función de distribución de probabilidad de tal manera que los cálculos sean mas eficientes.

Si tenemos una variable aleatoria x con una función de distribución acumulativa $F_x(x)$ y función de distribución de probabilidad,

$$f_x(x) = \frac{dF_x}{dx} \quad (2.8.2a) [86]$$

y siendo la variable aleatoria $\Upsilon = \gamma(x)$, se puede encontrar que la relación entre las funciones de distribución de probabilidad de x y los valores de γ es [10],

$$| f_x(x)dx | = | f_\Upsilon(y)dy | \quad (2.8.2a) [87]$$

Se utiliza convencionalmente generadores de números pseudo-aleatorios que producen valores uniformes entre 0 y 1. La función de distribución de probabilidad para una variable aleatoria uniforme sobre $(0, 1)$ es

$$f_\xi(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 & \text{para otro caso} \end{cases} \quad (2.8.2a) [88]$$

Por ejemplo si se requiere muestrear una función de distribución de probabilidad cuya forma sea exponencial,

$$f_\Upsilon(y) = \lambda e^{-\lambda y}, 0 < y < \infty \quad (2.8.2a) [89]$$

de tal manera que la función de distribución acumulativa, queda,

$$F_{\Upsilon}(y) = \int_0^y \lambda e^{-\lambda u} du = 1 - e^{-\lambda y} = \xi. \quad (2.8.2a) [90]$$

Lo anterior lleva a

$$\Upsilon = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - \xi) \quad (2.8.2a) [91]$$

2.8.1. Muestreo de distribuciones de multivariadas

En el cálculo de emisividades en cavidades es requerido muestrear variables del tipo \mathbf{R}^3 , $\mathbf{x} = (x, y, z)$,

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi} e^{-r} \quad (2.8.2a) [92]$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. El elemento de volumen $d\mathbf{V}$ que esta asociado con $f(\mathbf{x})$ es $dx dy dz$. En coordenadas polares, $d\mathbf{V} = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$ y

$$f(\mathbf{x}) dx dy dz = \frac{1}{8\pi} e^{-r} r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi \quad (2.8.2a) [93]$$

donde las coordenadas polares están definidas como

$$\cos \theta = \frac{z}{r}, \quad \tan \phi = \frac{y}{x}$$

La ecuación de función de distribución de probabilidad, puede ser definida como,

$$f(\mathbf{x}) d\mathbf{V} = \frac{1}{2} e^{-r} r^2 dr \frac{\sin \theta d\theta}{2} \frac{d\phi}{2\pi}, \quad (2.8.2a) [94]$$

y r , θ y ϕ pueden muestreadas de manera independiente.

Para muestrear r ,

$$R = -\sum_{i=1}^3 \log \xi_i = -\log(\xi_1 \times \xi_2 \times \xi_3) \quad (2.8.2a) [95]$$

Para muestrear ϕ ,

$$F_\phi = \int_0^\phi \frac{1}{2\pi} d\phi = \frac{\phi}{2\pi} = \xi_4 \quad (2.8.2a) [96]$$

$$\phi = 2\pi\xi_4 \quad (2.8.2a) [97]$$

para muestrear θ ,

$$F_\theta = \int_0^\theta \frac{1}{2} \sin \theta d\theta = \frac{\cos \theta}{2} + \frac{1}{2} = \xi_5 \quad (2.8.2a) [98]$$

$$\cos \theta = 2\xi_5 - 1 \quad (2.8.2a) [99]$$

2.9. Caminos aleatorios, cadenas de Markov

De acuerdo a [6], un proceso estocástico en tiempos discretos etiquetados consecutivamente t_1, t_2, t_3, \dots , para un sistema con una cantidad finita de posibles estados, S_1, S_2, S_3, \dots , y se denota como X_t el estado en el que el sistema está en un tiempo t . Se considera la probabilidad condicional $X_{t_n} = S_{i_n}$,

$$P(X_{t_n} = S_{i_n} \mid X_{t_{n-1}} = S_{i_{n-1}}, X_{t_{n-2}} = S_{i_{n-2}}, \dots, X_{t_1} = S_{i_1}), \quad (2.9.2a) [100]$$

dado que en el tiempo precedente el estado del sistema $X_{t_{n-1}}$ estaba en el estado $S_{i_{n-1}}$, etc. A este proceso se le conoce como proceso de Markov, si esta probabilidad condicional es de hecho independiente de todos los estados excepto del estado inmediato predecesor, esto es, $P = P(X_{t_n} = S_{i_n} \mid X_{t_{n-1}})$. La correspondiente secuencia de estados $\{X_t\}$ es conocida como cadena de Markov, y la probabilidad condicional puede ser interpretada como la probabilidad de transición para moverse del estado i al estado j ,

$$P_{ij} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} \quad (2.9.2a) [101]$$

Una cadena de Markov es otra manera de referirse a un camino aleatorio. Un ejemplo típico de un camino aleatorio es el de un juego de casino, una persona con cierta cantidad de dinero m , que juega una serie de juegos de la suerte contra el casino (quien tiene en teoría infinidad de dinero). Después de cada juego el jugador tiene una probabilidad p_m de ganar y una probabilidad $q_m = 1 - p_m$ de perder, con $m \geq 1$. Cuando la cantidad de dinero llega a cero o a un máximo que el jugador considere suficiente para irse a casa, el juego termina. El proceso $\{X_n\}$, donde X_n representa la cantidad de dinero que queda después de n juegos es también un camino aleatorio.

Los caminos aleatorios se pueden utilizar para encontrar aproximaciones discretas de un proceso como ser la ecuación de radiación, donde el movimiento de las partículas es continuo pero en cada una de las posiciones, están sujetas a colisiones y a interacciones aleatorias o fluctuaciones aleatorias. Si la posición futura de una partícula depende solamente de la posición actual, entonces el conjunto $\{X_n\}$ donde X_n es la posición en un tiempo "n" representa un proceso de Markov.

2.9.1. Propiedades de una cadena de Markov Discreta

Cada vez que el sistema representado por una cadena de Markov deja un estado i , debe estar en otro de los posibles estados; por lo tanto

$$\sum_{j=1}^N P_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.9.2a) [102]$$

Si el estado j es alcanzado por el estado i en un número finito de pasos o transiciones, entonces el estado j es llamado *accesible* desde el estado i . Si el estado i es accesible desde el estado j , entonces los estados se dice están comunicados uno con otro. Una cadena de Markov es llamada *irreducible* si todos los estados se comunican con cualquier otro.

Los P_{ij} forman una matriz \mathbf{P} llamada *matriz de probabilidad de transición de un paso*. Dada \mathbf{P} y la probabilidad de distribución del estado del proceso en el tiempo 0, la cadena de Markov está completamente especificada. Sea P_{ij}^n la probabilidad que el sistema vaya desde el estado i al estado j en n transiciones. Entonces puede ser escrito como

$$P_{ij}^n = \sum_{k=0}^n P_{ik}^r P_{kj}^s \quad (2.9.2a) [103]$$

donde $r + s = n$ y se define

$$P_{ij}^0 = \begin{cases} 1 & si, i = j, \\ 0 & si, i \neq j. \end{cases} \quad (2.9.2a) [104]$$

El periodo del estado i , $d(i)$, es el mayor común divisor de todos los enteros $n \geq 1$ para los cuales $P_{ii}^n > 0$. Si $P_{ii}^n = 0$ para todo n , entonces $d(i)$ esta definido a ser 0. Si los estados i y j se comunican, entonces $d(i) = d(j)$. Si todos los estados en una cadena de Markov tiene un periodo de 1, el sistema es llamado *aperiódico*.

Sea f_{ii}^n la probabilidad que empezando del estado i , el primer retorno a estado i ocurre en n transiciones.

$$f_{ii}^n = P(X_n = i, X_m \neq i, m = 1, 2, \dots, n - 1 \mid X_0 = i) \quad (2.9.2a) [105]$$

El estado i se dice que es *recurrente* si y solo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^n = 1$$

Lo anterior es, comenzando desde el estado i , la probabilidad de retornar al estado i en un tiempo denifido es 1. Si esto no es verdad, se dice que el estado es un estado *transitorio*. Si los estados i y j se comunican e i es recurrente, entonces j es recurrente. Por lo tanto, todos los estados en una clase equivalente son ya sea recurrentes o transitorios.

Suponiendo que se dispone de una cadena de Markov con una clase de estados recurrentes aperiódicos. Se puede definir la probabilidad estacionaria para los estados $j = 1, 2, \dots, N$ por

$$\pi_j = \sum_{i=0}^N \pi_i P_{ij}, \pi_i \geq 0, \sum_{i=0}^N \pi_i = 1. \quad (2.9.2a) [106]$$

π_j es la porción de tiempo que el sistema esta en el estado j . La cantidad $\pi_i P_{ij}$ es la proporción del tiempo que el camino aleatorio ha ingresado en el estado j desde el estado i . Si el estado inicial de un camino aleatorio es escogido a ser distribuido como π_j , entonces $P\{X_n = j\}$ es igual a π_j , para todo n y j .

Si $\pi_i > 0$ para un estado i en una clase recurrente aperiódica, entonces $\pi_j > 0$ para todos los estados j en la misma clase. Tal clase es llamada *fuertemente ergódica*. Cuando

$$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji} \quad (2.9.2a) [107]$$

para todos los $i \neq j$, entonces la cadena de Markov se dice es *reversible en el tiempo*. Si el estado inicial X_0 es escogido de un conjunto π_j , la secuencia de pasos yendo hacia atras en el tiempo desde cualquier punto n también será una cadena de Markov con probabilidades dadas por P_{ij}

2.9.2. Estimadores y procesos de Markov

Las cadenas de Markov son utilizadas en simulaciones para modelar el comportamiento de sistemas en los cuales las funciones de distribución de probabilidad no son muestreadas fácilmente. Suponiendo que una variable aleatoria discreta tiene función de densidad de probabilidad dada por $p_j = P\{X = j\}$, $j = 1, 2, \dots, N$. Puede ser muestreada creando una cadena de Markov irreducible aperiódica, tal que $p_j = \pi_j$ para $j = 1, 2, \dots, N$ y obteniendo los valores de X_n cuando n es grande. Un estimador para una propiedad, $h(X)$, del sistema, como ser la emisividad aparente, $E(h(X)) = \sum_{j=1}^N h(j)p_j$ puede ser formada desde estados alcanzados en el camino aleatorio,

$$E(h(X)) \approx \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m h(X_i). \quad (2.9.2a) [108]$$

En algunos casos, al paso n en la cadena de Markov, el estado del siguiente paso, $n+1$, es dependiente sobre las propiedades del paso previo. Por lo tanto, toma algunos pasos, no siempre fácilmente cuantificables, para perder la influencia de la distribución del estado inicial X_0 . Como resultado, al formar estimadores de cantidades de interes, los primeros k

pasos de la cadena de Markov son comunmente descartados. El estimador de la propiedad $h(X)$ entonces es,

$$E(h(X)) \approx \frac{1}{m-1} \sum_{i=k+1}^m h(X_i). \quad (2.9.2a) [109]$$

La elección de k esta guiada por las propiedades de la aplicación.

2.10. Aplicaciones utilizando la cadena de Markov

Existen varias aplicaciones que utilizan la cadenas de Markov para realizar cálculos de alguna cantidad de interés.

1. Stephen P. Brooks (1998) [15] explica una aplicación de la cadena de Markov con el método de Monte Carlo en la cual para describir la forma de tumbas corbeladas prehistóricas. En este caso se coleccionaron datos en relación a la forma de las tumbas corbeladas en distintos sitios por el Mediterraneo. Los datos consistían de una serie de mediciones de la profundidad desde el ápice de estas tumbas, d , y el radio correspondiente r ;
2. También Brooks (1998) [15] ejemplifica una aplicación en el que se utiliza la probabilidad bayesiana para comprobar modelos de mezcla de muestreo y una de las aplicaciones es encontrar la longitud de onda de mayor sensibilidad en los ojos de monos.
3. Se ha aplicado para analizar literatura como menciona Hilgers y Langville [14] al poema de Alexander S. Pushkin "Eugeny Onegin". Aquí se estudió la secuencia de 20,000 letras, descubriendo que la probabilidad estacionaria es $p = 0,432$, que la probabilidad de que una vocal seguida de una vocal es $p_1 = 0,128$, y que la probabilidad de una vocal seguida de una consonante es $p_2 = 0,663$. También se da los resultados para la secuencia de 100,000 letras en la novela S. T. Aksakov's "La niez de Bagrov, el Nieto.", para esta novela las probabilidades fueron $p = 0,449$, $p_1 = 0,552$, y $p_2 = 0,365$. En este estableció relación entre la probabilidad y los aspectos que depende del tiempo. Ver figura 2.1.

