UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE HONDURAS EN EL VALLE DE SULA
UNAH – VS

POLINOMIOS DE ZERNIKE. APLICACIONES EN ÓPTICA

TESIS PRESENTADA POR:

MARLON JOSUÉ RECARTE

ASESORES: Dra. TERESA E. PÉREZ
Dr. MIGUEL A. PIÑAR

EN OPCIÓN AL TITULO DE MÁSTER EN FÍSICA GENERAL

SAN PEDRO SULA, CORTES

Maestría en Física General

Polinomios de Zernike. Aplicaciones en Óptica

Autor: Marlon Josué Recarte Castellanos

Asesores: Dra. Teresa E. Pérez Fernández
Dr. Miguel A. Piñar Gonzalez

San Pedro Sula, Octubre 2015

AUTORIDADES DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONÓMA DE HONDURAS

La presente Memoria, titulada "Polinomios de Zernike. Aplicaciones en óptica", ha sido realizada por Marlon Josué Recarte Castellanos bajo la dirección de Teresa E. Pérez Fernández y Miguel A. Piñar González ambos Catedráticos del Departemento de Matemática Aplicada de la Universidad de Granada en España, para ser evaluada como Tesis de maestría del programa de Maestría en Física General, por la Universidad Nacional Autónoma de Honduras,

En San Pedro Sula, a siete de octubre del dos mil quince

V° B° El Tutor

Fdo: Teresa E. Pérez Fernández. Fdo: Miguel A. Piñar González.

V° B° El Autor

Fdo: Marlon Josué Recarte Castellanos.

A Ruth y a mis Padres.

Agradecimientos

Quiero agradecer a Teresa E. Pérez y a Miguel A. Piñar por todo su apoyo, motivación, dedicación y paciencia; sus esfuerzos, indicaciones y correcciones han sido imprescindibles en el desarrollo este trabajo.

A los Catedráticos de la Maestría en Física, Armando Euceda, José Jorge Escobar y Alejandro Galo Roldán, que compartieron sus conocimientos con todos nosotros.

A Brenda Hulse por la confianza que depositó en mi.

Gracias a todos

Índice

Índice de figuras

Índice de cuadros

Introducción

Antecedentes

Cualquier aparato que se utilice para la visión necesita estar bien calibrado, ya sean lentes o el telescopio más complejo. Para ello es necesario un buen enfoque de las lentes que utilice el aparato en cuestión, ya que esto nos permitirá tener una visión óptima en el caso de las lentes o de poder ver más lejos en el caso del telescopio.

Desde hace tiempo se han utilizado medidas diferentes para el calibrado de las lentes o para tratar problemas de visión. Se han propuesto funciones Gaussianas, análisis de componentes de Fourier y esféricos armónicos. Sin embargo, muchos de estos métodos tienen el problema de que los polinomios usados no se adaptan demasiado bien al medio en el que se trabajan, o nos sirven solo para detectar aberraciones de orden bajo, lo que nos hacer perder precisión.

A partir de año 2000, los polinomios de Zernike se adoptan como el estándar en óptica oftalmológica. Estos polinomios se usan hoy en día en los aberrómetros, que son los aparatos que miden la aberración del frente de onda ocular o, en otras palabras, se encargan de detectar los problemas de visión que tenemos. Los polinomios de Zernike bivariados son un conjunto de polinomios que deben su nombre al físico holandés Frits Zernike, ganador del premio Nobel el Física en 1953 y el inventor del microscopio de contraste de fases.

Estos polinomios se llevan utilizando en Óptica desde hace muchos años debido a algunas de sus propiedades como, por ejemplo, la ortogonalidad en la bola unidad o la simetría con respecto a rotaciones, lo que hace que tengan características que se adaptan a la forma de una córnea o de una lente, es por ello por lo que se utilizan hoy en día en Óptica.

Estructura

En el primer capítulo introducimos las nociones básicas de polinomios ortogonales en variables variables y se presenta el problema de ordenación de estos polinomios. Se calcula el volumen y área superficial de la bola unidad, la demostración hecha para dichos resultados es de mi autoría.

En el segundo capítulo estudiamos los esféricos armónicos, que son los polinomios que constituyen la parte angular de los polinomios de Zernike. Se presenta la versión completa para el operador de Laplace - Beltrani y una base para el espacio de polinomios armónicos, mostrando para dicha base los casos partículares de 2 y 3 variables.

En el tercer capítulo estudiamos los polinomios sobre la bola B^d, ya que desde el punto de vista matemático los polinomios de Zernike son un caso particular de estos polinomios. Se verá como construir una base de polinomios sobre la bola, lo que después nos servirá para tomar una base de polinomios de Zernike.

En el capítulo cuatro, se inicia el estudio de los polinomios de Zernike, estudiando su ortogonalidad y cada una de las tres partes de las que se componen: parte angular, parte radial y constante de normalización. Una vez estudiadas sus propiedades, empezaremos a hacer distinciones que serán más ópticas que matemáticas, ya que los separaremos en polinomios de orden bajo y polinomios de orden alto. Matemáticamente, esta separación no tiene mucho sentido, ya que ambos conjuntos de polinomios tienen las mismas características. Sin embargo, en óptica tiene mucho sentido, ya que los polinomios de orden bajo representan enfermedades oculares bastante comunes, mientras que los polinomios de orden alto expresan enfermedades un poco más raras. Ilustraremos este capítulo con unos gráficos realizados con el paquete tikz de LaTeX. Además se estudia la ortogonalidad discreta que verifican los polinomios de Zernike que fue descubierta en 2005.

En el último capítulo hablaremos sobre las aplicaciones de los polinomios de Zernike a la Óptica y Oftalmología. Para ello introducimos los conceptos de frente de onda y los tipos de frente de onda que existen. El concepto de frente de onda es esencial para después dar una definición de lo que es un ojo aberrado. Finalmente veremos como se toman las medidas en un ojo, de tal manera que obtendremos un conjunto discreto de puntos para poder expresar la aberración del frente de onda mediante una expresión explícita en términos de polinomios de Zernike.

Fuentes consultadas

La teoría de polinomios ortogonales en una variable es ampliamente tradada en los libros de T. Chihara ([7]), G. Szegö ([22]), R. Askey ([3]) mientras que para el caso multivariable el texto principal utilizado es el de C. Dunkl y Y. Xu ([9]) también fue consultado el artículo de L. Fernandez, Teresa Pérez y Miguel Piñar ([12]).

Para la parte sobre los esféricos armónicos fueron consultados los libros de K. Atkinson ([4]), R. Askey ([3]), F. Dai y Y. Xu ([8]), E. Grosswald ([10]), C. Muller ([17]) y G. Arfken ([2]).

Para la parte de polinomios de Zernike, ha sido de utilidad la tesis doctoral de D. Ramos ([20]), así como algunas conferencias de D. Malacara ([15]) y el libro Principles of Optics de M. Born y E. Wolf ([6]) además de otros artículos que se citarán a lo largo del texto.

Objetivos

Esta investigación pretende ser meramente descriptiva y es de gran importancia, ya que dentro del país no existe ningún tipo de investigación relacionado con funciones especiales y polinomios ortogonales con aplicaciones en Física.

Los objetivos de este trabajo son los siguientes

- Estudiar las propiedades de los esféricos armónicos.
- Estudiar las propiedades de los polinomios de Zernike.
- Explicar la aplicación de los polinomios de Zernike en el estudio de problemas de Oftalmología.

1. Preliminares

1.1. Polinomios en varias variables

Denotamos con $\mathbb{N}_0$ el conjunto de los enteros no negativos. Un multi–índice es usualmente denotado por:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d.$$

Se define $\quad \alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_d! \quad$ y $\quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d$.

Para $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ y $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$, un monomio en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_d$ es un producto:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d},$$

donde $|\alpha|$ es el grado total de x.

Un polinomio P en d variables es una combinación lineal de monomios

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} c_\alpha x^\alpha,$$

donde los coeficientes $c_\alpha \in \mathbb{R}$. El grado del polinomio está definido como el grado total más grande entre sus monomios.

Denotamos con Π^d a la colección de todos los polinomios en d variables con coeficientes números reales. Además denotamos con Π_n^d a los polinomios con grado total menor o igual a n.

Un polinomio es llamado homogéneo si todos los monomios que aparecen en él tienen el mismo grado n. Denotamos el espacio de polinomios homogéneos en d variables con $\mathcal{P}_n^d$; esto es:

$$\mathcal{P}_n^d = \left\{ P : P(x) = \sum_{|\alpha| = n} c_\alpha x^\alpha \right\}.$$

Denotamos r_n^d la dimensión de $\mathcal{P}_n^d$, la cual es:

$$r_n^d = \binom{n+d-1}{n}.$$

Además:

$$\dim \Pi_n^d = \binom{n+d}{n}.$$

Una diferencia esencial entre los polinomios en una variable y los polinomios en varias variables es la falta de un orden natural en los de varias variables como lo tienen los de una variable, que es según el grado. Por ello, los polinomios en varias variables se pueden ordenar de varias formas. Dos de estas formas de ordenación son:

Orden lexicográfico. Decimos que $\alpha \succ_L \beta$ si la primera entrada no nula en la diferencia $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_d - \beta_d)$ es positiva.

Nótese que el orden lexicográfico no respeta el grado total del polinomio.

Orden lexicográfico graduado. Decimos que $\alpha \succ_{glex} \beta$ si $|\alpha| > |\beta|$ o si $|\alpha| = |\beta|$ y la primera entrada no cero en la diferencia $\alpha - \beta$ es positiva.

1.2. Polinomios ortogonales

Sea $\langle\cdot|\cdot\rangle$ un producto escalar definido en Π^d, esto es

$$\begin{aligned}\langle\cdot|\cdot\rangle \quad : \quad & \Pi^d \times \Pi^d \to \mathbb{R} \\ & (P,Q) \mapsto \langle P|Q\rangle\end{aligned}$$

verificando las siguientes propiedades

- **Simetría**: $\langle P|Q\rangle = \langle Q|P\rangle\,,\quad \forall P,Q \in \Pi^d$.
- **Linealidad**: $\langle \alpha P + \beta Q|R\rangle \;=\; \alpha\,\langle P|R\rangle + \beta\,\langle Q|R\rangle \qquad \forall \alpha,\beta \;\in\; \mathbb{R}$ y $R \in \Pi^d$.
- **Positividad**: $\langle P|P\rangle \geq 0 \;\; \forall P \in \Pi^d$.
- $\langle P|P\rangle = 0 \Leftrightarrow P = 0$.

Definición 1.2.1 *Dos polinomios $P,Q \in \Pi^d$ son llamados mutuamente ortogonales con respecto al producto escalar si:*

$$\langle P|Q\rangle = 0.$$

Definición 1.2.2 *Un polinomio P es llamado polinomio ortogonal si es ortogonal a todos los polinomios Q de grado inferior a él, esto es:*

$$\langle P|Q\rangle = 0, \quad \forall Q \in \Pi^d, \quad \textit{con} \;\; \text{grado}(Q) < \text{grado}(P).$$

Si el producto escalar está dado en términos de una función peso W (o una medida $d\mu(x)$):

$$\langle P|Q\rangle = \int_\Omega P(x)Q(x)W(x)dx,$$

donde Ω es un dominio no vacio de $\mathbb{R}^d$, decimos que los polinomios son ortogonales con respecto a la función peso W.

Denotamos con $\mathcal{V}_n^d$ al espacio de polinomios ortogonales con grado exactamente n, esto es:

$$\mathcal{V}_n^d = \left\{ P \in \Pi_n^d : \langle P|Q\rangle = 0, \;\; \forall Q \in \Pi_{n-1}^d \right\}.$$

La dimensión $\mathcal{V}_n^d$ es la misma dimensión de de $\mathcal{P}_n^d$, denotada por r_n^d.

Denotamos con P_α, $|\alpha| = n$ los elementos de una base ortogonal de $\mathcal{V}_n^d$, también se usa la notación P_α^n donde el superíndice indica el grado total del polinomio.

Otra diferencia esencial entre los polinomios ortogonales en una variable y los de varias variables es que las bases de $\mathcal{V}_n^d$ no son únicas para $d \geq 2$.

Una base P_α se dice ortonormal si:

$$\langle P_\alpha | Q \rangle = 0, \text{ grado}(Q) \leq |\alpha| = n \text{ y } \langle P_\alpha | P_\alpha \rangle = 1.$$

Un ejemplo de base ortogonal es la base monomial de Appell

$$Q_\alpha(x) = x^\alpha + R_\alpha(x), \ |\alpha| = n, \ R_\alpha(x) \in \Pi_{n-1}^d.$$

La dimensión de $\mathcal{V}_n^d$ es la misma de $\mathcal{P}_n^d$. Puesto que una base de $\mathcal{V}_n^d$ no necesariamente es ortogonal, algunas veces es de ayuda encontrar una base biortogonal, esto es, encontrar otra base P_β de $\mathcal{V}_n^d$ tal que $\langle Q_\alpha | P_\beta \rangle = 0$ cuando $\alpha \neq \beta$.