4. También tiene aplicación en el area de comunicación [14]. Se aplicó por Shannon en *Una teoría matemática de la Comunicación.* en 1948, aquí ella da respuesta de como las señales análogas pueden ser transformadas a digitales, y como estas señales digitales pueden ser codificadas de tal manera que el ruido y la interferencia no afecten el mensaje original y como un uso óptimo de un ancho de banda de un canal de comunicación puede ser asegurado.
5. Al inicio Markov utilizó las cadenas de Markov en el area de la literatura pero un compatriota de el, el ruso matemático Kolmogorov aplicó las cadenas de Markov en el area de la física, explicó como utilizarlas para casos continuos y no solamente para casos discretos. Y menciona a la ecuación de Erwin Schrodinger como una aplicación para la cadena de Markov.
6. Se utiliza las cadenas de Markov para simulaciones de algoritmos de recorrido [10], para encontrar caminos óptimos en las tarjetas electrónicas.
7. Otra de las aplicaciones de las cadenas de Markov son los caminos aleatorios como se verá en la próxima sección. Este método de caminos aleatorios es el utilizado para realizar el cálculo de la emisividad aparente en cavidades.

2.10.1. Transporte de radiación y caminos aleatorios

Los pasos necesarios para llevar a cabo una simulación de Monte Carlo de transporte de radiación, se tiene,

1. Se formula una descripción de la fuente de radiación. Interpretar esa descripción como una función de distribución de probabilidad. Muestrear la función de distribución de probabilidad para especificar los valores iniciales de las coordenadas en la simulación.
2. Se formula el traceado de un camino y la descripción de interacciones entre elementos de radiación y el medio. Se muestrea la función de distribución de probabilidad para la distancias recorridas y varias probabilidades para determinar si y que tipo de radiación continua el proceso. En el caso del cálculo de emisividades en cavidades se simula una partícula que interac-

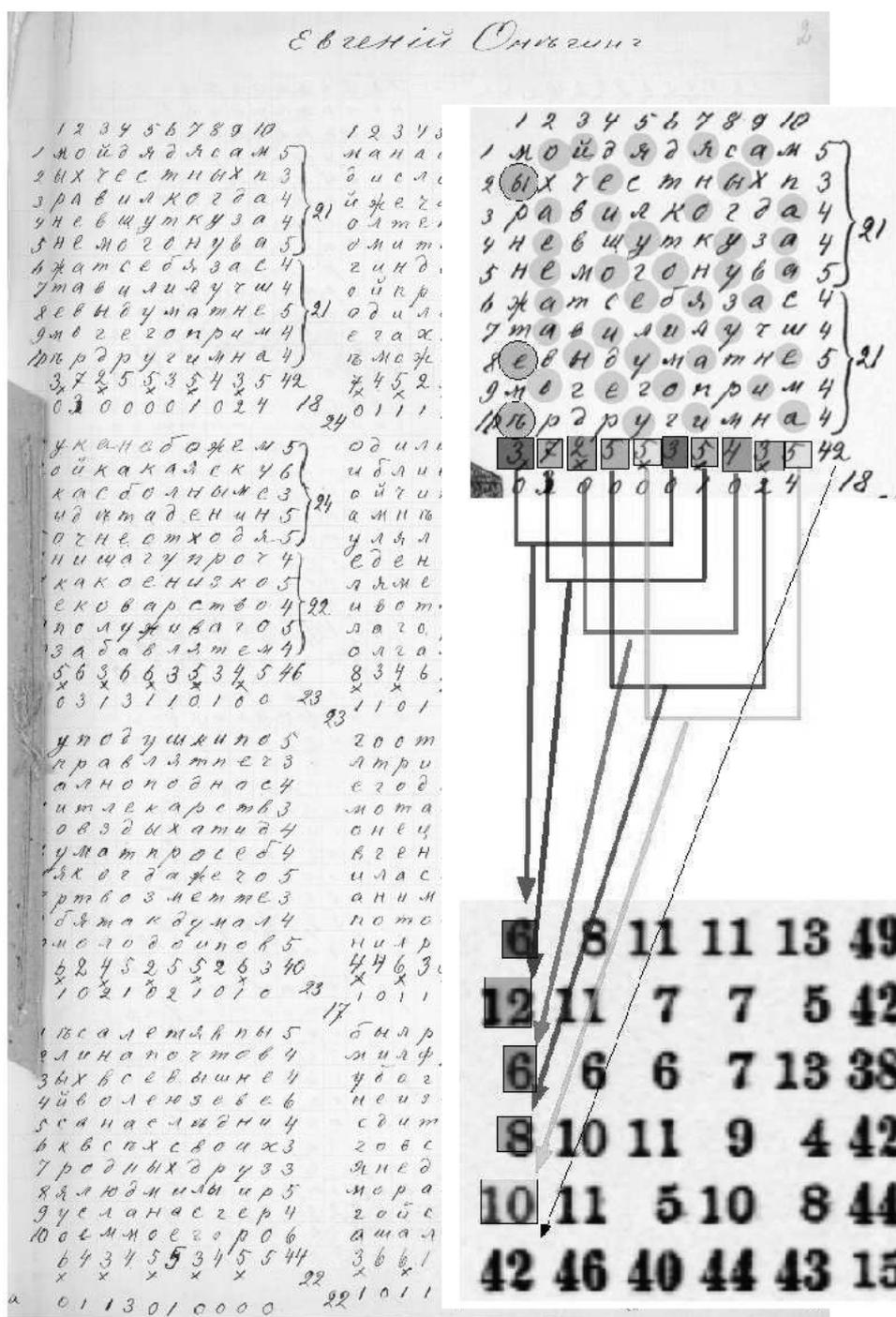


Figura 2.1: A la izquierda: Las primeras 800 letras de las 20,000 totales compiladas por Markov y tomando de del primer y medio capitulos del poema de Pushkin .“Eugeny Onegin”. A la derecha: El conteo de Markov de vocales en la primera matriz de total de 40 matrices de 10 x 10 letras. [15]

ción con las paredes de la cavidad, el tipo de interacción es la absorción y reflexión, mientras la partícula rebota. entre las paredes de la cavidad, se considera despreciable la interacción mientras está .en vuelo” de tal manera que la trayectoria de la partícula es en línea recta.

3. Repetir el paso 2 hasta que la radiación se absorba o en el caso de cálculo de emisividades en cavidades sea reflejada por la misma abertura.
4. Durante la iteración del paso 2 contar eventos interesantes para almacenar resultados físicos.

Para establecer la descripción matemática primero, se caracteriza el espacio sobre el cual el camino está definido, es decir, R^n .

Luego es requerido una descripción (como ser la función de distribución de probabilidad) de la "fuente". Esta es una función.

$$S(\mathbf{X}) \geq 0, \quad (2.10.2a)$$

$$\int_{\Omega} S(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = 1. \quad (2.10.2b) [110]$$

El tercer elemento es una regla estocástica para moverse desde un punto (\mathbf{X}') a otro (\mathbf{X}). Esto es una función de distribución para muestrear un nuevo punto \mathbf{X} cuando los puntos previos del camino eran \mathbf{X}' . Se requiere

$$T(\mathbf{X} | \mathbf{X}') \geq 0, \int T(\mathbf{X} | \mathbf{X}') d\mathbf{X} \leq 1. \quad (2.10.3a) [111]$$

Que T no este normalizada a 1 permite la posibilidad que el camino termine (en \mathbf{X}' con probabilidad $1 - \int T(\mathbf{X} | \mathbf{X}') d\mathbf{X}$).

El cuarto elemento es alguna variable de interés que se desea conocer, al menos conceptualmente, como en nuestro caso es la emisividad aparente de la apertura de la cavidad. En general, será la cantidad descrita por la distribución de llegadas a \mathbf{X} , $\chi(\mathbf{X})$. Estos es, sumar sobre todos los pasos el camino aleatorio y tomando el promedio sobre todos los

pasos posibles, el numero de veces esperadas que un punto es muestreado dentro de una región Ω es

$$\int_{\Omega} \chi(\mathbf{X}) d\mathbf{X}.$$

Retomando el camino comienza con una \mathbf{X} (llamada \mathbf{X}_0 muestreada desde $S(\mathbf{X}_0)$). Luego si no es absorbida, se mueve a \mathbf{X}_1 muestreado de $T(\mathbf{X}_1 | \mathbf{X}_0)$. En general $T(\mathbf{X}_n | \mathbf{X}_{n-1})$ gobierna el movimiento n . La llegada a \mathbf{X} puede ser ya sea por que se movió a \mathbf{X} desde un punto anterior \mathbf{Y} . El promedio total de la distribución en \mathbf{X} es la suma de estas dos:

$$\chi(\mathbf{X}) = S(\mathbf{X}) + \int T(\mathbf{X} | \mathbf{Y}) \chi(\mathbf{Y}) d\mathbf{Y}. \quad (2.10.2a) [112]$$

El término integral en el lado derecho es la distribución promedio de llegada a \mathbf{X} hacia la inmediata posterior llegada: $\chi(\mathbf{Y}) d\mathbf{Y}$ es la probabilidad de que hubo una llegada en $d\mathbf{Y}$; $T(\mathbf{X} | \mathbf{Y})$ es la probabilidad que esto fue seguido por un movimiento a \mathbf{X} ; se integran sobre \mathbf{Y} para promediar sobre todas las posibles posiciones del movimiento anterior.

La ecuación (2.10.2a)[112] describe el comportamiento promedio del camino aleatorio. En un sentido, debido a que la salida es una serie de puntos $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$, el camino aleatorio se puede interpretar como un medio para muestrear la función χ que es la solución de la ecuación.

S es parte de la descripción, y el correcto muestreo requiere que cada \mathbf{X}_n generado en el camino sea utilizado. El conjunto de puntos $\{\mathbf{X}_{nm}\}$ de puntos obtenidos de repeticiones $m = 1, 2, \dots, M$ del camino aleatorio completo puede ser utilizado para formar estimadores de integrales. Esto es, si

$$G = \int g(\mathbf{X}) \chi(\mathbf{X}) d\mathbf{X}, \quad (2.10.2a) [113]$$

donde χ es la solución de la ecuación (2.10.2a) [112], por lo que la cantidad

$$G_M = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N g(\mathbf{X}_{nm}) \quad (2.10.2b) [114]$$

es un estimador para G en el sentido que

$$\langle G_M \rangle = G \quad (2.10.2c) [115]$$

Capítulo 3

Método de traceado de Monte Carlo

3.1. Transferencia de calor por cambio radiativo entre superficies

De acuerdo [4], la transferencia de calor entre superficies esta gobernada por la siguiente ecuación,

$$q(r) = \epsilon(r)\sigma T^4(r) - \int_A \epsilon(r')\sigma T^4(r') \frac{dF_{dA' \rightarrow dA}}{dA} dA', \quad (3.1.1a) [116]$$

donde

$q(r)$ = flujo de calor de superficie local en la locación r ,

$T(r)$ = temperatura de la superficie en el punto r ,

$\epsilon(r)$ = emitancia total hemisférica de la superficie en el punto r ,

A = area de la superficie de la cavidad, y

$dF_{dA' \rightarrow dA}$ = factor de intercambio de radiación generalizada entre los elementos de superficie dA' y dA .

En la ecuación (3.1.4a)[116] el primer término sobre la mano derecha describe la emisión desde la superficie, y la integral del segundo término es la fracción de energía originalmente emitida desde la superficie en r' , lo cual eventualmente se absorbe en la locación r . Por lo tanto, la definición para el factor de intercambio generalizado debe ser:

$dF_{dA' \rightarrow dA}$ = fracción de la energía total emitida por dA' que es absorbida por dA , ya sea

directamente o después de algún número y tipo de reflexión.

Esta definición es la mas compatible para la solución por la técnica de camino aleatorio para el transporte de radiación y es por lo tanto usualmente empleada por cálculos del método de Monte Carlo.

La imagen 3.1 muestra un esquema de una cavidad arbitraria con intercambio de energía entre la emitida por dA' y absorbida por dA .