1.3. Esfera y bola unidad

Denotemos B^d la bola unitaria en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^d$;

$$B^d = \left\{ x = (x_1, x_2 \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq 1 \right\},$$

donde $\| \cdot \|$ denota la norma usual euclídea $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$ y el producto escalar euclídeo definido por

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i, \quad \text{además } x \cdot x = \|x\|^2.$$

Denotamos S^{d-1} la esfera unidad,

$$S^{d-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1 \right\}.$$

1.3.1. Área superficial y volumen de la bola unidad

En la literatura existen diversas pruebas para el cálculo del volumen y la medida superficial de la bola unidad (llamada algunas veces la d–esfera). El artículo clásico de Blumenson ([5]) presenta las coordenadas esféricas n-dimensionales o coordenadas polares generalizadas (que trataremos luego) incluyendo además una deducción de la medida superficial y el volumen a partir de un cambio de variable en dichas coordenadas. Muller ([17]) presenta una prueba del mismo resultado a partir de relaciones de recurrencia.

Consideremos la integral sobre la bola unidad, dicha integral representa el volumen de la d–esfera:

$$V_d = \int_{B^d} dV = \int_{B^d} \prod_{j=1}^{d} dx_j.$$

Asociado con $x = (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ para cada j, definimos $x_{(j)}$, el truncamiento de x, esto es :

$$x_{(0)} = 0, \;\; x_{(j)} = (x_1, x_2, \cdots, x_j) \text{ para } 1 \leq j \leq d.$$

Nótese que $x_{(d)} = x$.

Necesitamos hacer uso de la siguiente fórmula:

$$\int_{B^d} f(x)dx = \int_{B^d} f(x_{(d-1)}, x_d)dx.$$

Si hacemos el cambio de variable $x_d = y_d\sqrt{1 - \|x_{(d-1)}\|^2}$ entonces:

$$\int_{B^d} f(x)dx =$$
$$\int_{B^{d-1}} \int_{-1}^{1} f(x_{(d-1)}, y_d\sqrt{1 - \|x_{(d-1)}\|^2})dy_d\sqrt{1 - \|x_{(d-1)}\|^2}dx_{(d-1)}.$$

Definimos $x_i = y_i\sqrt{1 - \|x_{(i-1)}\|^2}$, se verifica que:

$$\begin{aligned}
\left(1 - \|x_{(0)}\|^2\right) &= 1. \\
\left(1 - \|x_{(1)}\|^2\right) &= \left(1 - x_1^2\right) = \left(1 - y_1^2\right). \\
\left(1 - \|x_{(2)}\|^2\right) &= \left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) = \left(1 - y_1^2 - y_2^2(1 - y_1^2)\right) = (1 - y_1^2)(1 - y_2^2). \\
\left(1 - \|x_{(3)}\|^2\right) &= \left(1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right) = (1 - y_1^2)(1 - y_2^2)(1 - y_3^2).
\end{aligned}$$

Supongamos que es válido para $i = d-1$

$$\left(1-\|x_{(d-1)}\|^2\right) = \prod_{i=1}^{d-1}(1-y_i^2) = \left[(1-y_{d-1}^2)\left(1-\|x_{(d-2)}\|^2\right)\right],$$

ahora probémoslo para $i = d$:

$$\left(1-\|x_{(d)}\|^2\right) = (1-y_d^2)\left(1-\|x_{(d-1)}\|^2\right) = (1-y_d^2)\prod_{i=1}^{d-1}(1-y_i^2) = \prod_{i=1}^{d}(1-y_i^2).$$

Notemos que:

$$\prod_{j=1}^{d}\left(1-\|x_{(j-1)}\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \prod_{j=1}^{d}(1-y_j^2)^{\frac{d-j}{2}}.$$

Retomando la integral inicial, tendremos

$$V_d = \int_{B^d}\prod_{j=1}^{d}dx_j = \int_{-1}^{1}\prod_{j=1}^{d}(1-y_j^2)^{\frac{d-j}{2}}dy_j = \prod_{j=1}^{d}\int_{-1}^{1}(1-y_j^2)^{\frac{d-j}{2}}dy_j.$$

Al realizar el cambio de variable, $2t = 1-y_j$

$$\begin{aligned}V_d &= \prod_{j=1}^{d}\int_{-1}^{1}(1-y_j^2)^{\frac{d-j}{2}}dy_j = \prod_{j=1}^{d}\int_{0}^{1}2^{d-j+1}\,t^{\frac{d-j}{2}}(1-t)^{\frac{d-j}{2}}dt\\ &= \prod_{j=1}^{d}2^{d-j+1}\prod_{j=1}^{d}\int_{0}^{1}t^{\frac{d-j}{2}}(1-t)^{\frac{d-j}{2}}dt = \prod_{j=1}^{d}2^{d-j+1}\prod_{j=1}^{d}\mathcal{B}\left(\tfrac{d-j}{2}+1,\tfrac{d-j}{2}+1\right)\end{aligned}$$

La expresión anterior queda en términos de la función Beta, $\mathcal{B}(a,b)$. [1]

Calcularemos cada producto por separado:

$$\prod_{j=1}^{d}2^{d-j+1} = \prod_{k=0}^{d-1}2^{k+1},$$

$$\prod_{j=1}^{d}\mathcal{B}\left(\tfrac{d-j}{2}+1,\tfrac{d-j}{2}+1\right) = \prod_{k=0}^{d-1}\mathcal{B}\left(\tfrac{k}{2}+1,\tfrac{k}{2}+1\right).$$

[1] ver apéndice A.1

Usando la relación entre las funciones beta $\mathcal{B}(a,b)$ y gamma $\Gamma(a)$. [2]

$$\Gamma(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

deducimos que

$$\prod_{k=0}^{d-1} \mathcal{B}\left(\tfrac{k}{2}+1, \tfrac{k}{2}+1\right) = \prod_{k=0}^{d-1} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}{\Gamma(k+2)} = \prod_{k=2}^{d+1} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma(k)}.$$

Al usar la fórmula de duplicación de la función gamma

$$\Gamma\left(\tfrac{k}{2}\right)\Gamma\left(\tfrac{k}{2}+\tfrac{1}{2}\right) = 2^{1-k}\sqrt{\pi}\,\Gamma(k),$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{d-1} \mathcal{B}\left(\tfrac{k}{2}+1, \tfrac{k}{2}+1\right) = \prod_{k=2}^{d+1} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma(k)} &= \prod_{k=2}^{d+1} \frac{2^{1-k}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)},\\
&= \prod_{k=2}^{d+1} 2^{1-k} \prod_{k=2}^{d+1} \sqrt{\pi} \prod_{k=2}^{d+1} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)},\\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)} \prod_{k=2}^{d+1} 2^{1-k} \prod_{k=2}^{d+1} \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Es fácil comprobar que

$$\prod_{k=2}^{d+1} 2^{1-k} \prod_{k=0}^{d-1} 2^{k+1} = 1.$$

Por lo anterior podemos concluir finalmente

$$V_d = \int_{B^d} \prod_{j=1}^{d} dx_j = \prod_{j=1}^{d} \int_{-1}^{1} (1-y_j^2)^{\frac{d-j}{2}}\, dy_j = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)}. \tag{1}$$

En la figura (1) observamos el gráfico del volumen de la bola unidad para diferentes dimensiones; notemos que el volumen máximo se obtiene para $d = 6$.

[2] ver apéndice A.1

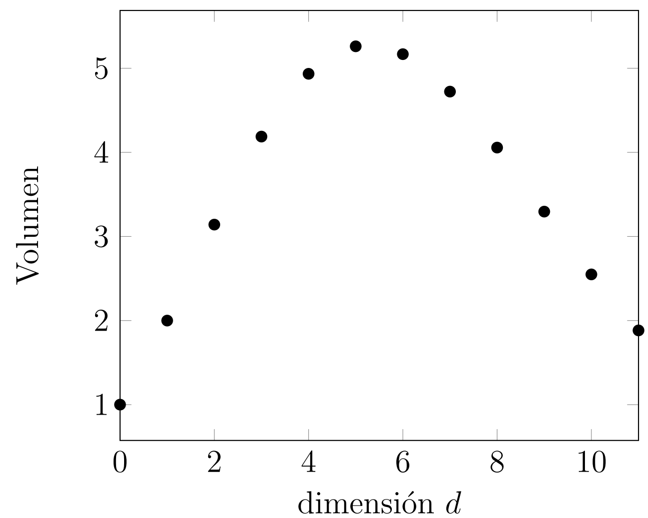


Figura 1: Gráfico del volumen.

Ahora calcularemos la medida superficial de la bola unidad, σ_d.

$$\sigma_d = 2\int_{B^{d-1}} \sqrt{1+\sum_{i=1}^{d-1}\left(\frac{dx_n}{dx_i}\right)^2}\prod_{j=1}^{d-1} dx_j.$$

Para calcular la integral anterior basta con notar que

$$\sqrt{1+\sum_{i=1}^{d-1}\left(\frac{dx_n}{dx_i}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\|x_{(d-1)}\|^2}} = \prod_{i=1}^{d-1}(1-y_i^2)^{-1/2},$$

debido a esto se tiene

$$\sigma_d = 2\int_{-1}^{1}\prod_{i=1}^{d-1}(1-y_i^2)^{-\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{d-1}(1-y_j^2)^{\frac{d-1-j}{2}}dy_j = 2\prod_{j=1}^{d-1}\int_{-1}^{1}(1-y_j^2)^{\frac{d-j-2}{2}}dy_j.$$

La integral anterior es similar a la desarrollada en el cálculo del volumen V_d, entonces si $z = y_{d-1}$

$$\sigma_d = 2\prod_{j=1}^{d-1}\int_{-1}^{1}(1-y_j^2)^{\frac{d-j-2}{2}}dy_j = 2\int_{-1}^{1}(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}dz\ \prod_{j=1}^{d-2}\int_{-1}^{1}(1-y_j^2)^{\frac{d-2-j}{2}}dy_j.$$

Al usar (1) se obtiene

$$\sigma_d = 2\pi \frac{\pi^{\frac{d-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}. \tag{2}$$

El gráfico del área superficial se muestra en la figura (2).

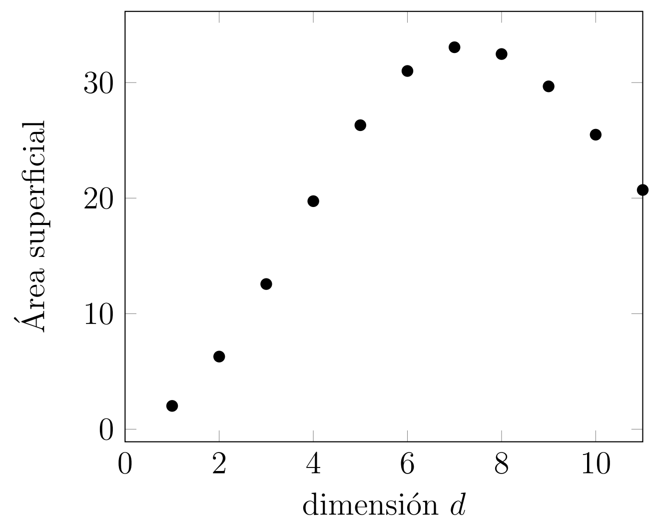


Figura 2: Gráfico del área superficial.

1.4. Coordenadas esféricas generalizadas

Sea $x = r\xi, \quad \xi \in S^{d-1}$. Se definen las coordenadas esféricas generalizadas:

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos(\theta_{d-1}), \\ x_2 &= r\sin(\theta_{d-1})\cos(\theta_{d-2}), \\ &\vdots \\ x_{d-1} &= r\sin(\theta_{d-1})\ldots\sin(\theta_2)\cos(\theta_1), \\ x_d &= r\sin(\theta_{d-1})\ldots\sin(\theta_2)\sin(\theta_1), \end{aligned}$$

con $r > 0, \quad 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta_i \leq \pi$ para $2 \leq i \leq d-2$.

El Jacobiano de esta transformación es

$$J = r^{d-1} \prod_{j=1}^{d-2} (\sin \theta_{d-j})^{d-j-1} .$$

Nótese que

$$V_d = \int_{B^d} r^{d-1} dr d\omega,$$

donde

$$d\omega = \prod_{j=1}^{d-2} (\sin \theta_{d-j})^{d-j-1} \, d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_{d-1}. \tag{3}$$

ademas

$$\sigma_d = \int_{S^{d-1}} d\omega.$$

Las definiciones para las coordenadas esféricas generalizadas también se pueden expresar como:

$$x_j \quad = \quad \sqrt{r^2 - \|x_{(j-1)}\|^2} \cos(\theta_{d-j}) \quad \text{para } j = 1, \ldots, d-1. \tag{4}$$

Para $r = 1$, las coordenadas esféricas generalizas son de hecho definidas de forma recursiva por

$$x = (\cos(\theta_{d-1}), \xi \sin(\theta_{d-1})) \in S^{d-1}, \quad \xi \in S^{d-2}.$$

2. Esféricos Armónicos

El análisis de Fourier de las funciones continuas en la esfera unidad S^{d-1} es desarrollado por medio de los esféricos armónicos, los cuales son funciones armónicas homogéneas restringidas a la esfera.

Definición 2.0.1 *Para* $n = 0, 1, 2, \ldots,$ *sea* $\mathcal{H}_n^d$ *el espacio lineal de polinomios armónicos, homogéneos de grado n, sobre* $\mathbb{R}^d$*, es decir*

$$\mathcal{H}_n^d = \left\{ P \in \mathcal{P}_n^d : \Delta P = 0 \right\},$$

donde Δ *es el operador laplaciano,* $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_d^2}$.

Un ejemplo en cada espacio

$$\begin{array}{lll} \mathcal{H}_2^2 & \Rightarrow & \left\{x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2\right\} \\ \mathcal{H}_2^3 & \Rightarrow & \left\{x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 - 2x_3^2\right\} \\ \mathcal{H}_3^2 & \Rightarrow & \left\{x_1^3 - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 + x_2^3\right\} \end{array}$$

La dimensión de $\mathcal{H}_n^d$ denotada a_n^d es igual a

$$a_n^d = \dim \mathcal{H}_n^d = \dim \mathcal{P}_n^d - \dim \mathcal{P}_{n-2}^d = \binom{n+d-1}{d-1} - \binom{n+d-3}{d-1}.$$

Ahora introduciremos los esféricos armónicos. Notemos que si $Y \in \mathcal{H}_n^d$ entonces $Y(x) = Y(r\xi) = r^n Y(\xi)$; la función $Y(\xi)$ es llamada esférico armónico de grado n en d dimensiones.

En las coordenadas esféricas generalizadas, las dependencias radial y angular de las funciones $Y(x)$ pueden separarse. Es una consecuencia del teorema de Green que los polinomios armónicos homogéneos de diferentes grados son ortogonales con respecto a la medida superficial $d\omega$ en (3):

$$\sigma_d = \int_{S^{d-1}} d\omega.$$

En lo siguiente $\dfrac{\partial}{\partial n}$ denota la derivada normal.

Proposicion 2.0.1 *Supóngase que f y g son polinomios sobre $\mathbb{R}^d$, entonces*

$$\int_{S^{d-1}} \left(\frac{\partial f}{\partial n} g - \frac{\partial g}{\partial n} f \right) d\omega = \int_{B^d} (g\Delta f - f\Delta g)\, dx,$$

y si f y g son homogéneos entonces

$$(\deg f - \deg g) \int_{S^{d-1}} fg d\omega = \int_{B^d} (g\Delta f - f\Delta g)\, dx.$$

<u>Prueba</u> La primera afirmación es consecuencia del teorema de Green respecto a B^d. La derivada normal sobre la esfera es $\frac{\partial f}{\partial n} = \sum_{i=1}^{d} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = (\deg f) f$ con lo que se prueba la segunda afirmación.

□

Particularmente si f y g son esféricos armónicos de diferente grado entonces son ortogonales respecto a la medida $d\omega$, por lo que podemos definir el producto escalar:

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{\sigma_d} \int_{S^{d-1}} f(\xi) g(\xi) d\omega,$$

donde se tiene la normalización $\langle 1|1\rangle = 1$.

Denotaremos por $\left\{ Y_\beta^n \right\}$ una base ortogonal del espacio de esféricos armónicos de grado n y $\left\{ \mathcal{S}_\beta^n \right\}$ una base ortonormal de dicho espacio.

2.1. Propiedades de los esféricos armónicos

Proposicion 2.1.1 *Sea* ∇ *el operador gradiente*

$$\nabla f = (\partial_1 f, \partial_2 f, \cdots \partial_d f)^T,$$

donde denotamos $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, d$. *En las coordenadas esféricas generalizadas* $x = r\xi$, $\xi \in S^{d-1}$, *los operadores diferenciales* ∇ *y* Δ *se pueden expresar como sigue*

$$\nabla = \frac{1}{r}\nabla_0 + \xi\frac{\partial}{\partial r}, \tag{5}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_0, \tag{6}$$

donde ∇_0 *y* Δ_0 *son la parte esférica del gradiente y laplaciano respectivamente.*

Prueba: Puesto que $\xi \in S^{d-1}$, se tiene que $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_d^2 = 1$. Se calculará el Laplaciano Δ bajo el cambio de variable $(x_1, \cdots, x_d) \mapsto (r, \xi_1, \cdots, \xi_{d-1})$, donde $x = r\xi$, verificando

$$\xi_1 = \frac{x_1}{\|x\|},\ \xi_2 = \frac{x_2}{\|x\|}, \cdots,\ \xi_{d-1} = \frac{x_{d-1}}{\|x\|},\quad r = \|x\|,\quad \text{para } x \neq 0.$$

Al usar la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial r} + \sum_{j=1}^{d-1}\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \xi_j}, \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq d.$$

Nótese que

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x_i x_j}{r^3} = \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{\xi_i \xi_j}{r},$$

donde δ_{ij} representa la función delta de Kronecker.

De lo anterior

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} &= \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial r} + \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \xi_j} \\
&= \frac{x_i}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \xi_i} - \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\xi_i \xi_j}{r}\frac{\partial}{\partial \xi_j} \\
&= \xi_i \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \xi_i} - \frac{\xi_i}{r}\sum_{j=1}^{d-1} \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} \\
&= \xi_i \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i} - \xi_i \sum_{j=1}^{d-1} \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) \\
&= \xi_i \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i} - \xi_i \left(\xi \cdot \nabla^{(\xi)}\right)\right)
\end{aligned}
$$

donde para $i = d$ se define $\dfrac{\partial}{\partial \xi_d} = 0$ y además $\nabla^{(\xi)}$ denota al gradiente con respecto a $(\xi_1, \cdots, \xi_d)$:

$$
\nabla^{(\xi)} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_{d-1}}, 0\right)^T.
$$

Podemos expresar el gradiente de la siguiente forma:

$$
\nabla = \frac{1}{r}\left(\nabla^{(\xi)} - \xi\left(\xi \cdot \nabla^{(\xi)}\right)\right) + \xi \frac{\partial}{\partial r}.
$$

De la expresión anterior puede verse que: $\nabla_0 = \nabla^{(\xi)} - \xi\left(\xi \cdot \nabla^{(\xi)}\right)$. Ahora, para obtener la expresión de Δ debemos calcular lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), \\
&= \left(\xi_i \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i} - \xi_i \sum_{j=1}^{d-1} \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)\right)\left(\xi_i \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i} - \xi_i \sum_{j=1}^{d-1} \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Al aplicar la regla de la cadena para la derivada parcial, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right) &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2}.\\
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(-\frac{\xi_i}{r}\sum_{j=1}^{d-1}\xi_j\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) &= -\frac{1}{r^2}\left(\left(\xi\cdot\nabla^{(\xi)}\right)+\xi_i\frac{\partial}{\partial \xi_i}+\xi_i\left(\xi\cdot\nabla^{(\xi)}\right)\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right).\\
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\xi_i\frac{\partial}{\partial r}\right) &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\xi_i}{r}\frac{\partial}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial r}.\\
\xi_i\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right) &= -\frac{\xi_i}{r^2}\frac{\partial}{\partial \xi_i}+\frac{\xi_i}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \xi_i}.\\
\xi_i\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\xi_i}{r}\sum_{j=1}^{d-1}\xi_j\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) &= \frac{\xi_i^2}{r^2}\left(\xi\cdot\nabla^{(\xi)}\right)-\frac{\xi_i^2}{r}\left(\xi\cdot\nabla^{(\xi)}\right)\frac{\partial}{\partial r}.\\
\xi_i\frac{\partial}{\partial r}\left(\xi_i\frac{\partial}{\partial r}\right) &= \xi_i^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}.\\
-\frac{\xi_i}{r}\sum_{j=1}^{d-1}\xi_j\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right) &= -\frac{\xi_i}{r^2}\left(\xi\cdot\nabla^{(\xi)}\right)\frac{\partial}{\partial \xi_i}.\\
\frac{\xi_i}{r}\sum_{j=1}^{d-1}\xi_j\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\frac{\xi_i}{r}\sum_{k=1}^{d-1}\xi_k\frac{\partial}{\partial \xi_k}\right) &= \frac{\xi_i^2}{r^2}\left(\xi\cdot\nabla^{(\xi)}\right)+\frac{\xi_i^2}{r^2}\left(\xi\cdot\nabla^{(\xi)}\right)^2.\\
-\frac{\xi_i}{r}\sum_{j=1}^{d-1}\xi_j\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\xi_i\frac{\partial}{\partial r}\right) &= -\frac{\xi_i^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\xi_i^2}{r}\left(\xi\cdot\nabla^{(\xi)}\right)\frac{\partial}{\partial r}.
\end{aligned}
$$

Al combinar los resultados anteriores obtenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} &= \xi_i^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1-\xi_i^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2}-(1-\xi_i^2)\left(\xi\cdot\nabla^{(\xi)}\right)-2\xi_i\left(\xi\cdot\nabla^{(\xi)}\right)\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right]\\
&+\left(2\xi_i\frac{\partial}{\partial \xi_i}-\xi_i^2\left(\xi\cdot\nabla^{(\xi)}\right)\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{\xi_i^2}{r^2}\left(\xi\cdot\nabla^{(\xi)}\right)^2-\frac{\xi_i^2}{r}\left(\xi\cdot\nabla^{(\xi)}\right)\frac{\partial}{\partial r}.
\end{aligned}
$$

Calculando la sumatoria para $1 \leq i \leq d$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[\Delta^{(\xi)} - (d-1)\left(\xi \cdot \nabla^{(\xi)}\right) - 2\sum_{i=1}^{d} \xi_i \left(\xi \cdot \nabla^{(\xi)}\right)\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right] \\ &- \frac{1}{r^2}\left(\xi \cdot \nabla^{(\xi)}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\xi \cdot \nabla^{(\xi)}\right)^2,\end{aligned}$$

donde $\Delta^{(\xi)}$ denota al laplaciano con respecto a $(\xi_1, \cdots, \xi_{d-1})$:

$$\Delta^{(\xi)} = \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2}.$$

Es fácil comprobar que:

$$\left(\xi \cdot \nabla^{(\xi)}\right)^2 = \left(\xi \cdot \nabla^{(\xi)}\right) + \sum_{i=1}^{d-1} \xi_i \left(\xi \cdot \nabla^{(\xi)}\right)\frac{\partial}{\partial \xi_i}.$$

Usando el resultado anterior podemos expresar el laplaciano como sigue

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_0,$$

donde $\Delta_0 = \Delta^{(\xi)} - (d-1)\left(\xi \cdot \nabla^{(\xi)}\right) - \sum_{i=1}^{d} \xi_i \left(\xi \cdot \nabla^{(\xi)}\right)\frac{\partial}{\partial \xi_i}$ se conoce como operador de Laplace – Beltrami.

□

El operador de Laplace–Beltrami en las coordenadas esféricas generalizadas puede expresarse como sigue:

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \frac{1}{\sin^{d-2}(\theta_{d-1})}\frac{\partial}{\partial \theta_{d-1}}\left[\sin^{d-2}(\theta_{d-1})\frac{\partial}{\partial \theta_{d-1}}\right] \\ &+ \sum_{j=1}^{d-2} \frac{1}{\sin^2(\theta_{d-1})\cdots\sin^2(\theta_{j+1})\sin^{j-1}(\theta_j)}\frac{\partial}{\partial \theta_j}\left[\sin^{j-1}(\theta_j)\frac{\partial}{\partial \theta_j}\right].\end{aligned}$$

Proposicion 2.1.2 *El operador de Laplace – Beltrami satisface*

$$\Delta_0 = \nabla_0 \cdot \nabla_0.$$

Prueba: Al usar (5) tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta &= \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{1}{r}\nabla_0 + \xi\frac{\partial}{\partial r}\right) \cdot \left(\frac{1}{r}\nabla_0 + \xi\frac{\partial}{\partial r}\right), \\
&= \frac{1}{r^2}\nabla_0 \cdot \nabla_0 + \frac{1}{r}\nabla_0 \cdot \left(\xi\frac{\partial}{\partial r}\right) + \xi\frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(\frac{1}{r}\nabla_0\right) + \xi^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}, \\
&= \frac{1}{r^2}\nabla_0 \cdot \nabla_0 + \frac{d-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\xi \cdot \nabla_0 - \frac{1}{r^2}\xi \cdot \nabla_0 + \frac{1}{r}\xi \cdot \nabla_0\frac{\partial}{\partial r} + \xi^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}.
\end{aligned}$$

Nótese que: $\xi \cdot \nabla_0 = \xi \cdot \left[\nabla^{(\xi)} - \xi\left(\xi_i \cdot \nabla^{(\xi)}\right)\right] = \left(\xi \cdot \nabla^{(\xi)}\right) - \xi^2\left(\xi \cdot \nabla^{(\xi)}\right) = 0,$ por lo que

$$\Delta = \xi^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\nabla_0 \cdot \nabla_0.$$

Al comparar con (6) se obtiene que: $\Delta_0 = \nabla_0 \cdot \nabla_0$.

□

Proposicion 2.1.3 *Los esféricos armónicos son las autofunciones del operador de Laplace – Beltrami* Δ_0.