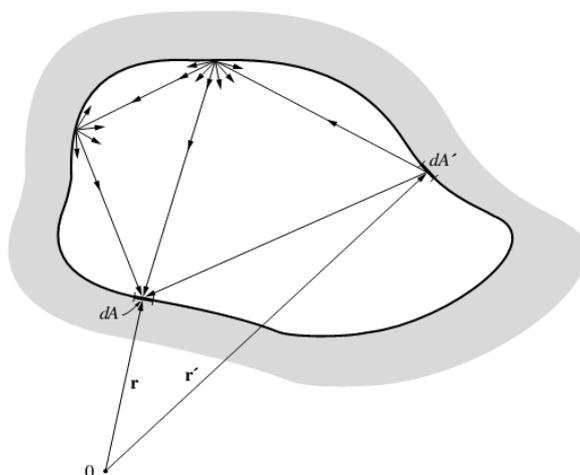


Figura 3.1: Rutas posibles de energía en una cavidad arbitraria [4]

Si la cavidad es no cerrada, es decir, que tiene aberturas, algunas superficies cerradas deben ser incluidas. Por ejemplo, una apertura directa al espacio exterior desde el sol o la tierra puede ser reemplazada por una superficie negra a una temperatura de 0 K.

3.2. El método de traceado de Monte Carlo

Como menciona [21], el método de traceado de Monte Carlo es un enfoque estadístico en el cual la solución analítica de un problema es llevado a cabo a favor de una simulación cuya salida se espera sea la misma como en el caso analítico pero la cual es mas simple de llevar a cabo. En el caso de un problema de radiación térmica, una cantidad dada de radiación de energía es uniformemente dividida en un gran número de N_i de rayos de energía discretos. Estos rayos de energía luego se siguen desde su emisión por el elemento de superficie i , a través de una serie de reflexiones sobre los otros elementos de superficie hasta la absorción por uno de los elementos de superficie o en nuestro caso por la reflexión

del rayo a través de la apertura de la cavidad.

Las propiedades de la cavidad y las leyes de la probabilidad son utilizadas para determinar los rayos N_a absorbidos por la cavidad.

Una consecuencia de la definición de la emisividad aparente de la cavidad es que es numéricamente igual a la razón de N_a con N_i en la medida que el límite de N_i tiene al infinito, y su valor puede ser bien estimado utilizando una gran cantidad de rayos.

El enfoque general del método de traceado de Monte Carlo es emitir una gran cantidad N_i de rayos de energía desde ubicaciones seleccionadas de manera aleatoria sobre un elemento de superficie i de la apertura de la cavidad y luego seguir su progreso a través de una serie de reflexiones hasta que son absorbidos por cavidad o reflejados por la misma abertura. Estos rayos de energía en la realidad son fotones.

En cualquier momento que una rayo de energía intersecta una superficie de la cavidad, el resultado del rayo de energía esta determinado por el tratamiento de la superficie como probabilidades. Por ejemplo, si la absorptividad hemisférica total de la superficie es α , entonces la probabilidad de que el rayo de energía incidente será absorbido es $P_\alpha = \alpha$. Esto es, en la formulación del método de traceado de Monte Carlo un número aleatorio R_α , uniformemente distribuidos entre cero y la unidad, es tomado y su valor es comparado con α ($= P_\alpha$). Si $R_\alpha < \alpha$ entonces el rayo de energía es tomado como absorbido; de otra manera, es reflejado. Si el rayo de energía es absorbido, el contador N_a es incrementado y un nuevo rayo de energía es emitida desde un elemento de superficie de la apertura de la cavidad. Si se determinó que el rayo de energía fue reflejado, un proceso similar es utilizado para determinar la dirección de la reflexión. Sin embargo, en el caso de la reflexión los detalles dependen sobre el modelo para reflectividad, esto es, difusa, especular o bidireccional. Este proceso continua hasta que el número de rayos requeridos han sido emitidos desde la apertura de la cavidad.

Para realizar la simulación que ayude a calcular la emisividad aparente de la apertura de cavidad se utiliza el lenguaje de programación Python, que es un lenguaje de programación de alto nivel, intencionado a relativamente facilitar la lectura y escritura a las personas y a las computadoras leer y procesar [22]. Dentro de Python se utilizaran algunas librerías como las siguientes:

1. Matplotlib es una librería para realizar gráficos 2D de arreglos en Pyt-

hon. Y aunque matplotlib esta escrito en Python puramente, hace uso muy fuerte de Numpy y otras extensiones de código para proporcionar buen funcionamiento aún para arreglos grandes [23].

2. Numpy proporciona una variable tipo arreglo N-dimensional, *ndarray*, el cual describe una colección de ítems del mismo tipo, con la condición que todos estos *ndarrays* son homogéneos, esto quiere decir, cada ítem toma el mismo tamaño de bloque de memoria, y todos los bloques están interpretados exactamente de la misma manera [24].
3. Sympy o *Symbolic Python* esta a cargo de los objetos simbólicos de la matemática computacional. Esto significa que los objetos matemáticos están representados exactamente, no aproximadamente, y expresiones matemáticas con variables uni-evaluadas son tomados en forma simbólica [25]. Por ejemplo las letras x e y se pueden tomar como símbolos matemáticos utilizando sympy, esto es,

```
>>> from sympy import symbols
>>> x, y = symbols('x y')
>>> expr = x + 2*y
>>> expr
x + 2*y
```

El procedimiento a seguir para realizar el cálculo de emisividad aparente de la apertura de una cavidad se explican a continuación y los mismos están resumidos en la figura 2.3.

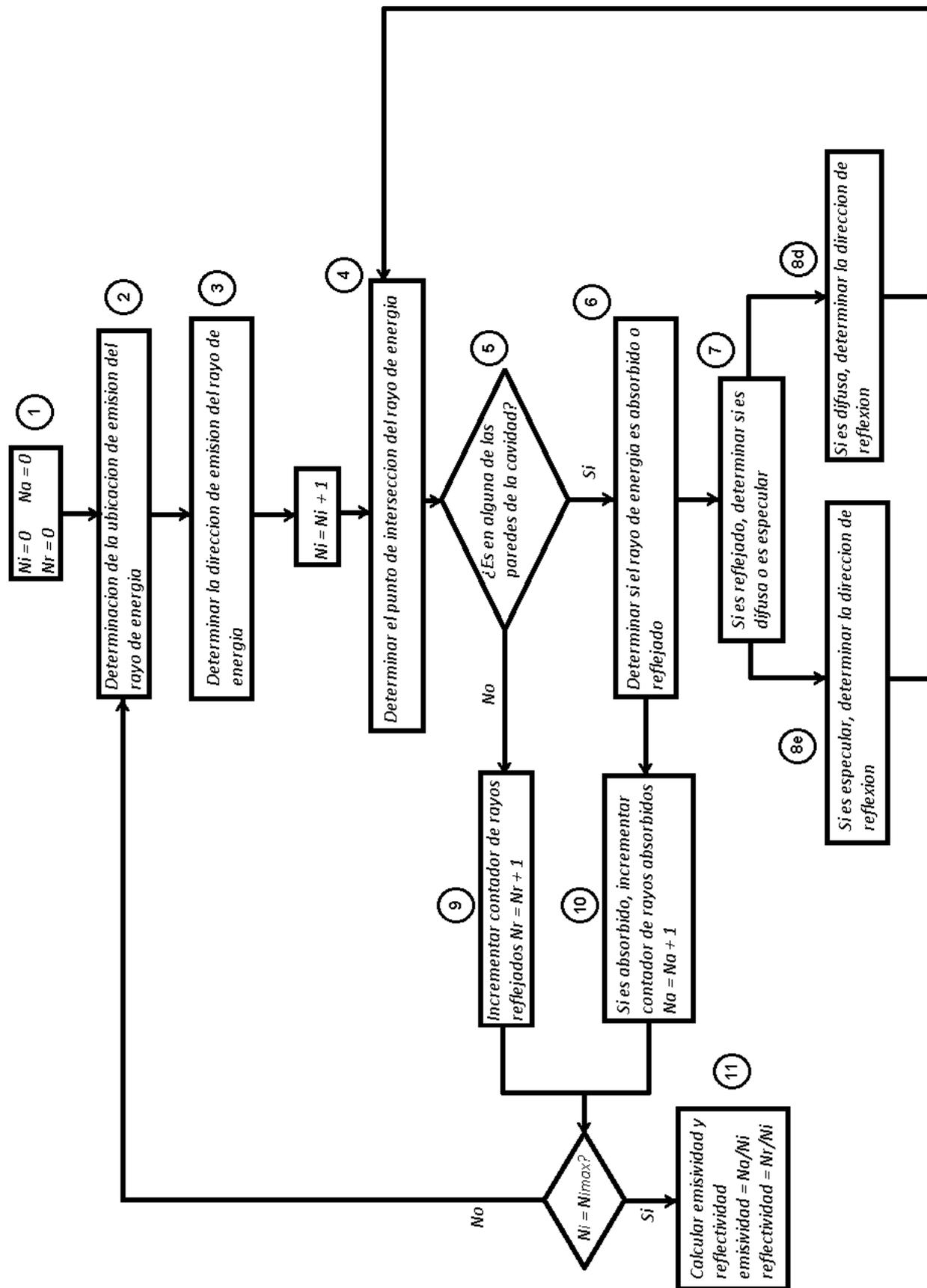


Figura 3.2: Diagrama lógico para la implementación de Monte Carlo, caminos aleatorios de transportación de radiación para una superficie difusa-especular, con paredes oscuras.

3.2.1. Paso 1: Inicialización de contadores de muestreo de función de distribución de probabilidad

Como primer paso se colocan los contadores de cada rayo en 0, esto es número de rayos incidentes $N_i = 0$, número de rayos absorbidos $N_a = 0$ y número de rayos reflejados $N_r = 0$. Estos contadores llevarán la cantidad de rayos incidentes, absorbidos y reflejados por cada ciclo en el cual un rayo que incide termina siendo absorbido o reflejado. Estos contadores también se pueden utilizar para verificar que al momento de concluir un ciclo de la simulación la cantidad de rayos de energía incidentes sea igual a la sumatoria de los rayos de energía absorbidos por cavidad y reflejados por la abertura, esto es, $N_i = N_a + N_r$, en caso que esto no sea así significa que la simulación dispone de un error.

3.2.2. Paso 2: punto de emisión de rayo

En este paso se trata de emitir un rayo de energía muestreado del espacio disponible sobre la abertura de la cavidad, primero se debe determinar a que longitud de onda corresponde el fotón a tomar para realizar el camino aleatorio, de la ecuación (1.3.3a)[14]

$$E = \int_0^{\infty} E_{\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} \epsilon_{\lambda} E_{b\lambda} d\lambda. \quad (3.2.2a) [117]$$

Se puede encontrar la función de distribución de probabilidad $P(\lambda)$ para encontrar un rayo de energía entre λ y $\lambda + d\lambda$ Se puede escribir de acuerdo a Modest [4],

$$P(\lambda)d\lambda = \frac{E_{\lambda}d\lambda}{\int_0^{\infty} E_{\lambda}d\lambda} = \frac{E_{\lambda}}{E}d\lambda. \quad (3.2.2a)$$

$$R(\lambda) = \int_0^{\lambda} P(\lambda)d\lambda = \frac{\int_0^{\lambda} E_{\lambda}d\lambda}{\int_0^{\infty} E_{\lambda}d\lambda} \quad (3.2.2b) [118]$$

Debido a que la integral de la ecuación (3.2.2b) [118] puede ser compleja su solución dependiendo del tipo de material o función que se asuma se considerará la emisividad de la superficie encontrada con una cámara termográfica como la emisividad espectral hemisférica total, de tal manera que con ellos consideraremos este promedio como constante, que ya contienen la información necesaria de como interactúa la superficie con la radiación incidente en el rango de longitudes de onda que mide la cámara termográfica (también, la

cámara termográfica servirá para comprobar la emisividad aparente de la apertura de la cavidad). Algunos autores mencionan algunas aproximaciones polinómicas que se utilizan comunmente para esta distribución de probabilidad [19], [4], [1]. Así mismo esto conlleva a una gran simplificación y ahorro de tiempo en la computación utilizando el método de traceado de Monte Carlo.