Prueba: Sea $x = r\xi$, $\xi \in S^{d-1}$; consideremos $Y \in \mathcal{H}_n^d$, al ser homogéneo verifica $Y(x) = r^n Y(\xi)$ y al ser armónico verifica que $\Delta Y = 0$.

De (6) tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta Y(x) &= \frac{\partial^2(Y(x))}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r}\frac{\partial(Y(x))}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_0 Y(x), \\
0 &= \frac{\partial^2(r^n Y(\xi))}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r}\frac{\partial(r^n Y(\xi))}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_0(r^n Y(\xi)), \\
0 &= n(n-1)r^{n-2}Y(\xi) + (d-1)nr^{n-1}Y(\xi) + r^{n-2}\Delta_0 Y(\xi), \\
0 &= n(n+d-2)r^{n-2}Y(\xi) + r^{n-2}\Delta_0 Y(\xi),
\end{aligned}$$

por lo que

$$\Delta_0 Y(\xi) = -n(n+d-2)Y(\xi).$$

$\square$

Proposicion 2.1.4 *Para $d > 2$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, se define*

$$Y_\alpha(x) = [h_\alpha]^{-1} r^{|\alpha|} g_\alpha(\theta_1) \prod_{j=1}^{d-2} (\sin(\theta_{d-j}))^{|\alpha^{j+1}|} C_{\alpha_j}^{\lambda_j}(\cos(\theta_{d-j})), \tag{7}$$

donde $g_\alpha(\theta_1) = \cos(\alpha_{d-1}\theta_1)$ *para* $\alpha_d = 0$, $\sin((\alpha_{d-1}+1)\theta_1)$ *para* $\alpha_d = 1$, $|a^j| = \alpha_j + \cdots + \alpha_d$, $\lambda_j = |\alpha^{j+1}| + (d-j-1)/2$ *y*

$$[h_\alpha]^2 := b_\alpha \prod_{j=1}^{d-2} \frac{\alpha_j! \left(\frac{d-j+1}{2}\right)_{|\alpha^{j+1}|} (\alpha_j + \lambda_j)}{(2\lambda_j)_{\alpha_j} \left(\frac{d-j}{2}\right)_{|\alpha^{j+1}|} \lambda_j},$$

donde $b_\alpha = 2$ *si* $\alpha_{d-1} + \alpha_d > 0$ *y* $b_\alpha = 1$ *en otro caso. Entonces* $\{Y_\alpha : \ |\alpha| = n, \ \alpha_d = 0, 1\}$ *es una base ortonormal de* $\mathcal{H}_n^d$.[3]

Prueba: Para mostrar que Y_α es un polinomio homogéneo recurrimos a (4):

$$x_j = \sqrt{r^2 - \|x_{(j-1)}\|^2} \cos(\theta_{d-j}) \quad \text{para } j = 1, \ldots, d-1.$$

De lo anterior

$$\sqrt{r^2 - \|x_{(j)}\|^2} = \sqrt{r^2 - \|x_{(j-1)}\|^2} \sin(\theta_{d-j}) \quad \text{para } j = 1, \ldots, d-1.$$

Nótese que

$$\prod_{j=1}^{d-2} (\sin(\theta_{d-j}))^{|\alpha^{j+1}|} = r^{-|\alpha|} \rho^{(\alpha_{d-1}+\alpha_d)} \prod_{j=1}^{d-2} \left(r^2 - \|x_{(j-1)}\|^2\right)^{\frac{\alpha_j}{2}},$$

donde $\rho = (x_{d-1}^2 + x_d^2)^{1/2}$.

Al rescribir (7) tenemos:

$$Y_\alpha(x) = [h_\alpha]^{-1} g(x) \prod_{j=1}^{d-2} \left(r^2 - \|x_{(j-1)}\|^2\right)^{\frac{\alpha_j}{2}} C_{\alpha_j}^{\lambda_j} \left(\frac{x_j}{\sqrt{r^2 - \|x_{(j-1)}\|^2}} \right), \tag{8}$$

[3] En la expresión para h_α se emplea el símbolo de Pochhammer $(\cdot)_n$, ver apéndice A.2. $C_m^\lambda(x)$ denota los polinomios ortogonales de Gegenbauer

donde $g(x) = \rho^{\alpha_{d-1}} \cos(\alpha_{d-1}\theta_1)$ para $\alpha_d = 0, \sin((\alpha_{d-1}+1)\theta_1)$ para $\alpha_d = 1$.

Notemos que $g(x)$ es un polinomio homogéneo de grado α_{d-1} en x puesto que se define como la parte real y imaginaria de $(x_{d-1} + ix_d)^{\alpha_{d-1}+\alpha_d}$ ya que $x_{d-1} = \rho\cos(\theta_1)$ y $x_d = \rho\sin(\theta_1)$. Por otro lado al calcular

$$\begin{aligned}
\langle Y_\alpha | Y_\beta \rangle &= \frac{[h_\alpha]^{-1}[h_\beta]^{-1}}{\sigma_d} \int_{S^{d-1}} \left[g_\alpha(\theta_1) \prod_{j=1}^{d-2} (\sin(\theta_{d-j}))^{\left|\alpha^{j+1}\right|} C_{\alpha_j}^{\lambda_j}(\cos(\theta_{d-j})) \right. \\
&\quad \left. \times\ g_\beta(\theta_1) \prod_{j=1}^{d-2} (\sin(\theta_{d-j}))^{\left|\beta^{j+1}\right|} C_{\beta_j}^{\lambda_j}(\cos(\theta_{d-j})) \right] d\omega, \\
&= \frac{[h_\alpha]^{-1}[h_\beta]^{-1}}{\sigma_d} \int_{S^{d-1}} g_\alpha(\theta_1) g_\beta(\theta_1) \\
&\times \prod_{j=1}^{d-2} (\sin(\theta_{d-j}))^{\left|\alpha^{j+1}\right|} (\sin(\theta_{d-j}))^{\left|\beta^{j+1}\right|} C_{\alpha_j}^{\lambda_j}(\cos(\theta_{d-j})) C_{\beta_j}^{\lambda_j}(\cos(\theta_{d-j})) d\omega.
\end{aligned}$$

Al cambiar a las coordenadas esféricas generalizadas,

$$\begin{aligned}
\langle Y_\alpha | Y_\beta \rangle &= \frac{[h_\alpha]^{-1}[h_\beta]^{-1}}{\sigma_d} \int_0^{2\pi} g_\alpha(\theta_1) g_\beta(\theta_1) d\theta_1 \\
&\quad \times \prod_{j=1}^{d-2} \int_0^\pi C_{\alpha_j}^{\lambda_j}(\cos(\theta_{d-j})) C_{\beta_j}^{\lambda_j}(\cos(\theta_{d-j})) \left(\sin(\theta_{d-j})\right)^{2\lambda_j} d\theta_{d-j}.
\end{aligned}$$

Al considerar la ortogonalidad de los polinomios de Gegenbauer (ver [22] pag 81) :

$$\int_0^\pi C_n^\lambda(\cos(\theta)) C_m^\lambda(\cos(\theta)) \left(\sin(\theta)\right)^{k-2} d\theta = \frac{\sqrt{\pi}\ \ \Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{\lambda}{n+\lambda} \frac{(2\lambda)_n}{n!} \delta_{n,m},$$

con $\lambda = \frac{k-2}{2}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\langle Y_\alpha | Y_\beta \rangle &= \frac{[h_\alpha]^{-2}}{\sigma_d} \int_0^{2\pi} g_\alpha(\theta_1) g_\beta(\theta_1) d\theta_1 \\
&\times \prod_{j=1}^{d-2} \frac{\sqrt{\pi}\ \ \Gamma\left(|\alpha^{j+1}| + \frac{d-j}{2}\right)}{\Gamma\left(|\alpha^{j+1}| + \frac{d-j+1}{2}\right)} \cdot \frac{|\alpha^{j+1}| + \frac{d-j-1}{2}}{\alpha_j + |\alpha^{j+1}| + \frac{d-j-1}{2}} \cdot \frac{(2\lambda_j)_{\alpha_j}}{\alpha_j!} \delta_{\alpha,\beta}
\end{aligned}$$

Al emplear propiedades de los polinomios de Gegenbauer se obtiene el resultado deseado para $[h_\alpha]$.

$\square$

2.1.1. Esféricos armónicos en 2 variables

Para $d = 2$, $\dim \mathcal{H}_n^2 = 2$. Una base ortogonal de $\mathcal{H}_n^2$ está dada por las partes real e imaginaria de $(x_1 + ix_2)^n$, puesto que ambas partes son polinomios homogéneos de grado n y también son armónicos al ser la parte real e imaginaria de una función analítica.

En coordenadas polares $(x_1, x_2) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2$, la base antes mencionada viene dada por

$$Y_n^{(1)}(x) = r^n \cos(n\theta), \quad Y_n^{(2)}(x) = r^n \sin(n\theta), \quad n \geq 0. \tag{9}$$

Si restringimos al círculo S^1, los esféricos armónicos son precisamente las funciones seno y coseno. En particular las expansiones sobre S^1 son los desarrollos clásicos de series de Fourier en senos y cosenos. Como polinomios homogéneos, la base (9) puede darse explícitamente en términos de los Polinomios de Chebyshev T_n y U_n definidos por:

$$T_n(t) = \cos(n\theta) \quad \text{y} \quad U_n(t) = \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin(\theta)} \quad \text{donde} \ \ t = \cos(\theta),$$

que están relacionados con los polinomios de Gegenbauer:

$$U_n(t) = C_n^1(t) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\lambda} C_n^\lambda(x) = \frac{2}{n} T_n(x).$$

La base (9) puede escribirse como

$$Y_n^{(1)}(x) = r^n T_n\left(\frac{x_1}{r}\right), \quad Y_n^{(2)}(x) = r^{n-1} x_2 U_{n-1}\left(\frac{x_1}{r}\right),$$

lo anterior muestra explicitamente que estos son polinomios homogéneos, puesto que $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ y ambos $T_n(t)$ y $U_n(t)$ son pares si n es par e impares si n es impar.

Para $d = 2$ tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} = -\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{d}{d\theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \xi_2} = \frac{1}{\cos(\theta)}\frac{d}{d\theta}.$$

además

$$\begin{aligned}
\nabla &= \frac{1}{r}\left(\nabla^{(\xi)} - \xi\left(\xi \cdot \nabla^{(\xi)}\right)\right) + \xi\frac{\partial}{\partial r} \\
&= \frac{1}{r}\left(-\sin(\theta), \cos(\theta)\right)^T \frac{d}{d\theta} + \left(\cos(\theta), \sin(\theta)\right)^T \frac{d}{dr} \\
&= \hat{r}\frac{d}{dr} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{d}{d\theta},
\end{aligned}$$

donde $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ denotan los versores[4] en coordenadas polares. De la expresión anterior también notamos que $\nabla_0 = \hat{\theta}\dfrac{d}{d\theta}$.

La expresión (6) en coordenadas polares se convierte en

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2}\left(\Delta^{(\xi)} - \left(\xi \cdot \nabla^{(\xi)}\right) - \sum_{i=1}^{2} \xi_i \left(\xi \cdot \nabla^{(\xi)}\right)\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right).$$

Se verifica que:

$$\begin{aligned}
\Delta^{(\xi)} &= \frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{d^2}{d\theta^2} - \frac{\cos(\theta)}{\sin^3(\theta)}\frac{d}{d\theta}, \\
\left(\xi \cdot \nabla^{(\xi)}\right) &= \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}, \\
\sum_{i=1}^{2} \xi_i \left(\xi \cdot \nabla^{(\xi)}\right)\frac{\partial}{\partial \xi_i} &= -\frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)}\frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{\cos^3(\theta)}{\sin^3(\theta)}\frac{d}{d\theta}.
\end{aligned}$$

Al juntar todo lo anterior se obtiene

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2};$$

por tanto, el operador de Laplace-Beltrami sobre S^1 es $\Delta_0 = \dfrac{d^2}{d\theta^2}$.

[4]Un versor es un vector de magnitud uno

2.1.2. Esféricos armónicos en 3 variables

El espacio $\mathcal{H}_n^3$ de esféricos armónicos de grado n tiene dimensión $2n+1$. Para $d = 3$ las coordenadas esféricas son:

$$\begin{aligned} x_1 &= r\sin(\theta)\cos(\phi), \\ x_2 &= r\sin(\theta)\sin(\phi), \\ x_3 &= r\cos(\theta), \end{aligned}$$

con $0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad r > 0.$

Para $n \geq 0$ la base ortogonal (7) en coordenadas esféricas se convierte en

$$Y_{k,1}^n(\theta,\phi) = (\sin(\theta))^k C_{n-k}^{k+\frac{1}{2}}(\cos(\theta))\cos(k\theta), \quad 0 \leq k \leq n,$$
$$Y_{k,2}^n(\theta,\phi) = (\sin(\theta))^k C_{n-k}^{k+\frac{1}{2}}(\cos(\theta))\sin(k\theta), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Esta base es a menudo escrita en términos de los polinomios asociados de Legendre $P_n^k(t)$ definidos mediante:

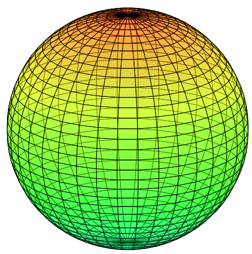
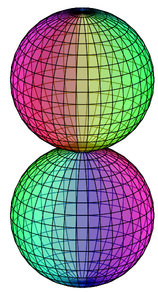
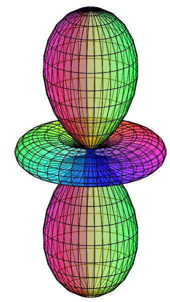
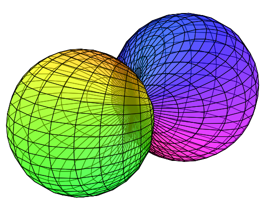
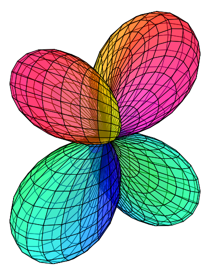
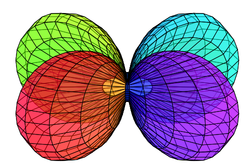
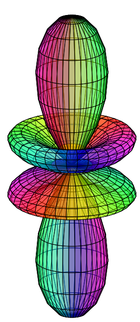
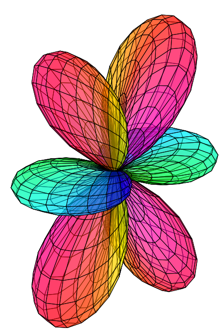
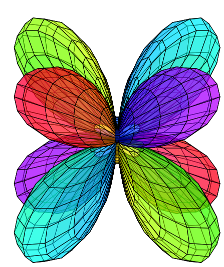
$$P_n^k(x) = (-1)^n(1-x^2)^{k/2}\frac{d^k}{dx^k}P_n(x) = (2k-1)!!(-1)^n(1-x^2)^{k/2}C_{n-k}^{k+1/2}(x), \text{ [5]}$$

donde $P_n(t) = C_n^0(t)$ denota los polinomios ortogonales de Legendre de grado n. Por lo que la base puede expresarse como

$$Y_{k,n}(\theta,\phi) = \left(\frac{(2n+1)(n-k)!}{(n+k)!}\right)^{1/2} P_n^k(\cos(\theta))e^{ik\phi}, \quad -n \leq k \leq n.$$

En el cuadro 1 se muestran algunos esféricos armónicos en tres dimensiones.

[5] El doble factorial es definido por $(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$

 $Y_{0,0} = 1$	 $Y_{0,1} = \sqrt{3}\cos(\theta)$	 $Y_{0,2} = \sqrt{5}\,(1.5\cos^2(\theta) - 0.5)$
 $\mathrm{Re}(Y_{1,1}) = \sqrt{1.5}\cos(\phi)\sin(\theta)$	 $\mathrm{Re}(Y_{1,2}) = \sqrt{7.5}\cos(\phi)\cos(\theta)\sin(\theta)$	 $\mathrm{Re}(Y_{2,2}) = \sqrt{\frac{15}{8}}\cos(2\phi)\sin^2(\theta)$
 $(Y_{0,3}) = \sqrt{\frac{7}{4}}\,(5\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta))$	 $\mathrm{Re}(Y_{1,3}) = \sqrt{\frac{21}{16}}\sin(\theta)\,(5\cos^2(\theta) - 1)\cos(\phi)$	 $\mathrm{Re}(Y_{2,3}) = \sqrt{\frac{105}{16}}\sin^2(\theta)\cos(\theta)\cos(2\phi)$

Cuadro 1: Algunos esféricos armónicos[*]

Los gráficos fueron realizados utilizando el paquete tikz de LaTeX

En coordenadas esféricas el operador de Laplace–Beltrami viene dado por

$$\Delta_0 = \frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

Los esféricos armónicos son importantes en muchas aplicaciones teóricas y prácticas, en particular en la física atómica (dado que la función de onda de los electrones contienen esféricos armónicos) y en la teoría del potencial que resulta relevante tanto para el campo gravitatorio como para la electrostática. Una fuente de confusión con la definición de los esféricos armónicos es el factor de fase de $(-1)^n$, comúnmente identificado como la fase de Condon–Shortley en la literatura relacionada con mecánica cuántica. En el área de mecánica cuántica, es práctica usual incluir este factor de fase en la definición de las funciones asociadas de Legendre, o acoplarlo a la definición de las funciones armónicas esféricas. No existe ningún requerimiento que obligue a utilizar la fase de Condon–Shortley en la definición de las funciones esféricas armónicas, pero si es que se la incluye entonces algunas operaciones en el campo de la mecánica cuántica son más simples. Por el contrario en los campos de geodesia y magnetismo nunca se incluye el factor de fase de Condon-Shortley en la definición de los esféricos armónicos.

3. Polinomios ortogonales clásicos en B^d

Los polinomios ortogonales clásicos en B^d están definidos con respecto a la función peso:

$$W_\mu(x) = (1 - \|x\|^2)^{\mu - 1/2}\,,\ \mu > -\tfrac{1}{2},\ x \in B^d,$$

con el producto escalar

$$\langle f|g\rangle = \omega_\mu^B \int_{B^d} f(x)g(x)\left(1 - \|x\|^2\right)^{\mu-1/2} dx.$$

En la expresión anterior ω_μ^B es una constante de normalización tal que $\langle 1|1\rangle = 1$, de esto:

$$1 = \omega_\mu^B \int_{B^d} \left(1 - \|x\|^2\right)^{\mu-1/2} dx,$$

despejando obtenemos el valor de ω_μ^B:

$$\omega_\mu^B = \left(\int_{B^d} \left(1 - \|x\|^2\right)^{\mu-1/2} dx\right)^{-1} = \frac{\Gamma\left(\mu + \frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma(\mu + \frac{1}{2})\pi^{d/2}}. \tag{10}$$

Para probar (1), haremos un cambio de variables, usando las coordenadas esféricas generalizadas (ver [9] pág. 34–37 y [5]).

Sea $x = r\xi,\ \xi \in S^{d-1}$. Entonces:

$$\int_{B^d} \left(1 - \|x\|^2\right)^{\mu-1/2} dx = \int_0^1 (1 - r^2)^{\mu-1/2} dr \int_{S^{d-1}} r^{d-1} dw,$$

donde $r^{d-1}drdw$ es el determinante del Jacobiano de la transformación. De este modo:

$$\int_{B^d} \left(1 - \|x\|^2\right)^{\mu-1/2} dx = \sigma_d \int_0^1 r^{d-1}(1 - r^2)^{\mu-1/2} dr,$$

donde $\sigma_d = \displaystyle\int_{S^{d-1}} d\omega$ es la medida superficial de una d-esfera dada en (2).

Si usamos el valor de σ_d y algunas propiedades de la función beta ($\mathcal{B}(a,b)$) [6] obtenemos:

$$\int_{B^d} \left(1-\|x\|^2\right)^{\mu-1/2} dx = \frac{1}{2}\mathcal{B}\left(\frac{d}{2},\mu+\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma(\mu+\frac{1}{2})\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{d+1}{2}\right)}.$$

Simplificando

$$\int_{B^d} \left(1-\|x\|^2\right)^{\mu-1/2} dx = \frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\mu+\frac{d+1}{2}\right)}.$$

Por lo que:

$$\omega_\mu^B = \frac{\Gamma\left(\mu+\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})\pi^{d/2}}.$$

□

3.1. Base ortonormal

Esta base esta dada en términos de coordenadas polares y esféricos armónicos (ver [9] pág. 34-37). Para $0 \le 2j \le n$, denotamos $\left\{\mathcal{S}_\beta^{n-2j}\right\}$ una base ortonormal de esféricos armónicos de grado $n-2j$; $p_j^{(a,b)}(t)$ denota a los polinomios ortonormales de Jacobi en una variable (ver [22] pág. 58–72).

Proposicion 3.1.1 *Los polinomios*

$$P_{j,\beta}^n\left(W_\mu;x\right) = \left[h_{j,\beta}^B\right]^{-1} p_j^{\left(\mu-\frac{1}{2},n-2j+\frac{d-2}{2}\right)}\left(2\|x\|^2-1\right)\mathcal{S}_\beta^{n-2j}(x)$$

forman una base ortonormal de $\mathcal{V}_n^d$, donde la constante está dada por:

$$\left[h_{j,\beta}^B\right]^2 = \frac{\Gamma\left(\mu+\frac{d+1}{2}\right)\Gamma\left(n-2j+\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(n-2j+\mu+\frac{d+1}{2}\right)}.$$

[6] ver apéndice A.1

Prueba: Notemos que

$$\begin{aligned}\left\langle P^n_{j,\beta}|P^m_{l,\gamma}\right\rangle &= \omega^B_\mu \int_{B^d} P^n_{j,\beta}\left(W_\mu;x\right) P^n_{l,\gamma}\left(W_\mu;x\right) W_\mu(x)dx \\ &= \omega^B_\mu \left[h^B_{j,\beta}\right]^{-1} \left[h^B_{l,\gamma}\right]^{-1} \int_{B^d} p_j^{\left(\mu-\frac{1}{2},n-2j+\frac{d-2}{2}\right)} \left(2\|x\|^2-1\right) \\ &\quad \times p_l^{\left(\mu-\frac{1}{2},m-2l+\frac{d-2}{2}\right)} \left(2\|x\|^2-1\right) \mathcal{S}^{n-2j}_\beta(x)\mathcal{S}^{m-2l}_\gamma(x) W^B_\mu(x)dx.\end{aligned}$$

Cambiando a coordenadas esféricas generalizadas, sea $x = rx'$, $x' \in S^{d-1}$, entonces:

$$\begin{aligned}\left\langle P^n_{j,\beta}|P^m_{l,\gamma}\right\rangle &= a\int_0^1 \int_{S^{d-1}} p_j^{\left(\mu-\frac{1}{2},n-2j+\frac{d-2}{2}\right)} \left(2r^2-1\right) p_l^{\left(\mu-\frac{1}{2},m-2l+\frac{d-2}{2}\right)} \left(2r^2-1\right) \\ &\quad \times \mathcal{S}^{n-2j}_\beta(rx')\mathcal{S}^{m-2l}_\gamma(rx') \left(1-r^2\right)^{\mu-1/2} r^{d-1} dr dw,\end{aligned}$$

donde $a = \omega^B_\mu \left[h^B_{j,\beta}\right]^{-1} \left[h^B_{l,\gamma}\right]^{-1}$.

$\mathcal{S}^{n-2j}_\beta(x)$ es un polinomio homogéneo de grado $n-2j$, es decir, verifica:

$$\mathcal{S}^{n-2j}_\beta(\kappa x) = \kappa^{n-2j}\mathcal{S}^{n-2j}_\beta(x) \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}.$$

De lo anterior obtenemos:

$$\begin{aligned}\left\langle P^n_{j,\beta}|P^m_{l,\gamma}\right\rangle &= a\int_{S^{d-1}} \mathcal{S}^{n-2j}_\beta(x')\mathcal{S}^{m-2l}_\gamma(x')dw \int_0^1 \Big\{ p_j^{\left(\mu-\frac{1}{2},n-2j+\frac{d-2}{2}\right)} \left(2r^2-1\right) \\ &\quad \times p_l^{\left(\mu-\frac{1}{2},m-2l+\frac{d-2}{2}\right)} \left(2r^2-1\right) r^{d-1} r^{n-2j} r^{m-2l} \left(1-r^2\right)^{\mu-1/2} \Big\} dr.\end{aligned}$$

Si hacemos el cambio de variable $t = 2r^2-1$,

$$\begin{aligned}&\left\langle P^n_{j,\beta}|P^m_{l,\gamma}\right\rangle \\ &= a\int_{S^{d-1}} \mathcal{S}^{n-2j}_\beta(x')\mathcal{S}^{m-2l}_\gamma(x')dw \int_{-1}^1 \Big\{ p_j^{\left(\mu-\frac{1}{2},n-2j+\frac{d-2}{2}\right)}(t)\, p_l^{\left(\mu-\frac{1}{2},m-2l+\frac{d-2}{2}\right)}(t) \\ &\quad \times 2^{-((d-2+n-2j+m-2l)/2+\mu+3/2)} \left(t+1\right)^{(d-2+n-2j+m-2l)/2} \left(1-t\right)^{\mu-1/2} \Big\} dt.\end{aligned}$$