El procedimiento explicado en [9] para determinar un valor de emisividad de la superficie de las cuales estará compuesta la cavidad es:

1. Colocar sobre la superficie del objeto un pedazo de material (sticker) cuya emisividad sea conocida (como ser una cinta adhesiva) y que disponga de buena conductividad térmica (como una pintura)
2. Calentar la superficie del objeto a un temperatura de hasta por lo menos 50°C por encima de la temperatura ambiente
3. Colocar a la cámara termográfica la emisividad conocida de la pintura o la cinta adhesiva y también colocarle los valores de temperatura ambiente, temperatura atmosférica, la distancia de la cámara al objeto y la humedad relativa.
4. Tomar lectura de la temperatura del área de emisividad conocida.
5. Tomar lectura de la temperatura del área de emisividad desconocida.
6. Cambiar el valor de la emisividad del objeto en la cámara termográfica y tomar lectura hasta que sea la misma para la superficie de emisividad conocida. La emisividad ajustada en la cámara es la emisividad de la superficie desconocida.

Sigue que es necesario determinar el punto desde el cual será emitido este rayo de energía, para ello se puede realizar un desarrollo similar al utilizado para determinar la función de distribución de probabilidad para encontrar la función de distribución de probabilidad de las coordenadas sobre las cuales se describirá el punto de emisión, estas coordenadas ortogonales son x e y ,

$$E_j = \int_{A_j} \epsilon \sigma T^4 dA \quad (3.2.3a) [119]$$

Esta integral sobre un área es una integral doble, tal que

$$E_j = \int_{x=0}^X \int_{y=0}^Y \epsilon \sigma T^4 dy dx = \int_0^X E'_j dx, \quad (3.2.2a) [120]$$

donde,

$$E'_j(x) = \int_0^Y \epsilon \sigma T^4 dy. \quad (3.2.2a) [121]$$

Por lo tanto,

$$R_x = \frac{1}{E_j} \int_0^x E'_j dx \quad (3.2.2a) [122]$$

Esto puede ser invertido para encontrar la relación entre la ubicación en x y el número aleatorio R_x , en la apertura de la cavidad,

$$x = x(R_x), \quad (3.2.2a) [123]$$

mismo desarrolla para la variable y

$$y = y(R_y, x), \quad (3.2.2a) [124]$$

Si supone la potencia de emisión sea separada en componentes x e y , entonces las relaciones en el caso mas simple para las ecuaciones (3.2.2a) [111] y (3.2.2a) [112], tomando la integral para una abertura cuya área sea un círculo de radio ρ_a ,

$$x_0 = R_x X \quad (3.2.2a)$$

$$y_0 = R_y Y \quad (3.2.2b) [125]$$

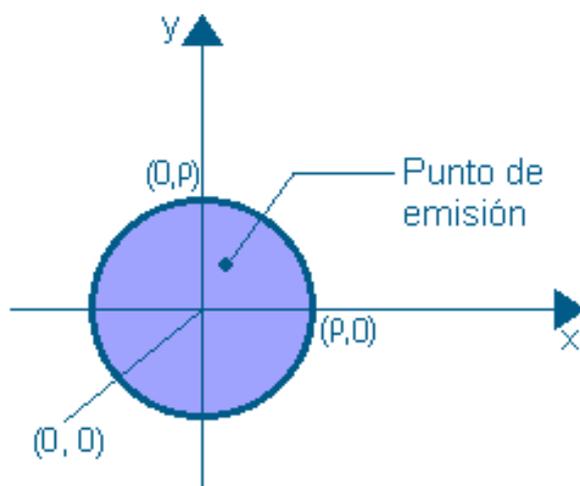


Figura 3.3: Punto de emisión desde la abeertura de la cavidad

Esto es, se toman dos números aleatorios R_x y R_y , cada uno de los cuales está uniformemente distribuido entre cero y la unidad, y se multiplican por la longitud de cada lado de la abertura, en el caso que la abertura de la cavidad sea rectangular.

También se puede considerar abertura de la cavidad en forma de un círculo, para lo cual se encuentran las relaciones para las coordenadas ρ y ϕ ,

$$E = \int_A E_b dA = E_b \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\phi \quad (3.2.3a) [126]$$

$$R_\phi = \frac{\int_0^\phi d\phi'}{\int_0^{2\pi} d\phi'} = \frac{\phi}{2\pi}, \quad (3.2.2a)$$

$$\phi = 2\pi R_\phi \quad (3.2.2b) [127]$$

y

$$R_r = \frac{\int_0^r r dr}{\int_0^R r dr} = \frac{r^2}{R^2}, \quad (3.2.3a)$$

$$R = r\sqrt{R_r} \quad (3.2.3b) [128]$$

Una vez muestrados, los dos números aleatorios R_x y R_y o bien R_ϕ y R_r se colocan en las ecuaciones anteriores y se puede determinar el punto de emisión.

3.2.3. Paso 3: determinar la dirección de emisión del rayo de energía

Una emisión difusa es tratada exactamente de la misma manera como una reflexión difusa. Por definición un rayo de energía reflejado difusamente no retiene conocimiento de su historia antes de sufrir la reflexión; todo lo que "se sabe" es que no tiene pasado y que ha nacido como un nuevo rayo de energía emitido. Este paso será referido posteriormente en el paso 8d, la determinación de la dirección de una reflexión difusa.

La dirección de una emisión difusa esta caracterizada por dos coordenadas independientes esféricas; el ángulo θ con respecto al vector unitario de superficie \mathbf{n} dirigido hacia el interior de la cavidad, y el ángulo ϕ con respecto a un vector unitario local tangente a la superficie \mathbf{t}_1 .

Para determinar la dirección de emisión del rayo de energía se puede utilizar la ecuación (1.8.2a)[25]

$$E_\lambda = \int_{2\pi} \epsilon_\lambda I_{b\lambda} \cos \theta d\Omega = \frac{1}{\pi} E_{b\lambda} E_{b\lambda} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \epsilon \cos \theta \sin \theta d\psi \quad (3.2.3a) [129]$$

Tal que para ψ

$$R_\psi = \frac{E_{b\lambda}}{\pi E_\lambda} \int_0^\psi \int_0^{\pi/2} \epsilon \cos \theta \sin \theta d\theta d\psi = \frac{1}{\pi} \int_0^\psi \int_0^{\pi/2} \frac{\epsilon'_\lambda}{\epsilon_\lambda} \cos \theta \sin \theta d\theta d\psi, (3.2.2a) [130]$$

esto se reduce a

$$R_\psi = \frac{\psi}{2\pi}, \text{ o } \psi = 2\pi R_\psi \quad (3.2.2a) [131]$$

Para la componente θ ,

$$R_\theta = \frac{\int_0^\theta \epsilon'_\lambda \cos \theta \sin \theta d\theta}{\int_0^{\pi/2} \epsilon'_\lambda \cos \theta \sin \theta d\theta}, \quad (3.2.2a) [132]$$

esto se reduce a

$$R_\theta = \sin^2 \theta, \theta = \sin^{-1} \sqrt{R_\theta} \quad (3.2.2a) [133]$$

La dirección por los ángulos dados por las ecuaciones (3.2.2a) [132] y [133] son con respecto a las coordenadas locales de la superficie, \mathbf{n} , \mathbf{t}_1 , \mathbf{t}_2 . Estas coordenadas locales se deben colocar en términos de las coordenadas globales.

El vector normal de una superficie se puede encontrar calculando el gradiente de la ecuación de superficie de acuerdo a [26],

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\nabla S}{|\nabla S|}, \quad (3.2.2a) [134]$$

los cosenos directores se definen,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = \cos \alpha = l \quad (3.2.2a)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = \cos \beta = m \quad (3.2.2b)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = \cos \gamma = n \quad (3.2.2c) [135]$$

lo que lleva a

$$\mathbf{n} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k} \quad (3.2.4a) [136]$$

Luego la orientación del vector tangencial \mathbf{t}_1 puede ser fácil si el plano o la superficie se puede orientar sobre el sistema de coordenadas global, en caso que no sea posible se utiliza,

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{i}}{|\mathbf{n} \times \mathbf{i}|}, \quad (3.2.2a)$$

$$\mathbf{t}_1 = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}\mathbf{j} - \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}\mathbf{k} = t_{1,y}\mathbf{j} - t_{1,z}\mathbf{k}, \quad (3.2.2b) [137]$$

siendo $m^2 + n^2 \neq 0$, en caso contrario $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = 1,0$ y los vectores tangenciales serían $\mathbf{t}_1 = \mathbf{j}$ y $\mathbf{t}_2 = \mathbf{k}$.

El siguiente vector tangencial a la superficie, \mathbf{t}_2 se encuentra a partir de \mathbf{n} y \mathbf{t}_1 ,

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{t}_1 \quad (3.2.3a) [138]$$

Una vez que \mathbf{n} , \mathbf{t}_1 , y \mathbf{t}_2 han sido expresados en términos del sistema global de coordenadas, los ángulo θ y ϕ pueden ser utilizados para calcular los cosenos de dirección del ray emitido difusamente. Esto se puede realizar primero encontrando las componentes del vector unitario en la dirección de la emisión difusa en términos del sistema de coordenadas local,

$$\mathbf{V}_{e,n} = \mathbf{n} \cos \theta, \quad (3.2.2a)$$

$$\mathbf{V}_{e,t_1} = \mathbf{t}_1 \sin \theta \cos \psi, \quad (3.2.2b)$$

$$\mathbf{V}_{e,t_2} = \mathbf{t}_2 \sin \theta \sin \psi. \quad (3.2.2c) [139]$$

Luego en términos del sistema de coordenadas global,

$$\mathbf{V}_{e,x} = V_{e,x} \mathbf{i} = (n_x \cos \theta + t_{1,x} \sin \theta \cos \psi + t_{2,x} \sin \theta \sin \psi) \mathbf{i}, \quad (3.2.4a)$$

$$\mathbf{V}_{e,y} = V_{e,y} \mathbf{j} = (n_y \cos \theta + t_{1,y} \sin \theta \cos \psi + t_{2,y} \sin \theta \sin \psi) \mathbf{j}, \quad (3.2.4b)$$

$$\mathbf{V}_{e,z} = V_{e,z} \mathbf{k} = (n_z \cos \theta + t_{1,z} \sin \theta \cos \psi + t_{2,z} \sin \theta \sin \psi) \mathbf{k}, \quad (3.2.4c) [140]$$

Luego de esto, se puede incrementar el contador de rayos de energía incidentes N_i en una unidad.

3.2.4. Paso 4: determinar el punto de intersección del rayo emitido con las paredes de la cavidad

Todos los puntos de intersección entre el camino del rayo de energía en la cavidad son encontrados resolviendo las ecuaciones que describen las superficies de la cavidad simultáneamente con las ecuaciones de la línea que describe el rayo de energía. Al desarrollar este paso se debe reconocer que las ecuaciones de una línea de longitud infinita y que normalmente las superficies de la cavidad también se extiende indefinidamente, esto conlleva a que la línea podría tener intersecciones con las superficies que describen la

cavidad incluso fuera de esta, esto puede llevar a soluciones no deseadas al momento de desarrollar la simulación.

Las ecuaciones de la línea que representan el camino del rayo de energía,

$$\frac{x - x_a}{l} = \frac{y - y_a}{m} = \frac{z - z_a}{n}, \quad (3.2.4a) [141]$$

se deben solucionar simultáneamente con las ecuaciones de las superficies de la cavidad.