Usando las ortonormalidades de $\mathcal{S}_\beta^{n-2j}$ y $p_j^{(a,b)}$

$$\begin{aligned}
\frac{\left\langle P_{j,\beta}^n | P_{l,\gamma}^m \right\rangle}{\omega_\mu^B \left[h_{j,\beta}^B\right]^{-2}} &= \frac{\displaystyle\int_{S^{d-1}} dw \int_{-1}^1 (t+1)^{(d-2+2n-4j)/2} (1-t)^{\mu-1/2}\, dt\ \delta_{n,m}\delta_{j,l}\delta_{\beta,\gamma}}{2^{((d-2+2n-4j)/2+\mu+3/2)}} \\
&= \frac{2\pi^{d/2} \displaystyle\int_{-1}^1 (t+1)^{\left(n-2j+\frac{d-2}{2}\right)} (1-t)^{\mu-1/2}\, dt\ \delta_{n,m}\delta_{j,l}\delta_{\beta,\gamma}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) 2^{\left(n-2j+\mu+\frac{d+1}{2}\right)}}.
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $2t^* = t+1$,

$$\frac{\left\langle P_{j,\beta}^n | P_{l,\gamma}^m \right\rangle}{\omega_\mu^B \left[h_{j,\beta}^B\right]^{-2}} = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \int_0^1 t^{\left(n-2j+\frac{d-2}{2}\right)} (1-t)^{\mu-1/2}\, dt\ \delta_{n,m}\delta_{j,l}\delta_{\beta,\gamma}.$$

Si expresamos la integral en términos de la función Beta,

$$\left\langle P_{j,\beta}^n | P_{l,\gamma}^m \right\rangle = \omega_\mu^B \left[h_{j,\beta}^B\right]^{-2} \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \mathcal{B}\left(n-2j+\tfrac{d}{2}, \mu+1/2\right) \delta_{n,m}\delta_{j,l}\delta_{\beta,\gamma}.$$

Al pasar la función Beta a funciones Gammas,

$$\left\langle P_{j,\beta}^n | P_{l,\gamma}^m \right\rangle = \omega_\mu^B \left[h_{j,\beta}^B\right]^{-2} \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(n-2j+\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-2j+\frac{d}{2}+\mu+\frac{1}{2}\right)} \delta_{n,m}\delta_{j,l}\delta_{\beta,\gamma}.$$

Usando (1):

$$\begin{aligned}
\left\langle P_{j,\beta}^n | P_{l,\gamma}^m \right\rangle &= \frac{\Gamma\left(\mu+\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})\pi^{d/2}} \left[h_{j,\beta}^B\right]^{-2} \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(n-2j+\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-2j+\mu+\frac{d+1}{2}\right)} \delta_{n,m}\delta_{j,l}\delta_{\beta,\gamma} \\
&= \left[h_{j,\beta}^B\right]^{-2} \frac{\Gamma\left(\mu+\frac{d+1}{2}\right)\Gamma\left(n-2j+\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(n-2j+\mu+\frac{d+1}{2}\right)} \delta_{n,m}\delta_{j,l}\delta_{\beta,\gamma},
\end{aligned}$$

vemos que $\left\langle P_{j,\beta}^n | P_{l,\gamma}^m \right\rangle = \delta_{n,m}\delta_{j,l}\delta_{\beta,\gamma}$, si la constante toma el valor:

$$\left[h_{j,\beta}^B\right]^2 = \frac{\Gamma\left(\mu+\frac{d+1}{2}\right)\Gamma\left(n-2j+\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(n-2j+\mu+\frac{d+1}{2}\right)}.$$

$\square$

4. Polinomios de Zernike

Los polinomios de Zernike son un conjunto de polinomios ortogonales sobre el disco unidad en dimensión 2, $B^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$. Su nombre se debe al físico holandés Frits Zernike (1888–1966) ganador del premio Nobel de Física en 1953 por la invención del microscopio de contraste de fase. Dichos polinomios han sido usados en óptica, aberraciones del ojo humano, modelado superficial de córnea ([6],[20]). Durante las últimas décadas, este conjunto de polinomios se ha convertido en una herramienta universal para cada problema en óptica y oftalmología.

Este conjunto de polinomios aparecen de forma natural a partir de la siguientes condiciones :

1. Son polinomios en coordenadas cartesianas.
2. Forman un conjunto ortogonal sobre el disco unidad B^2.
3. En coordenadas polares cada polinomio, Z, puede expresarse como separación de variables $Z(r, \theta) = R(r)a(\theta)$.
4. La parte angular $a(\theta)$ debe ser continua y $2\pi-$periódica y también satisface que $a(\theta + \alpha) = a(\theta)a(\alpha)$.
5. La parte radial $R(r)$ es un polinomio en r.

Con estas condiciones pueden definirse varios conjuntos de polinomios. Una elección natural puede ser $a(\theta) = e^{im\theta} = \cos(m\theta) + i\,\mathrm{sen}(m\theta)$, $m \in \mathbb{Z}$. Si la parte angular a se toma que sea ortogonal en $[0, 2\pi]$, entonces es suficiente que $R(r)$ sean ortogonales en $[0, 1]$ para obtener la ortognalidad en las dos dimensiones.

4.1. Propiedades de los polinomios de Zernike

Los polinomios de Zernike se definen en términos de un doble índice (n, m) (siendo $n \geq 0$, $|m| \leq n$, y $n - m$ un número par) de la siguiente manera :

Definición 4.1.1 *Los polinomios de Zernike con doble indice son definidos como*

$$Z_n^m(\rho,\theta) = \begin{cases} N_n^m R_n^{|m|}(\rho)\cos(m\theta), & m \geq 0 \\ N_n^m R_n^{|m|}(\rho)\sin(|m|\theta), & m < 0 \end{cases} , \tag{11}$$

donde $0 \leq \rho \leq 1$ *y* $0 \leq \theta \leq 2\pi$ *(sin dimensiones) son las coordenadas polares y el doble índice* (n, m) *con las restricciones:* $n \geq 0$, $|m| \leq n$ *y* $n - m$ *un número par.*

Los polinomios de Zernike son a veces definidos como polinomios complejos (ver [6]) de la siguiente forma

$$Z_n^m(\rho,\theta) = \sqrt{n+1}R_n^{|m|}(\rho)e^{im\theta}. \tag{12}$$

La definición de los polinomios de Zernike que se utilizará, a menos que se indique lo contrario, es la dada en (11).

La parte radial $R_n^{|m|}(\rho)$ es un polinomio de Jacobi reescalado [7]

$$R_n^{|m|}(\rho) = (-1)^{(n-m)/2}\rho^m P_{(n-m)/2}^{(m,0)}(1-2\rho^2),$$

Usando que $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(-x)$ (ver página 59 de [22]) podemos expresarlo como:

$$R_n^{|m|}(\rho) = \rho^m P_{(n-m)/2}^{(0,m)}(2\rho^2-1),$$

y son dados de forma explícita por la fórmula:

$$R_n^{|m|}(\rho) = \sum_{s=0}^{(n-|m|)/2} \frac{(-1)^2(n-s)!}{s!((n+|m|)/2-s)!s!((n-|m|)/2-s)!}\rho^{n-2s}. \tag{13}$$

[7] Ver apéndice A.5

La ortogonalidad de los polinomios radiales y las funciones angulares son:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 R_n^m(\rho) R_{n'}^m(\rho)\rho d\rho &= \frac{1}{2(n+1)}\delta_{n,n'}, \\
\int_0^{2\pi} \cos(m\theta)\cos(m'\theta)d\theta &= \pi(1+\delta_{m,0})\delta_{m,m'}, \\
\int_0^{2\pi} \cos(m\theta)\sin(m'\theta)d\theta &= 0, \\
\int_0^{2\pi} \sin(m\theta)\sin(m'\theta)d\theta &= \pi\delta_{m,m'} \ .
\end{aligned}$$

El término de normalización N_n^m es a veces tomado como 1 por simplicidad, dando así sólo ortogonalidad pero no ortonormalidad. Alternativamente, el valor de esta constante de normalización puede definirse como:

$$N_n^m = \sqrt{\frac{(2-\delta_{0,m})(n+1)}{\pi}} = \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi(1+\delta_{0,m})}},$$

garantizando la ortonormalidad.

Consideraremos la última opción, por lo que la ortonormalidad de los polinomios de Zernike sobre el disco unidad B^2 puede expresarse como:

$$\int\int_{B^2} Z_n^m(x_1,x_2)Z_r^s(x_1,x_2)W_\mu(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \delta_{n,r}\delta_{m,s}.$$

Al escribirlo en coordenados polares tenemos:

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} Z_n^m(\rho,\theta)Z_r^s(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta = \delta_{n,r}\delta_{m,s}$$

De las condiciones anteriores, resulta que los polinomios de Zernike son de hecho polinomios, una vez que se expresan en coordenadas cartesianas (x,y).

En la práctica, el uso de un doble índice es a veces engorroso, y existen al menos dos formas diferentes de convertir el doble de índice en un solo índice, conocidos como índice de Noll ([18]) e índice OSA (donde OSA significa Optical Society of America). En el sistema de Noll, polinomios con términos coseno y seno alternan, comenzando el índice en 1; mientras que en la numeración de la OSA, todos los polinomios con el mismo orden radial n son consecutivos y el índice comienza en 0.

En este trabajo, vamos a utilizar el índice doble (n, m) o el índice OSA j indistintamente. La conversión de un sistema a otro está dado por las expresiones

$$\begin{aligned} j &= \frac{n(n+2)+m}{2}, \\ n &= \left\lceil \frac{-3+\sqrt{9+8j}}{2} \right\rceil, \\ m &= 2j - n(n+2). \end{aligned}$$

Siendo $\lceil\cdot\rceil$ el operador *ceiling* que da el menor entero que es mayor o igual al argumento.

Para los polinomios de Zernike Z_n^m debe notarse lo siguiente:

1. El índice n es llamado el orden del polinomio radial, mientras que el índice m se conoce como la frecuencia angular o azimutal.
2. Dado un $n \geq 0$, el índice m va de $-n$ a n con un salto de 2, es decir: $m \in \{-n, -n+2, \ldots, n-2, n\}$.
3. Así, para cada $n \geq 0$, hay $n+1$ polinomios Z_n^m de orden radial n.
4. En consecuencia, a partir del orden radial 0 hasta n, hay un total de $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ polinomios de Zernike.
5. Los números afectados por el factorial en (13) son siempre números naturales debido a las restricciones del doble índice.
6. La parte radial $R_n^{|m|}(\rho)$ no depende del signo de m, es decir $R_n^{-m}(\rho) = R_n^m(\rho)$.
7. Los polinomios de Zernike, como polinomios en dos variables, pueden ser matemáticamente evaluados fuera del disco unidad B^2, pero son ortogonales sólo dentro del disco.

8. Poseen simetrías rotacionales. Aquellos con $m = 0$ son invariantes ante rotaciones de cualquier ángulo. Para $m \neq 0$, son invariante cuando se gira $2\pi/|m|$ radianes o cualquier múltiplo entero de esta cantidad.

9. La ortogonalidad de este conjunto de polinomios es continua, y en general, no es discreta.

10. El valor medio para los polinomios de Zernike está dado por

$$\langle Z_j(\rho,\theta)\rangle = \int\int_{B^2} Z_j(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta = \delta_{j,0},$$

lo anterior se deduce al partir del hecho que los polinomios de Zernike son ortogonales, además que $Z_0 = 1$.

11. El valor medio cuadrado de los polinomios de Zernike es:

$$\|Z_j\|^2 = \left\langle Z_j^2(\rho,\theta)\right\rangle = \int\int_{B^2} Z_j^2(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta = 1.$$

Al combinar los resultados anteriores, la varianza ($\sigma_{Z_j}^2$) de los polinomios de Zernique queda expresada (ver [14]) como sigue:

$$\sigma_{Z_j}^2 = \left\langle Z_j^2(\rho,\theta)\right\rangle - \langle Z_j(\rho,\theta)\rangle = 1 - \delta_{j,0}.$$

En el cuadro 2 mostramos las expresiones explícitas para los polinomios de Zernike hasta orden 5 y en las figuras (3) y (4) se muestran algunos de ellos.

j	n	m	Coordenadas Polares	Coordenadas Cartesianas	Nombre Común
0	0	0	1	1	Piston
1	1	-1	$2\rho\sin(\theta)$	$2y$	Vertical tilt
2	1	1	$2\rho\cos(\theta)$	$2x$	Horizontal tilt
3	2	-2	$\sqrt{6}\rho^2\sin(2\theta)$	$2\sqrt{6}xy$	Oblique astigmatism
4	2	0	$\sqrt{3}(2\rho^2-1)$	$\sqrt{3}(2x^2+2y^2-1)$	Defocus
5	2	2	$\sqrt{6}\rho^2\cos(2\theta)$	$\sqrt{6}(x^2-y^2)$	Astigmatism
6	3	-3	$\sqrt{8}\rho^3\sin(3\theta)$	$\sqrt{8}(3x^2y-y^3)$	Oblique trefoil
7	3	-1	$\sqrt{8}(3\rho^3-2\rho)\sin(\theta)$	$\sqrt{8}(3x^2y+3y^3-2y)$	Vertical Coma
8	3	1	$\sqrt{8}(3\rho^3-2\rho)\cos(\theta)$	$\sqrt{8}(3x^2y+3y^3-2x)$	Horizontal coma
9	3	3	$\sqrt{8}\rho^3\cos(3\theta)$	$\sqrt{8}(x^3-2xy^2)$	Horizontal trefoil
10	4	-4	$\sqrt{10}\rho^4\sin(4\theta)$	$\sqrt{10}(4x^3y-4xy^3)$	Tetrafoil y
11	4	-2	$\sqrt{10}(4\rho^4-3\rho^2)\sin(2\theta)$	$\sqrt{10}(8x^3y+8xy^3-6xy)$	Secondary Astigmatism y
12	4	0	$\sqrt{5}(6\rho^4-6\rho^2+1)$	$\sqrt{5}(6x^4+12x^2y^2+6y^4-6x^2-6y^2+1)$	Primary Spherical
13	4	2	$\sqrt{10}(4\rho^4-3\rho^2)\cos(2\theta)$	$\sqrt{10}(4x^4-4y^4-3x^2+3y^2)$	Secondary Astigmatism x
14	4	4	$\sqrt{10}\rho^4\cos(4\theta)$	$\sqrt{10}(x^4-6x^2y^2+y^4)$	Tetrafoil x
15	5	-5	$\sqrt{12}\rho^5\sin(5\theta)$	$\sqrt{12}(5x^4y-10x^2y^3+y^5)$	Pentafoil y
16	5	-3	$\sqrt{12}(5\rho^5-4\rho^3)\sin(3\theta)$	$\sqrt{12}(15x^4y+10x^2y^3-5y^5-12x^2y+4y^3)$	Secondary Trefoil y
17	5	-1	$\sqrt{12}(10\rho^5-12\rho^3+3\rho)\sin(\theta)$	$\sqrt{12}(10x^4y+20x^2y^3+10y^5-12x^2y-12y^3+3y)$	Secondary Coma y
18	5	1	$\sqrt{12}(10\rho^5-12\rho^3+3\rho)\cos(\theta)$	$\sqrt{12}(10x^5+20x^3y^2+10xy^4-12x^3-12xy^2+3x)$	Secondary Coma x
19	5	3	$\sqrt{12}(5\rho^5-4\rho^3)\cos(3\theta)$	$\sqrt{12}(5x^5-10x^3y^2-15xy^4-4x^3+12xy^2)$	Secondary Trefoil x
20	5	5	$\sqrt{12}\rho^5\cos(5\theta)$	$\sqrt{12}(x^5-10x^3y^2+5xy^4)$	Pentafoil x

Cuadro 2: Polinomios de Zernike, con $N_n^m = \sqrt{(2-\delta_{0,m})(n+1)}$

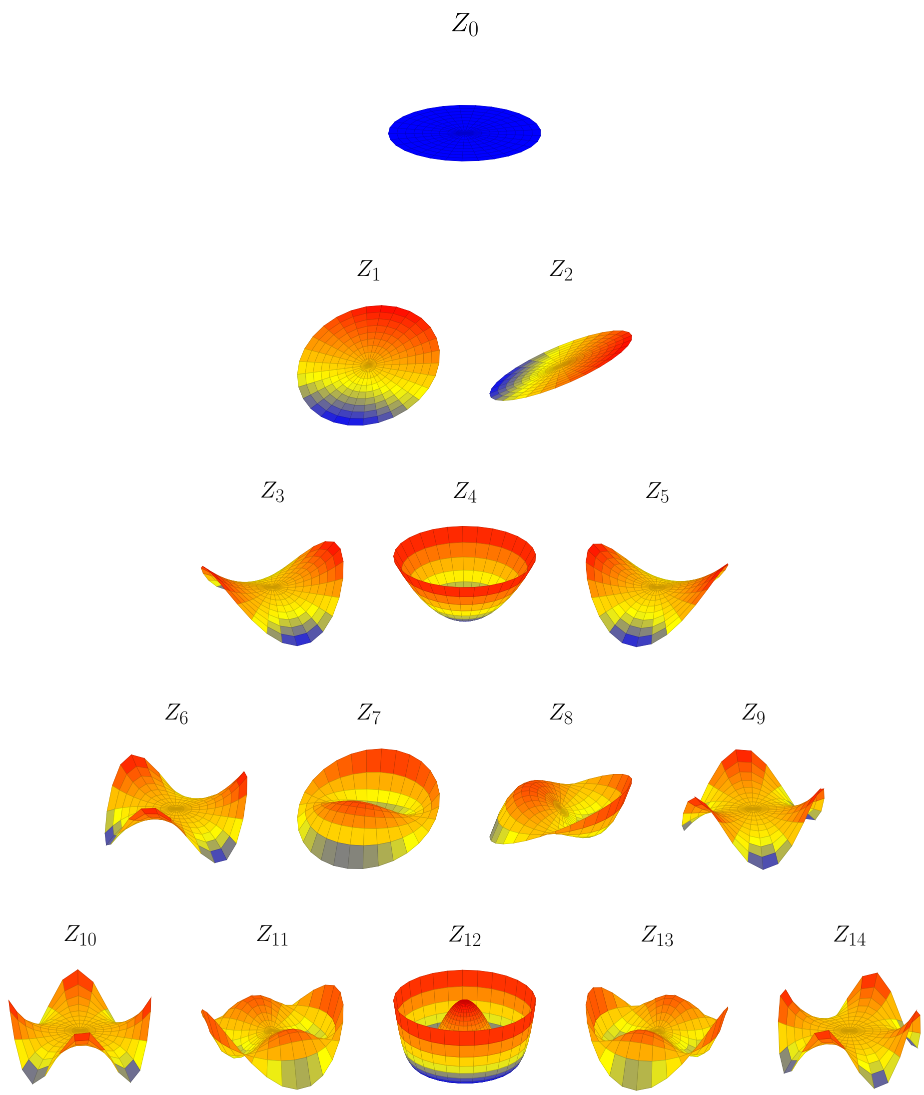


Figura 3: Algunos polinomios de Zernike

Los gráficos fueron realizados utilizando el paquete tikz de LaTeX

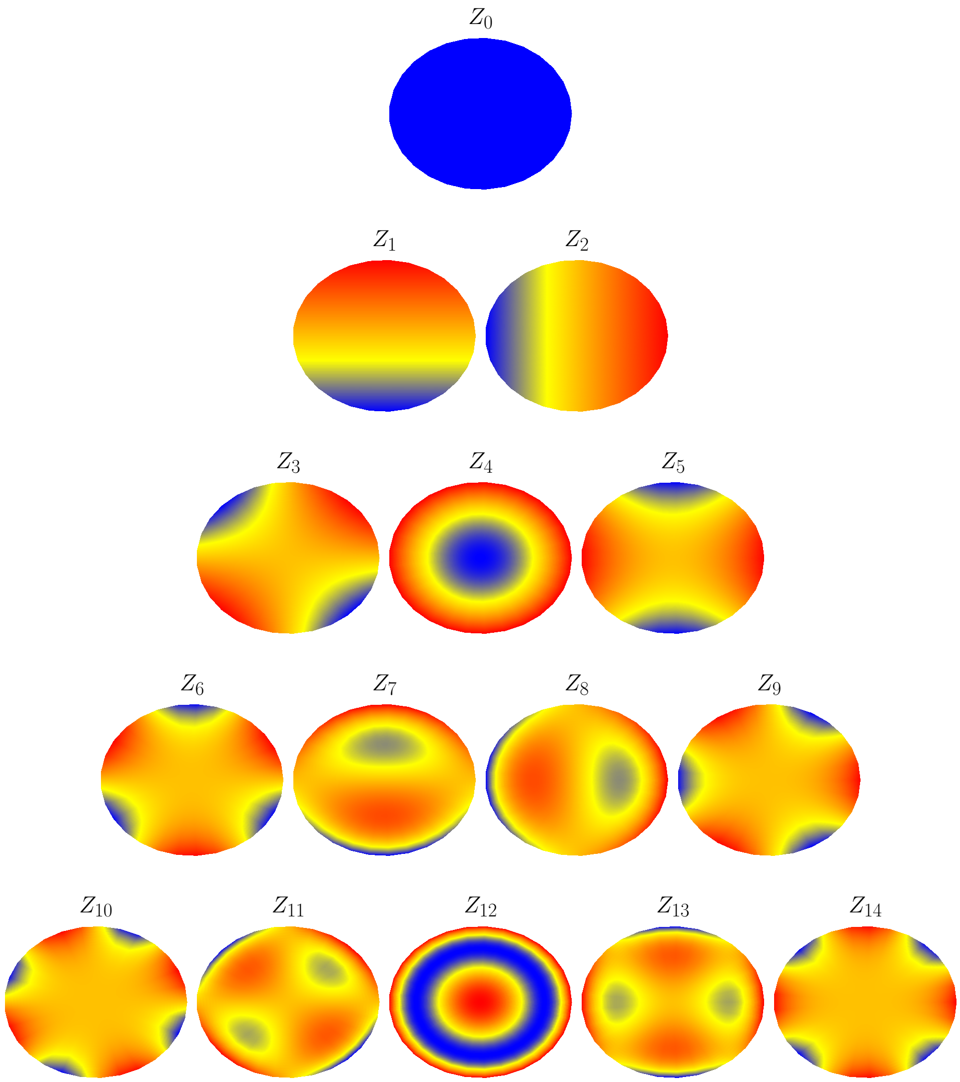


Figura 4: Curvas de Nivel de los Polinomios de Zernike

Los gráficos fueron realizados utilizando el paquete tikz de LaTeX

4.2. Ortogonalidad discreta

La ortogonalidad discreta de los polinomios de Zernike es un resultado obtenido por Pap y Schipp en 2005 ([19]).

Consideremos los polinomios de Zernike de grado menor que $2N$, definidos como en (12)

$$Z_n^m(\rho,\theta) = \sqrt{n+1}R_n^{|m|}(\rho)e^{im\theta}.$$

Denotamos con $\lambda_k^N \in (-1,1),\ k \in \{1,\dots,N\}$ las raíces de los polinomios de Legendre $p_N(x) = p_N^{(0,0)}(x)$ de grado N, y para $j = 1,\dots,N$ tenemos

$$l_j^N(x) := \frac{(x-\lambda_1^N)\dots(x-\lambda_{j-1}^N)(x-\lambda_{j+1}^N)\dots(x-\lambda_m^N)}{(\lambda_j^N-\lambda_1^N)\dots(\lambda_j^N-\lambda_{j-1}^N)(\lambda_j^N-\lambda_{j+1}^N)\dots(\lambda_j^N-\lambda_m^N)},$$

el correspondiente polinomio interpolante de Lagrange. Denotamos por

$$\mathcal{A}_k^N := \int_{-1}^{1} l_k^N(x)dx, \qquad (1 \le k \le N),$$

sus números de Christoffel (ver [22] pag 47). Entonces para cada polinomio f de grado menor que $2N$,

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{N} f(\lambda_k^N)\mathcal{A}_k^N. \tag{14}$$

Utilizando las raíces de los polinomios de Legendre de grado N se definen

$$\rho_k^N := \sqrt{\frac{1}{2}(1+\lambda_k^N)}, \quad k = 1,2,\dots,N,$$

y el conjunto de puntos en coordenadas polares:

$$\mathcal{X} := \left\{ z_{jk} = \left(\rho_k^N, \frac{2\pi j}{4N+1}\right), \quad k = 1,2,\dots,N, \quad j = 0,1,\dots,4N \right\}.$$

Para $N = 8$ el cuadro (3) muestra los valores de los ceros de los polinomios de Legendre $p_8(x)$ (obtenidos de [1]) y los respectivos valores de ρ_k^8, la figura (5) muestra el mallado respectivo.

k	λ_k^8	$\mathcal{A}_k^8$	ρ_k^8
1	-0.183434642495650	0.362683783378362	0.638970014
2	-0.525532409916329	0.313706645877887	0.48706652
3	-0.796666477413627	0.222381034453374	0.318852256
4	-0.960289856497536	0.101228536290376	0.140908026
5	0.183434642495650	0.362683783378362	0.769231643
6	0.525532409916329	0.313706645877887	0.873364875
7	0.796666477413627	0.222381034453374	0.947804431
8	0.960289856497536	0.101228536290376	0.947804431

Cuadro 3: Resultados para $N = 8$

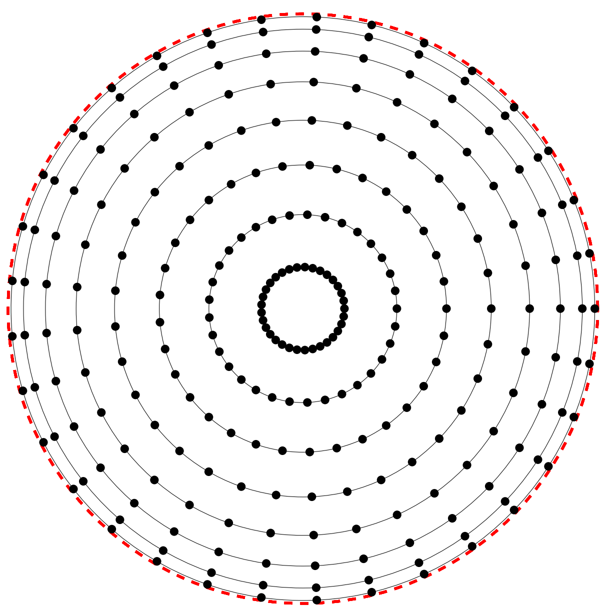


Figura 5: Mallado para $N = 8$

Se define

$$\nu(z_{jk}) = \frac{\mathcal{A}_k^N}{2(4N+1)},$$

y se introduce la siguiente integral discreta

$$\int_{\mathcal{X}} f(\rho,\varphi)d\nu_n := \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=0}^{4N} f\left(\rho_k^N, \frac{2\pi j}{4N+1}\right)\frac{\mathcal{A}_k^N}{2(4N+1)}.$$