Si se supone que la superficie es una esfera de radio R con su centro a una distancia $h = R - \sqrt{R^2 - a^2}$ donde a es el radio del círculo ubicado en el "fondo" de la esfera, que es la abertura de la superficie para la cual se desea calcular la emisividad aparente, entonces las ecuaciones de estas dos superficies son:

$$z = 0, \quad (3.2.2a)$$

$$x^2 + y^2 + (z - R + h)^2 = R^2, \quad (3.2.2b) [142]$$

tres soluciones se encuentran:

$$\text{punto a: } \begin{cases} x = x_a \\ y = y_a \\ z = z_a \end{cases} \quad (3.2.3a) [143]$$

$$\text{punto b: } \begin{cases} x = x_b, \text{ primer solución para la superficie de la esfera} \\ y = y_b, \text{ primer solución para la superficie de la esfera} \\ z = z_b, \text{ primer solución para la superficie de la esfera} \end{cases} \quad (3.2.2a) [144]$$

$$\text{punto c: } \begin{cases} x = x_c, \text{ segunda solución para la superficie de la esfera} \\ y = y_c, \text{ segunda solución para la superficie de la esfera} \\ z = z_c, \text{ segunda solución para la superficie de la esfera} \end{cases} \quad (3.2.2a) [145]$$

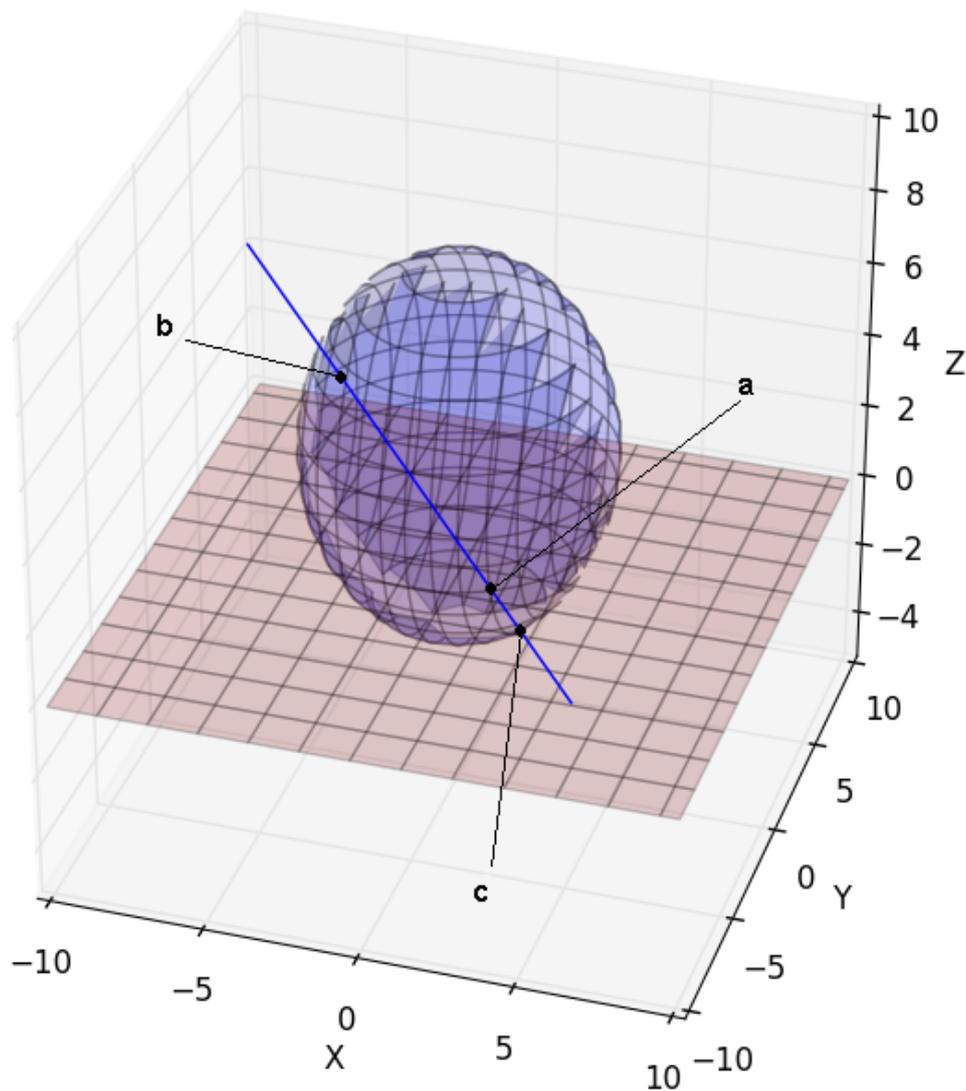


Figura 3.4: Puntos de intersección de la línea que define la trayectoria del rayo de energía con las superficies de una cavidad.

Entre cada uno de los puntos calculados, de la figura 3.4 se observa que el punto **b** (siendo el punto **a** el punto origen) es el deseado a determinar del rayo de energía y la superficie esférica por encima de los demás puntos que aunque son soluciones matemáticas, físicamente no son posibles por la trayectoria del rayo de energía y las paredes de la cavidad. Para poder hacerlo con efectividad se debe tomar en cuenta lo siguiente:

1. Eliminar el punto de origen, esto se hace al comparar cada uno de los puntos con el punto de origen, si coinciden sus coordenadas entonces este punto se retira de la lista de puntos elegibles.

2. Luego se debe eliminar los puntos que están hacia atrás de la dirección de propagación del rayo de energía, esto se hace utilizando el producto punto entre la normal de la superficie del punto origen con el vector del punto candidato,

$$\mathbf{V}_c = (x_c - x_a)\mathbf{i} + (y_c - y_a)\mathbf{j} + (z_c - z_a)\mathbf{k} \quad (3.2.2a) [146]$$

que va desde el punto origen hasta el punto candidato. Si el valor del producto punto es positivo entonces es un punto hacia adelante de la superficie y si el producto punto es negativo entonces es un punto hacia atrás de la superficie.

3. Por último, del resultante de los puntos candidatos que quedan frente a la superficie, se debe escoger el que esté más cerca del punto origen. Esto se realiza calculando para cada uno de los puntos candidatos la distancia y luego seleccionando la menor. Para determinar la menor distancia se iguala la ecuación de la trayectoria del rayo de energía a un parámetro T , que es la distancia entre los puntos x_a, y_a, z_a y el punto x, y, z .

$$\frac{x - x_a}{l} = \frac{y - y_a}{m} = \frac{z - z_a}{n} = T, \quad (3.2.2a) [147]$$

tal que,

$$x - x_a = lT \quad (3.2.2a)$$

$$y - y_a = mT \quad (3.2.2b)$$

$$z - z_a = nT \quad (3.2.2c) [148]$$

luego,

$$x = x_a + lT \quad (3.2.4a)$$

$$y = y_a + mT \quad (3.2.4b)$$

$$z = z_a + nT \quad (3.2.4c) [149]$$

y la cuarta ecuación para encontrar las cuatro incógnitas x , y , z , T , se obtiene al resolver para la variable T la ecuación de la superficie en consideración, suponiendo en este caso la esfera se tiene,

$$\text{Esfera}(x, y, z) \left\{ \begin{array}{l} x = x_a + lT \\ y = y_a + mT \\ z = z_a + nT \end{array} \right\} = 0 \quad (3.2.4a)$$

$$(x_a + lT)^2 + (y_a + mT)^2 + (z_a + nT - R + h)^2 = R^2 \quad (3.2.4b) [150]$$

debido a que el despeje para esta ecuación es muy extenso no se escribirá aquí.

Paso 5, Con lo anterior el punto candidato puede ser un punto sobre alguna superficie de la cavidad o bien puede ser un punto de la abertura de la cavidad. En el caso que el punto de rayo de energía caiga sobre la abertura de la cavidad entonces se considera un rayo de energía reflejado y se incrementa el contador N_r en una unidad (paso 9).

Paso 11, si la cantidad de rayos de energía simulados alcanzó la cantidad deseada de muestreo, es decir, $N_i = N_{i\max}$ entonces la simulación se detiene y se procede a calcular la emisividad aparente de la abertura de la cavidad, $e = \frac{N_a}{N_i}$, en caso contrario se procede a emitir un nuevo rayo de energía desde la abertura de la cavidad, esto es, el paso 2.

3.2.5. Paso 6: determinar si el rayo de energía es absorbido o reflejado

Una vez que el rayo de energía llega a la superficie siguiente, se debe determinar si este rayo de energía es absorbido o reflejado, esto se realiza sabiendo las propiedades probabilísticas ya explicadas para el fenómeno de absorción, es decir, la absorptividad

determina la probabilidad de que un rayo de energía sea absorbido por la superficie, aquí se hace uso del método de Monte Carlo. Una vez determinada la absorptividad de la superficie, se selecciona aleatoriamente un número entre cero y la unidad, R_α y se compara con el valor de la absorptividad, esto es, si $R_\alpha < \alpha$, entonces el rayo de energía es absorbido y el contador N_a se incrementa en una unidad, paso 10. De otro modo, el rayo es reflejado.

Paso 11, si la cantidad de rayos de energía simulados alcanzó la cantidad deseada de muestreo, es decir, $N_i = N_{imax}$ entonces la simulación se detiene y se procede a calcular la emisividad aparente de la abertura de la cavidad, $e = \frac{N_a}{N_i}$, en caso contrario se procede a emitir un nuevo rayo de energía desde la abertura de la cavidad, esto es, el paso 2.

3.2.6. Paso 7: determinar si la reflexión es difusa o especular

Si la interacción con la superficie resulta ser una reflexión, es necesario determinar si esta reflexión es difusa o especular. La reflectividad de una superficie se puede expresar en términos de dos componentes la especular y la difusa, de tal manera que,

$$\rho = \rho_s + \rho_d \quad (3.2.3a) [151]$$

Para aplicar el método de Monte Carlo de tal manera que se pueda determinar el tipo de reflexión, se debe normalizar, para ello se utiliza la razón,

$$r_s = \frac{\rho_s}{\rho} = \frac{\rho_s}{\rho_s + \rho_d}, \quad (3.2.2a) [152]$$

de tal manera que un número aleatorio entre cero y uno se elige nuevamente y se compara con r_s , si $R_\rho < r_s$ entonces la reflexión es especular, en caso contrario es difusa.

3.2.7. Pasos 8e y 8d: determinar la dirección de la reflexión especular y difusa

Una reflexión se dice que es especular, si

1. El rayo incidente, el rayo reflejado, y la normal de la superficie están en el mismo plano.

2. El ángulo entre el rayo reflejado y la normal de la superficie es el mismo que el ángulo entre el rayo incidente y la superficie normal.

Estos requisitos se establecieron matemáticamente en las ecuaciones (1.9.2a) [46] y [47]. Entonces el rayo reflejado especularmente se puede obtener mediante la relación

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{V}_i - 2(\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \quad (3.2.2a) [153]$$

donde,

$$\mathbf{V}_i = (x_b - x_a)\mathbf{i} + (y_b - y_a)\mathbf{j} + (z_b - z_a)\mathbf{k} \quad (3.2.2a) [154]$$

con el vector \mathbf{V}_r , es posible encontrar los cosenos directores para poder determinar la próxima superficie con la cual el rayo de energía interactúa.

En el caso de la reflexión difusa, la dirección del rayo de energía se determina de igual manera que el paso 3.

Posteriormente se debe continuar con el paso 4.

3.3. Simulaciones de caminos aleatorios aplicados a cavidades para el cálculo de emisividades aparentes con el método de Monte Carlo

Ahora se procederá a mostrar los resultados de simulaciones de caminos aleatorios aplicados a cavidades para el cálculo de emisividades aparentes con el método de Monte Carlo. El lenguaje de programación utilizado es Python, debido a la facilidad, a que es gratuito y la disposición de librerías matemáticas, Python resulta ser un lenguaje de programación conveniente. Cada una de las simulaciones dispone de secciones claras para las cuales los principios físicos, ecuaciones matemáticas y metodología ya fueron expuestas en este y capítulos anteriores. Las cavidades utilizadas para realizar la simulación son:

1. Cavidad cilíndrica.

2. Cavity cónica.
3. Cavity cónica cilíndrica.
4. Cavity doblemente cónica.
5. Cavity cúbica.
6. Cavity esférica.

Para cada una de estas configuraciones se muestran cada una de sus geometrías a continuación:

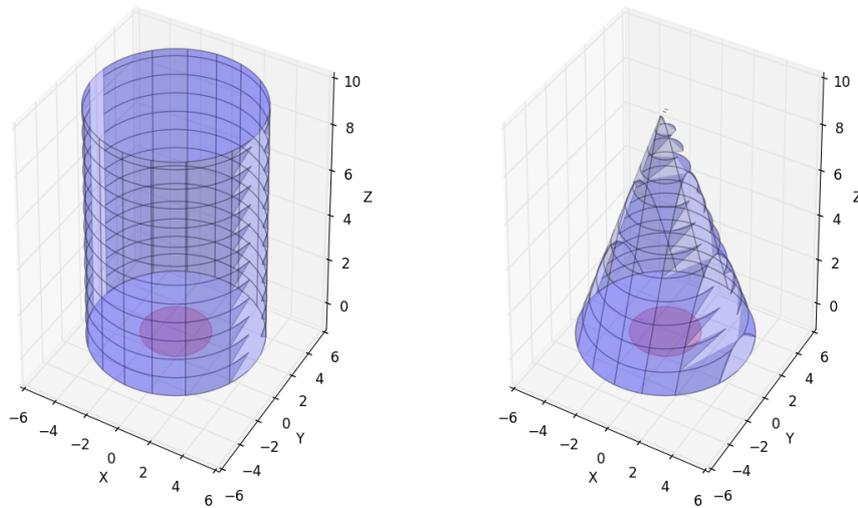


Figura 3.5: A la izquierda la cavidad cilíndrica y a la derecha la cavidad cónica.

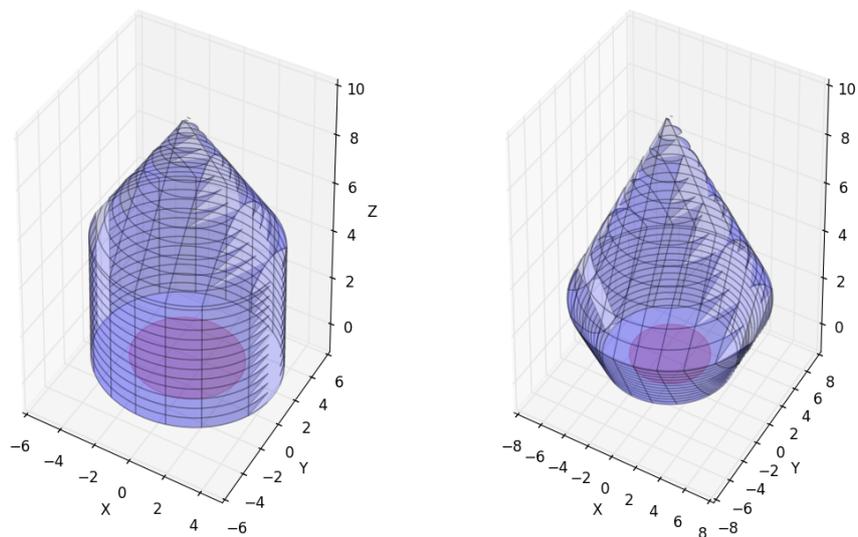


Figura 3.6: A la izquierda la cavidad cónica cilíndrica y a la derecha la cavidad doblemente cónica.

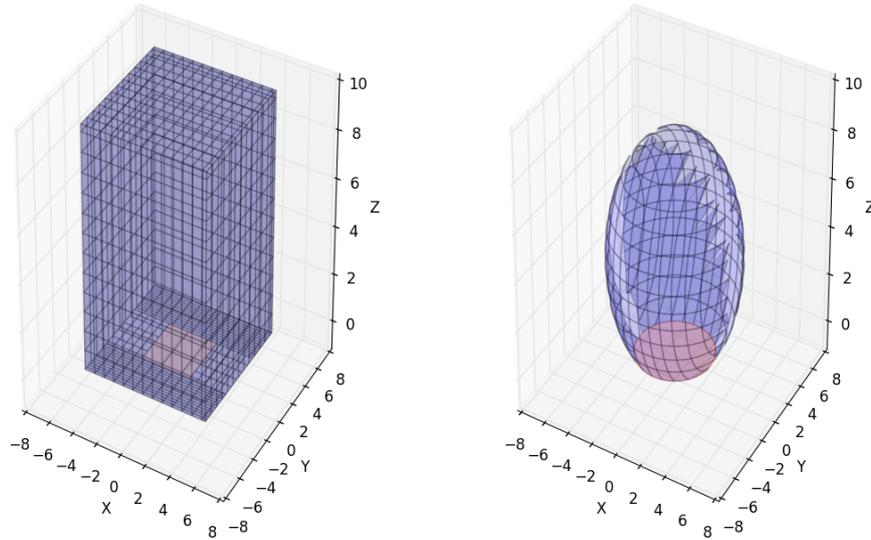


Figura 3.7: A la izquierda la cavidad cúbica y a la derecha la cavidad esférica.

Para cada una de estas cavidades se realizaron simulaciones utilizando el lenguaje de programación Python, para cada una de ellas se realizaron muestreos para distintas geometrías, en cada simulación se realizó un muestreo de 10,000 rayos de energía, los resultados se pueden observar en las siguientes tablas:

3.4. Comparación de datos calculados con datos medidos

Se pretende utilizar la emisividad aparente calculada con el método de Monte Carlo de la apertura de la cavidad para que una cámara termográfica logre tomar la temperatura de las paredes de la cavidad desde la abertura de la cavidad. El modelo consiste en la fabricación de una cavidad como se muestra en la siguiente imagen

Este modelo básico consiste en la elaboración de una cavidad de cierto material con una emisividad determinada, como se verá, el efecto rebote” de la radiación con las paredes de la cavidad hace que la emisividad aparente en la apertura de la cavidad se incremente, esto a su vez facilita la medición de temperatura de la cámara termográfica.

Como se aprecia de la figura a la cavidad se le colocan dos sensores de temperatura los cuales toman lectura de las paredes de la cavidad, (estos sensores se puede observar afectan la superficie interna de la cavidad, pero este efecto para efectos de comprobación

No	emisividad superficie	emisividad aparente	relación radio abertura - diámetro cavidad
1	0.8	0.9871	0.30
2	0.8	0.9886	0.32
3	0.8	0.9869	0.34
4	0.8	0.9837	0.36
5	0.8	0.9821	0.38
6	0.8	0.9810	0.40
7	0.8	0.9814	0.42
8	0.8	0.9811	0.44
9	0.8	0.9788	0.46
10	0.8	0.9785	0.48
11	0.8	0.9761	0.5

Cuadro 3.1: Tabla resumen de cálculos para emisividades aparentes para una cavidad cilíndrica con diámetro = 10.0 u, altura = 10.0 u, radio de abertura desde 3.0 hasta 5.0 u.

No	emisividad superficie	emisividad aparente	relación radio abertura - diámetro cavidad
1	0.8	0.9513	0.30
2	0.8	0.9458	0.32
3	0.8	0.9434	0.34
4	0.8	0.9406	0.36
5	0.8	0.9400	0.38
6	0.8	0.9368	0.40
7	0.8	0.9306	0.42
8	0.8	0.9293	0.44
9	0.8	0.9290	0.46
10	0.8	0.9287	0.48
11	0.8	0.9277	0.5

Cuadro 3.2: Tabla resumen de cálculos para emisividades aparentes para una cavidad cónica con diámetro = 10.0 u, altura = 10.0 u, radio de abertura desde 3.0 hasta 5.0 u.

No	emisividad superficie	emisividad aparente	relación radio abertura - diámetro cavidad
1	0.8	0.9778	0.30
2	0.8	0.9723	0.32
3	0.8	0.9717	0.34
4	0.8	0.9733	0.36
5	0.8	0.9726	0.38
6	0.8	0.9705	0.40
7	0.8	0.9706	0.42
8	0.8	0.9684	0.44
9	0.8	0.9688	0.46
10	0.8	0.9662	0.48
11	0.8	0.9627	0.5

Cuadro 3.3: Tabla resumen de cálculos para emisividades aparentes para una cavidad cónica - cilíndrica con diámetro = 10.0 u, altura = 10.0 u, radio de abertura desde 3.0 hasta 5.0 u.

No	emisividad superficie	emisividad aparente	relación radio abertura - diámetro cavidad
1	0.8	0.9935	0.30
2	0.8	0.9934	0.32
3	0.8	0.9941	0.34
4	0.8	0.9940	0.36
5	0.8	0.9918	0.38
6	0.8	0.9922	0.40
7	0.8	0.9914	0.42
8	0.8	0.9902	0.44
9	0.8	0.9897	0.46
10	0.8	0.9885	0.48
11	0.8	0.9880	0.5

Cuadro 3.4: Tabla resumen de cálculos para emisividades aparentes para una cavidad doble cónica con diámetro = 10.0 u, altura = 20.0 u, radio de abertura desde 3.0 hasta 5.0 u.

No	emisividad superficie	emisividad aparente	relación radio abertura - diámetro cavidad
1	0.8	0.9708	0.50
2	0.8	0.9642	0.55
3	0.8	0.9585	0.60
4	0.8	0.9515	0.65
5	0.8	0.9357	0.70
6	0.8	0.9269	0.75
7	0.8	0.9152	0.80
8	0.8	0.9082	0.85
9	0.8	0.8929	0.90
10	0.8	0.8792	0.95
11	0.8	0.8724	1.0

Cuadro 3.5: Tabla resumen de cálculos para emisividades aparentes para una cavidad cúbica con lado = 10.0 u, lado de abertura desde 5.0 hasta 10.0 u.

No	emisividad superficie	emisividad aparente	relación radio abertura - diámetro cavidad
1	0.8	0.9950	0.30
2	0.8	0.9944	0.32
3	0.8	0.9945	0.34
4	0.8	0.9942	0.36
5	0.8	0.9927	0.38
6	0.8	0.9931	0.40
7	0.8	0.9926	0.42
8	0.8	0.9921	0.44
9	0.8	0.9910	0.46
10	0.8	0.9910	0.48
11	0.8	0.9904	0.5

Cuadro 3.6: Tabla resumen de cálculos para emisividades aparentes para una cavidad esférica con diámetro = 10.0 u, radio de abertura desde 3.0 hasta 5.0 u.

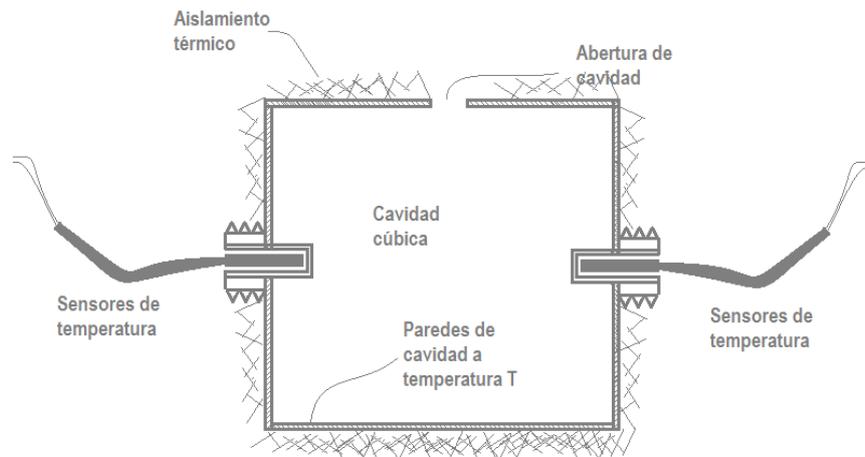


Figura 3.8: Modelo básico de cavidad para la comprobación del cálculo de emisividad aparente de la abertura con el método de Monte Carlo.

son ignorados). Así mismo a la cavidad se le coloca un aislante térmico al contorno para lograr minimizar la pérdidas de calor con el entorno por la interacción del exterior de las paredes de la cavidad.



Figura 3.9: A la izquierda: modelo básico de cavidad, a la derecha: sensores de temperatura y plc Unitronics V350

Como se muestra en figura anterior se realizó montaje de instrumentación fabricando una cavidad cúbica con material de aluminio, a la misma se le instalaron sensores de temperatura, los cuales van conectados a un plc Unitronics V350. Los sensores de temperatura son RTD PT100 ($\alpha : 0.385$). Se configuró el plc unitronics V350 para que mostrara en su display las lecturas de los sensores de temperatura y que calcula el promedio de ambas lecturas para disponer de una mejor estimación de la temperatura de las paredes de la cavidad. Las dimensiones de la cavidad es de 10.0 cm por lado (interno)

y la abertura dispone de lado 1.8 cm. Se intentó medir la emisividad de la superficie de muestra, aluminio pulido, con el método experimental, pero no fue posible. Por lo que se buscaron los valores para el aluminio en tablas, de acuerdo a [27] la emisividad está entre 0.05 - 0.08, por lo que se realizó el cálculo con el programa en python, dando como resultado que la emisividad aparente de la abertura de la cavidad es de 0.9004. Este valor de emisividad fue ingresado a la cámara termográfica para determinar la temperatura de las paredes de la cavidad. La cavidad fue calentada y la lectura de temperatura de la pared de la cavidad fue registrada con un plc y con la cámara termográfica.



Figura 3.10: Instrumentación utilizada

Posteriormente se calentó cavidad y se dejó que alcanzara el equilibrio térmico entre las paredes de la cavidad (que ambos sensores marcaran igual lectura) y se tomaron varios datos de la temperatura registrada por los sensores de temperatura y la cámara termográfica.

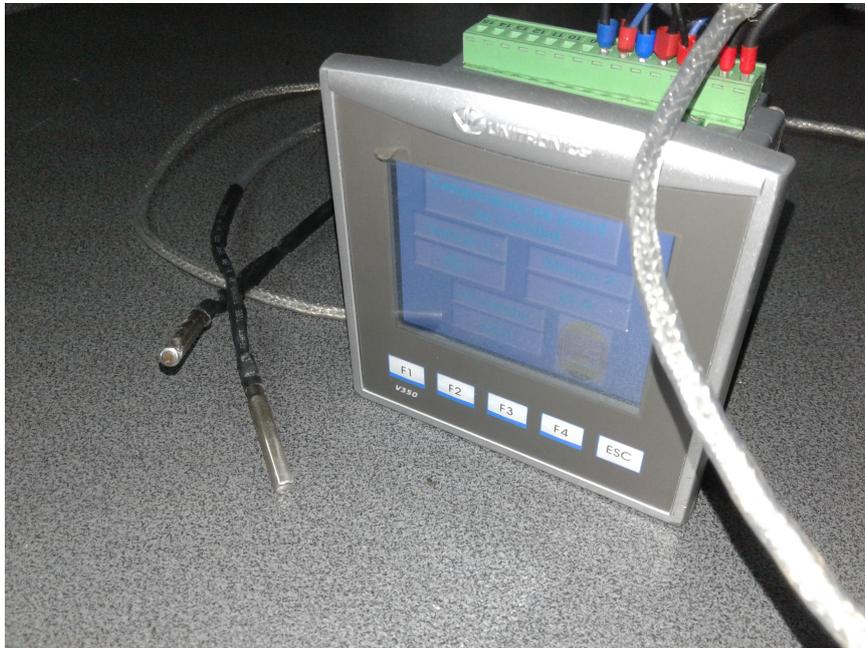


Figura 3.11: Montaje de instrumentación

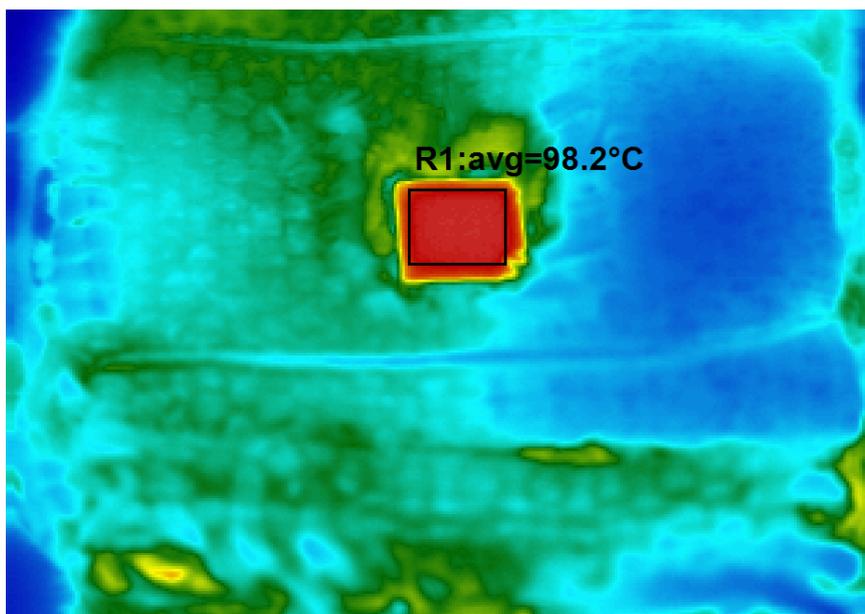


Figura 3.12: Toma de imagen infrarroja de la cavidad.

No	Temperatura sensores	Temperatura cámara termográfica	Porcentaje de error
1	95.1 C	96.8	-1.76 %
2	91.4	93.4	-2.14 %
3	88.8	89.7	-1.00 %
4	84.8	86.7	-2.19 %
5	77.7	80.0	-2.88 %
6	76	78.6	-3.31 %
7	75.5	77.7	-2.83 %
8	71.0	73.5	-3.40 %
9	69.0	71.4	-3.36 %
10	66.5	69.0	-3.62 %

Cuadro 3.7: Toma de datos de temperatura entre la temperatura medida por la cámara termográfica y los sensores de temperatura de la cavidad

Conclusiones

1. Aunque una superficie disponga de baja emisividad es posible incrementar la emisividad del objeto si se trabaja con cavidades de tal manera que al ingresar la radiación térmica a la cavidad, disponga de mayor cantidad de reflexiones internas. Durante una inspección con una cámara termográfica es recomendable que al tomar la lectura de temperatura de cuerpos altamente reflectivos (como ser metales pulidos), se utilicen las zonas del metal que dispongan de agujeros o las esquinas, las cuales son sitios donde se incrementa la emisividad aparente. Esto es de utilidad práctica ya que los metales pulidos se encuentran en las instalaciones del área mecánica como ser tuberías de vapor, tuberías de aires acondicionados (cobre) y también en instalaciones del área eléctrica como ser los alimentadores y barras conductores que son de cobre ó aluminio.
2. Es posible fabricar una abertura de cavidad que simule las propiedades de un cuerpo negro, esto es, toda la radiación incidente es absorbida y a su vez esta radiación es emitida. Para incrementar la emisividad entonces se deben colocar las paredes internas de la cavidad de tal manera que al haz de luz "le cueste más" salir de su interior, este proceso aumenta la probabilidad que el haz de luz sea absorbido y como resultado global la emisividad aparente de la abertura de la cavidad se incremente a valores cercanos a la unidad (cuerpos negros). Lo anterior dispone de aplicación práctica ya que las cavidades pueden ser utilizadas como patrones para radiómetros como una cámara termográfica, la alta emisividad hace que la curva de calibración de la cámara termográfica pueda ser comparada con la ley de Stefan-Boltzman [9].

3. Con el método de Monte Carlo es posible calcular la emisividad aparente de la abertura de una cavidad utilizando las cadenas de Markov y entre mayor cantidad de rayos de energía disponga la simulación, mayor exactitud dispondrá el cálculo. Normalmente el cálculo de intercambio de calor por medio de radiación térmica dispone de integrales complejas al incrementar la cantidad de geometrías y propiedades de la superficie, algo deseable en el intento de incrementar la emisividad aparente de la abertura de una cavidad, sin embargo, con el método de Monte Carlo el valor numérico de estas integrales puede ser llevado a cabo con relativa facilidad utilizando un ordenador.
4. Como se puede apreciar de las tablas calculadas con el algoritmo desarrollado con el lenguaje de programación, Python, una de las maneras de incrementar la emisividad aparente reflejada es disminuyendo la relación área de abertura con volumen de cavidad. Entre menor sea la relación entre el área de la abertura de la cavidad con su volumen interno, esperamos que mayor sea la emisividad aparente de la abertura de la cavidad. Así mismo se puede esperar que si las paredes internas de la cavidad se colocan orientadas con ángulos cuyas reflexiones sean siempre dirigidas hacia su centro geométrico, se produce un aumento de la emisividad aparente de la abertura para estas geometrías. De las tablas se aprecia que para las geometrías que cumplen con lo anterior como ser la esfera, la cavidad doble cónica disponen de mayor emisividad que las geometrías cónica y cilíndrica simple.

Bibliografía

- [1] Alexander V Prokhorov and Leonard M Hanssen (2004), *Effective emissivity of a cylindrical cavity with an inclined bottom: I. Isothermal cavity*, Institute of Physics Publishing, pp 1–8.
- [2] Theodore L. Bergman, Adrienne S. Lavine, Frank P. Incropera and David P. Dewitt (2011), *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, Jefferson City, John Wiley and Sons, Inc., **12**, pp 770–790
- [3] D.P. DeWitt and Gene D. Nutter (1988), *Theory and Practice of Radiation Thermometry*, John Wiley and Sons, Inc., **1-10**, pp 20–670.
- [4] Michael F. Modest (2012), *Radiative Heat Transfer*, **1-7**, pp 1–600 Merced, California.
- [5] Robert Siegel and John R. Howell (1992), *Thermal Radiation Heat Transfer*, **2**, pp 13–39 Washington, Hemisphere Publishing Corporation.
- [6] Andrew S. Glassner (1995), *Principles of digital image synthesis 2*, **13**, pp 695–726 San Francisco, CA, Morgan Kaufmann Publishers, Inc.
- [7] Matthew N. O. Sadiku (2001), *Numerical Techniques in Electromagnetics*, **8**, pp 549–552 CRC Press Boca Raton London New York Washington,D.C.
- [8] Donald A. Burns and Emil W. Ciurczak (2008), *Handbook of Near-Infrared Analysis*, **2**, pp 8–12 Taylor and Francis Group, LLC
- [9] Waldemar Minkima and Sebastian Dudzik (2009), *Infrared Thermography Errors and Uncertainties*, **2**, pp 20-24 West Sussex, PO19 8SQ, John Wiley and Sons Inc.

- [10] Malvin H. Kalos and Paula A. Whitlock (2008), *Monte Carlo Methods*, **4**, pp 20-150 Wiley-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, Weinheim
- [11] David P. Landau and Kurt Binder (2000), *A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics*, **3**, pp 35-50 Cambridge University Press, New York
- [12] Kurt Binder and Dieter W. Heermann (2010), *Monte Carlo Simulation in Statistical Physics*, **1**, pp 66-93 Springer Heidelberg Dordrecht London New York
- [13] Dirk P. Kroese, Thomas Taimre, Zdravko I. Botev (2011), *Handbook of Monte Carlo Methods*, **1-7**, pp 24–80 Hoboken, New Jersey, John Wiley and Sons Inc.
- [14] Raymond A. Serway, Clement J. Moses, Curt A. Moyer (2003), *Física Moderna*, **12**, pp 447–448 Thomson Higher Education 10 Davis Drive Belmont, CA 94002-3098, USA
- [15] Phillip Von Hilgers* and Amy N. Langville (2005), *The Five Greatest Applications of Markov Chains*, pp 1-14
- [16] Stephen P. Brooks (1997), *Markov chain Monte Carlo method and its application*, pp 20-25 Journal of the Royal Statistical Society
- [17] Alexander Volfovsky (2007), *Markov chains and Applications*, pp 9-10, Department of Statistical Science, Duke University
- [18] V. I. Sapritsky and A. V. Prokhorov (1992), *Calculation of the Effective Emissivities of Specular-diffuse Cavities by the Monte Carlo Method*, pp 1-6 Metrologia
- [19] John R. Howell (1965), *Calculation of Radiant Heat Exchange By the Monte Carlo Method*, pp 12–13, Lewis Research Center, Cleveland, Ohio
- [20] Tim Marrinan (2008), *Markov Chains: roots, theory, and application*, pp 1–2
- [21] J. Robert Mahan (2002), *Radiation Heat Transfer, A Statistical Approach*, **11**, pp 3359-3370 Hoboken, New Jersey, John Wiley and Sons Inc.
- [22] Charles Severance (2013), *Python for informatics*, **1**, pp 22-23 Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License

-
- [23] John Hunter, Darren Dale, Eric Firing and Michael Droettboom (2015), *Matplotlib Release 1.4.3*, **1**, pp 3-4
- [24] Numpy community (2016), *Numpy Reference Release 1.11.0*, **1**, pp 3-7
- [25] Sympy Development Team (2015), *Sympy Documentation Release 0.7.6 digit*, **2**, pp 4-6
- [26] Roald K. Wangsness (2001), *Campos electromagnéticos*, **1**, pp 3-7 Editorial Limusa, S.A. de C.V. Grupo Noriega Editores Balderas 95, México D.F.
- [27] ITC (2008), *Manual Termografía Nivel II*, **1**, pp 10-50 Publ. No T560311_B-es-ES

Apéndice A

Programas de python desarrollados

A.1. Programa para el cálculo de emisividad aparente para una cavidad esférica

```
# Este es el programa para realizar calculos de emisividades aparente de una
# cavidad esferica con una abertura de forma circular
# Autor de programa: Gerardo Gamez
from sympy import *
import os
import random
import math
import numpy as np
from sympy.abc import x,y,z
#3. determinar punto de interseccion
def point_intersection():
    global point, l, m, n, x_i, y_i, z_i, norm, V, h
    selectable_T = []
    selectable_points = []
    normal_vec = np.array([norm[0], norm[1], norm[2]])
    for K in T_n:
        for element in K:
```

```

    if type(element) is dict:
        T_2 = element[T]
        T_val = T_2.subs([(l_in, l), (m_in, m), (n_in, n), \
            (x_in, x_i), (y_in, y_i), (z_in, z_i), (h, desp)])
        if T_val is not nan and T_val.is_real:
            x_k = T_val*l + x_i
            y_k = T_val*m + y_i
            z_k = T_val*n + z_i
            point_test = np.array([x_k, y_k, z_k])
            delta_V = np.array([(x_k - x_i), (y_k - y_i), (z_k - z_i)])
            d_p = np.dot(delta_V, normal_vec)
            if np.max(np.abs(delta_V)) < 0.000000001:
                continue
            elif d_p < 0:
                continue
            else:
                selectable_T.append(abs(T_val))
                selectable_points.append((point_test))
        point = selectable_points[selectable_T.index(np.min(selectable_T))]
        V = ((point[0] - x_i), (point[1] - y_i), (point[2] - z_i))
        conjunto.append([point, (l,m,n), V])

# 4. Determinar el elemento de superficie en el cual el rayo de energia cae.
def absortion():
    global point, l, m, n, x_i, y_i, z_i, norm, V, state, ray, ray_reflected, \
        ray_absorted, desp
    radius = math.sqrt((point[0])**2 + (point[1])**2 + (point[2] - desp)**2)
    rho = math.sqrt((point[0])**2 + (point[1])**2)
    state_1 = False
    if point[2] <= 0.0001:
        if rho < a:

```

```
ray_reflected += 1
ray += 1
state = False
state_1 = True
texto.append('reflejado')
rayos.append(str(ray))
if state == True:
    if 0.9999*R < radius < 1.001*R:
        state_1 = True
        if random.uniform(0, 1) < s_1_absortivity:
            ray_absorted += 1
            ray += 1
            state = False
            texto.append('absorbido')
            rayos.append(str(ray))
        else:
            norm = normal_1.subs([(x, point[0]), (y, point[1]), \
(z, point[2]), (h, desp)])
            if random.uniform(0, 1) > s_1_specularity:
                phi = 2*np.pi*(random.uniform(0, 1))
                theta = math.asin(math.sqrt(random.uniform(0, 1)))
                t_1 = u_vec_perp(norm, i_u)
                t_2 = cross_product(norm, t_1)
                V_e = vector_emission(norm, t_1, t_2, theta, phi)
                l, m, n = V_e[0], V_e[1], V_e[2]
                x_i, y_i, z_i = point[0], point[1], point[2]
                texto.append('reflejado_difuso')
                rayos.append(str(ray))
            else:
                Vec, T_1 = direction_of_reflection(V, norm)
                l, m, n = direct_cosines(Vec, T_1)
```

```

        x_i, y_i, z_i = point[0], point[1], point[2]
        texto.append('reflejado_especular')
        rayos.append(str(ray))

    assert state_1 == True

def emission(nor, i_u):
    phi = 2*math.pi*(random.uniform(0, 1))
    theta = math.asin(math.sqrt(random.uniform(0, 1)))
    t_1 = u_vec_perp(nor, i_u)
    t_2 = cross_product(nor, t_1)
    V_e = vector_emission(nor, t_1, t_2, theta, phi)
    return V_e[0], V_e[1], V_e[2]

def vector_emission(n, t_1, t_2, theta, phi):
    Ve_x = (n[0]*math.cos(theta) + t_1[0]*math.sin(theta)*math.cos(phi) + \
    t_2[0]*math.sin(theta)*math.sin(phi))
    Ve_y = (n[1]*math.cos(theta) + t_1[1]*math.sin(theta)*math.cos(phi) + \
    t_2[1]*math.sin(theta)*math.sin(phi))
    Ve_z = (n[2]*math.cos(theta) + t_1[2]*math.sin(theta)*math.cos(phi) + \
    t_2[2]*math.sin(theta)*math.sin(phi))
    return (Ve_x, Ve_y, Ve_z)

def dot_product(vect_1, vect_2):
    return vect_1[0]*vect_2[0] + vect_1[1]*vect_2[1] + vect_1[2]*vect_2[2]

def cross_product(u, v):
    return ((u[1]*v[2]-u[2]*v[1]), (u[2]*v[0]-u[0]*v[2]), (u[0]*v[1]-u[1]*v[0]))

def u_vec_perp(n, i_u):
    mag_t = magnitude(cross_product(n, i_u))
    if mag_t == 0:

```

```

        return np.array([0,1,0])
    else:
        t = cross_product(n, i_u)
        t_u = (t[0]/mag_t, t[1]/mag_t, t[2]/mag_t)
        return t_u

def direction_of_reflection(Vector, n):
    V_n = dot_product(Vector, n)
    V_2 = (Vector[0] - 2*V_n*n[0], Vector[1] - 2*V_n*n[1], Vector[2] - \
    2*V_n*n[2])
    T_2 = magnitude(V_2)
    return V_2, T_2

def magnitude(vector):
    return math.sqrt(vector[0]**2 + vector[1]**2 + vector[2]**2)

def direct_cosines(vector, mag):
    l = vector[0]/mag
    m = vector[1]/mag
    n = vector[2]/mag
    return (l, m, n)

valores = []
T = symbols('T')
x_j, y_j, z_j, x_in, y_in, z_in, l_in, m_in, n_in, h = symbols('x_j y_j z_j \
x_in y_in z_in l_in m_in n_in h')

R = 5.0

s_0 = Matrix([z])          #plano xy
s_1 = Matrix([x**2 + y**2 + (z - h)**2 - R**2]) #Esfera

```

```

coord = Matrix([x,y,z])
s_1_absortivity = 0.8
s_1_specularity = 0.958
i_u = np.array([1,0,0])

normal_0 = s_0.jacobian(coord)
normal_0 = normal_0/(sqrt(normal_0[0]**2 + normal_0[1]**2 + normal_0[2]**2 ))
normal_1 = s_1.jacobian(coord)
normal_1 = -1*normal_1/(sqrt(normal_1[0]**2 + normal_1[1]**2 + \
    normal_1[2]**2 ))

x_j = T*l_in + x_in
y_j = T*m_in + y_in
z_j = T*n_in + z_in

eq_1 = s_0[0].subs([(x, x_j), (y, y_j), (z, z_j)])
eq_2 = s_1[0].subs([(x, x_j), (y, y_j), (z, z_j)])

T_n = []
T_1 = solve(Eq(eq_1),0,T)
T_n.append(T_1)
T = symbols('T')
T_2 = solve(Eq(eq_2),0,T)
T_n.append(T_2)

for valor in range(10, 31):
    conjunto = []
    texto = []
    rayos = []
    a = float(valor)/10

```

```

ray = 0
ray_reflected = 0
ray_absorted = 0
count = 0
desp = math.sqrt(R**2-a**2)
while count < 10000:
    state = True
    rho_i = a*math.sqrt(random.uniform(0, 1))
    phi_i = 2*np.pi*random.uniform(0, 1)
    x_i = rho_i*math.cos(phi_i)
    y_i = rho_i*math.sin(phi_i)
    z_i = 0
    norm = normal_0.subs([(x, x_i), (y, y_i), (z, z_i), (h, desp)])
    l, m, n = emission(norm, i_u)
    while state == True:
        point_intersection()
        absortion()
    count += 1
    print(count, ray, ray_absorted, ray_reflected)

emisivity_apparent = float(ray_absorted)/ray
reflectivity_apparent = float(ray_reflected)/ray
valores.append((emisivity_apparent, reflectivity_apparent, a/R))
print("emisivity apparent: ", emisivity_apparent, "reflectivity apparent: \
", reflectivity_apparent, "a: ", a)
arch_coord = 'coordenadas_de_esfera_' + str(a) + '.txt'

file_1 = open(arch_coord, 'w')
for item in range(len(conjunto)):
    for valor in conjunto[item]:
        file_1.write(str(valor[0]) + ' ' + str(valor[1]) + ' ' + \

```

```
        str(valor[2]) + ' ')
    file_1.write(texto[item] + ' ' + rayos[item] + '\n')
file_1.close()

arch_coord = 'valores_de_emisividades_esfera.txt'
file_2 = open(arch_coord, 'w')
for item in valores:
    file_2.write(str(item[0]) + ' ' + str(item[1]) + ' ' + str(item[2]) + ' ')
file_2.close()
```

A.2. Programa para observar la trayectoria de los rayos de energía en una cavidad esférica

```
import numpy as np
import os
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.patches import Circle, PathPatch
# register Axes3D class with matplotlib by importing Axes3D
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import mpl_toolkits.mplot3d.art3d as art3d
from matplotlib.text import TextPath
from matplotlib.transforms import Affine2D
from numpy import *
import math
import time

def magnitud(vector):
    return math.sqrt(vector[0]**2 + vector[1]**2 + vector[2]**2)

def generate(vector):
```

```
V1,V2,V3,V4,V5,V6 = vector[0][0], vector[0][1], vector[0][2], \
vector[1][0], vector[1][1], vector[1][2]
mag = magnitud((vector[2][0], vector[2][1], vector[2][2]))
return V1, V2, V3, V4, V5, V6, mag

plt.ion()

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

arch_coord = 'coordenadas_de_esfera_3.0.txt'

radio = float(arch_coord[22:25])

R = 5.0
h = R - math.sqrt(R**2 - radio**2)
x = np.linspace(-R, R, 100)
z = np.linspace(0, 2*R - h, 100)
Xc, Zc = np.meshgrid(x, z)
Yc = np.sqrt(-1.0*Xc**2 - 1.0*(Zc - R + h)**2 + R**2)

q = Circle((0, 0), radio, alpha = 0.2, color = "r")
ax.add_patch(q)
art3d.pathpatch_2d_to_3d(q, z=0, zdir="z")

ax.plot_surface(Xc, Yc, Zc, alpha = 0.2, rstride=8, cstride=8)
ax.plot_surface(Xc, -Yc, Zc, alpha = 0.2, rstride=8, cstride=8)
ax.set_xlabel('X')
ax.set_ylabel('Y')
ax.set_zlabel('Z')
ax.set_xlim([-8,8])
```

```
ax.set_ylim([-8,8])
ax.set_zlim([-1,10])

if os.path.isfile(arch_coord):
    file = open(arch_coord, 'r')
    conjunto = []
    texto = []
    rayos = []
    for line in file:
        valores = []
        a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k = line.split()
        valores.append([float(a), float(b), float(c)])
        valores.append([float(d), float(e), float(f)])
        valores.append([float(g), float(h), float(i)])
        conjunto.append(valores)
        texto.append(j)
        rayos.append(k)
    file.close()

wframe = None
tstart = time.time()
tipo_ref = ax.text(8,0,10, "", color = 'blue')
num_rayo = ax.text(-8,-8,10, "", color = 'red')

for ray in range(len(conjunto)):
    oldcol = wframe
    X,Y,Z,U,V,W, mag = generate(conjunto[ray])
    wframe = ax.quiver(X,Y,Z,U,V,W, alpha = 0.2, length = mag)
    tipo_ref.set_text('Tipo de interaccion: ' + texto[ray])
    num_rayo.set_text('Numero de rayo: ' + rayos[ray])
#    if oldcol is not None:
```

```
#         ax.collections.remove(oldcol)
        plt.pause(0.00002)

print ('FPS: %f' % (100 / (time.time() - tstart)))

plt.show()
```

A.3. Programa para el gráfico de la emisividad aparente de la apertura de una cavidad esférica

```
import os
import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

archivo = 'valores_de_emisividades_esfera.txt'

if os.path.isfile(archivo):
    f = open(archivo, 'r')
    e_val = []
    par_val = []
    for line in f:
        a, b, c = line.split()
        e_val.append(float(a))
        par_val.append(float(c))
    f.close()
print(e_val, par_val)

plt.plot(par_val, e_val, 'r--')
plt.axis([0, 0.51, 0.8, 1])
plt.title('Cavidad esferica')
```

```
plt.xlabel('Relacion a/D')  
plt.ylabel('emisividad aparente')  
plt.show()
```