Teorema 4.2.1 *Si* $\dfrac{n+n'}{2} \leq 2N-1,$ *entonces*

$$\int_{\mathcal{X}} Z_n^m(\rho,\varphi)Z_{n'}^{m'}(\rho,\varphi)d\nu_n = \delta_{n,n'}\delta_{m,m'}.$$

<u>Prueba:</u> Debido a la ortogonalidad de la parte radial de los polinomios de Zernike, $R_n^m(\rho)$, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2(n+1)}\delta_{n,n'} &= \int_0^1 R_n^{|m|}(\rho)R_{n'}^{|m|}(\rho)\rho d\rho \\
&= \int_0^1 \rho^{2|m|}P_{(n-m)/2}^{(0,|m|)}(2\rho^2-1)P_{(n'-m)/2}^{(0,|m|)}(2\rho^2-1)\rho d\rho.
\end{aligned}$$

Al hacer el cambio de variable $u = 2\rho^2 - 1$, obtenemos la siguiente integral

$$\frac{1}{2(n+1)}\delta_{n,n'} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+u}{2}\right)^{|m|} P_{(n-m)/2}^{(0,m)}(u)P_{(n'-m)/2}^{(0,m)}(u)du.$$

Denotamos

$$g(u) = \left(\frac{1+u}{2}\right)^{|m|} P_{(n-m)/2}^{(0,|m|)}(u)P_{(n'-m)/2}^{(0,|m|)}(u),$$

por lo que el grado de g es $\dfrac{n+n'}{2}$. Nótese además que

$$g(\lambda_k^N) = R_n^{|m|}(\rho_k^N)R_{n'}^{|m|}(\rho_k^N).$$

Si $\dfrac{n+n'}{2} \leq 2N-1$ podemos utilizar (14) y obtener

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2(n+1)}\delta_{n,n'} &= \int_0^1 R_n^{|m|}(\rho)R_{n'}^{|m|}(\rho)\rho d\rho = \frac{1}{4}\int_{-1}^1 g(u)du \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N} g(\lambda_k^N)\mathcal{A}_k^N \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N} R_n^{|m|}(\rho_k^N)R_{n'}^{|m|}(\rho_k^N)\mathcal{A}_k^N.
\end{aligned}$$

Al usar (12), nótese que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{X}} Z_n^m(\rho,\varphi)Z_{n'}^{m'}(\rho,\varphi)d\nu_n \\
&\quad= \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=0}^{4N} Z_n^m\left(\rho_k^N, \frac{2\pi j}{4N+1}\right) Z_{n'}^{m'}\left(\rho_k^N, \frac{2\pi j}{4N+1}\right)\frac{\mathcal{A}_k^N}{2(4N+1)} \\
&\quad= \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=0}^{4N} \frac{\sqrt{(n+1)(n'+1)}\mathcal{A}_k^N}{2(4N+1)} R_n^{|m|}(\rho_k^N)R_{n'}^{|m'|}(\rho_k^N)e^{i(m-m')\frac{2\pi j}{4N+1}} \\
&\quad= \frac{\sqrt{(n+1)(n'+1)}}{2(4N+1)}\sum_{j=0}^{4N} e^{i(m-m')\frac{2\pi j}{4N+1}}\sum_{k=1}^{N} R_n^{|m|}(\rho_k^N)R_{n'}^{|m'|}(\rho_k^N)\mathcal{A}_k^N.
\end{aligned}$$

En la expresión anterior, el resultado de la primera suma es $(4N+1)\delta_{m,m'}$ y el resultado de la segunda suma es $\dfrac{2}{n+1}\delta_{n,n'}$, por lo que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{X}} Z_n^m(\rho,\varphi)Z_{n'}^{m'}(\rho,\varphi)d\nu_n \\
&\quad= \frac{\sqrt{(n+1)(n'+1)}}{2(4N+1)}(4N+1)\delta_{m,m'}\frac{2}{n+1}\delta_{n,n'} = \delta_{n,n'}\delta_{m,m'}.
\end{aligned}$$

$\square$

5. Optica Física

5.1. Aberración y frente de onda

El frente de onda se puede definir como una superficie imaginaria que une todos los puntos en el espacio que son alcanzados en un mismo instante por una onda que se propaga en un medio, es decir aquellos rayos que tienen la misma fase, por lo que un frente de onda es un plano que siempre es perpendicular a todas las ondas que están en fase. Al referimos a que un rayo tiene la misma fase quiere decir que tienen la misma longitud de trayectoria desde la fuente. El vector que representa el frente de onda indica la dirección de propagación. Para un conjunto de vectores paralelos el frente de onda es plano. Para rayos divergentes en un punto o convergentes hacia un punto el frente de onda es esférico. Para los rayos con divergencia o convergencia variado el frente de onda puede tomar cualquiera de las siguientes formas: elipsoidal, paraboloidal, las cuales dependen de la naturaleza de la fuente.

Un sistema óptico es cualquier sistema que es capaz de generar una imagen virtual de una porción de la realidad a través de los rayos luminosos que llegan a ella. Por tanto, una cámara de vídeo, de fotos (tanto analógica como digital), y nuestro ojo son sistemas ópticos. Casi todos los sistemas ópticos constan de una lente o un sistema de lentes que concentran la imagen sobre la cara regular de un cuerpo sólido, normalmente plano o escasamente curvado. Además, son muchos los sistemas ópticos que están dotados además de un diafragma que regula la cantidad de luz que entra y colabora también dando profundidad de enfoque. El ojo humano es un sistema óptico formado por una superficie aproximadamente esférica llamada córnea y una lente que recibe el nombre de cristalino. Ambas son capaces de formar una imagen de los objetos sobre la superficie interna del ojo, en la zona posterior del ojo denominada retina, que es sensible a la luz.

Si asumimos que un cuerpo que emite luz lo hace de forma pulsátil, las ondas que emite a la vez siempre están en fase. Por lo tanto, si queremos obtener una buena imagen en la retina de este pequeño punto emisor de luz, tenemos que conseguir que esas ondas en fase converjan en un sólo punto en la retina (o nos aproximaremos lo más que podamos a ese objetivo). El problema es que del punto luminoso salen las ondas en todas direcciones. Es tarea el ojo hacer converger a las ondas en un lugar de la retina lo más pequeño posible.

Cuando el objeto luminoso está lo suficientemente lejos, podemos asumir que los rayos llegan paralelos. Eso significa que el frente de onda es un plano recto. Suponemos que tenemos un ojo perfecto desde el punto de vista óptico. Tras atravesar la primera lente, que es la córnea, los rayos se curvan, por lo que el frente de onda deja de ser un plano recto y se convierte en un plano curvo aunque regular. La forma de ese plano es cóncava si se mira desde el punto de vista de la retina.

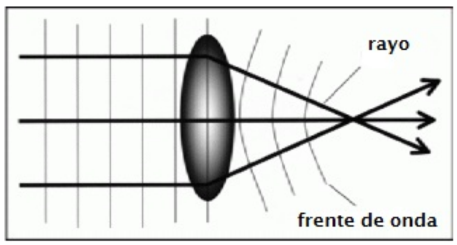


Figura 6: Frente de onda

En realidad esto ocurre con cualquier lente convergente. Los rayos convergen, y como ya se mencionó el frente de onda es perpendicular a los rayos, pasa de ser recto a curvarse. Al atravesar el cristalino, la siguiente lente, se hace más cóncavo, y cada vez más pequeño, hasta que acaba en forma de un único punto en la retina central.

Una aberración es cualquier fenómeno que impide que un sistema óptico genere una imagen perfecta. Un ojo se considera aberrado cuando:

1. Los rayos no se enfocan en un punto común, retina.
2. La longitud del camino óptico de la trayectoria de un punto del objeto a la imagen no es igual para todos los rayos que pasan a través de la pupila.
3. Los frentes de onda dentro del ojo no son esféricos, por el contrario están distorsionados.

Se quiere estudiar lo que pasa con el ojo real, no con el perfecto. Por tanto sabemos que el frente de onda no va ser perfecto. Pero no podemos entrar dentro del ojo para analizar ese frente de onda por lo que no se estudia el

[7]Imagen tomada de [16]

frente de onda que entra en el ojo, sino el que sale. El sistema óptico realmente funciona en las dos direcciones. Si se consigue llegar una luz potente y muy focalizada a un punto de la retina (por defecto se concentra en la retina central), esta luz se refleja, generando un frente de onda de rayos divergentes que se alejan de la retina y se acercan a la córnea. Se forma el mismo frente de onda curvo, que si esta vez lo miramos desde fuera, en vez de cóncavo lo vemos convexo. Pero tiene que tener exactamente la misma forma que el frente de onda que entra en el ojo.

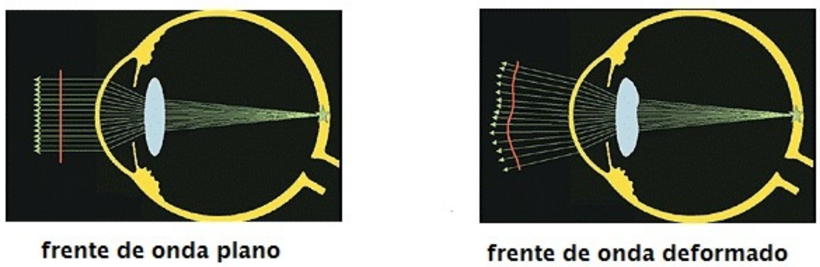


Figura 7: Comparación entre dos frentes de onda

Generalmente se define un frente de onda esférico como el que se muestra en la figura (8), denominado esfera gaussiana de referencia, que como su nombre lo indica nos sirve de referencia para medir el frende de onda aberrado. Por lo tanto existe un error que se define como la diferencia entre la esfera gaussiana y el frente de onda aberrado.

[7] Imagen tomada de [15]

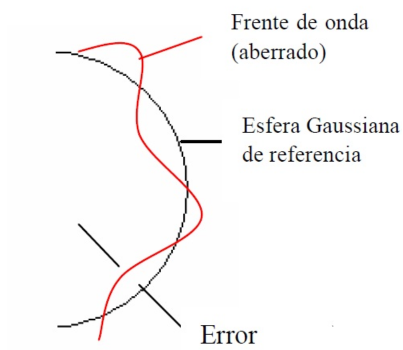


Figura 8: Frente de onda aberrado

El frente de onda que sale del ojo es una imagen fidedigna del frente que entra. Por tanto se captura este frente de onda con un aparato. Este aparato se llama aberrómetro. Gracias a un cristal que funciona como un semiespejo se intruduce la luz en el ojo. El frente de onda queda capturado en la cámara digital del aberrómetro. La imagen es como una rejilla circular de puntos. Si estos puntos están perfectamente alineados se corresponderán con un frente de onda plano y recto. Si algunos puntos, en vez de centrados, están desplazados, entonces el frente de onda presenta irregularidades. La información entonces se traduce en un mapa, en una representación en la que las partes más altas las diferenciamos de las más bajas con un código de colores.
Para analizar estas superficies, con todas las aberraciones a la vez, mezclándose y confundiéndose entre sí, tenemos un método para descomponer estas superfices tan complejas en sus componentes más simples. Así, con este procedimiento matemático podemos jerarquizar y definir todas las aberraciones visuales.

La tecnología de frente de onda fue originalmente desarrollada para el mejoramiento de las imágenes estelares en el campo de la astronomía óptica. Sin embargo, no fue hasta el año 1982 cuando Joseff Bille, Ph.D., profesor y físico de la Universidad de Heidelberg en Alemania, registró la primera patente acerca de las aplicaciones de esta tecnología en el campo de las ciencias visuales, la cual le fue otorgada en 1986 por el gobierno alemán. (ver [11])

[7] Imagen tomada de [15]

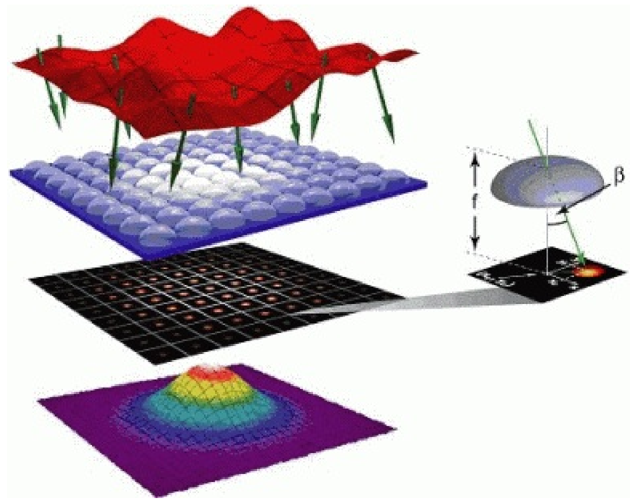


Figura 9: Esquema del aberrómetro

Al analizar el principio básico de la aplicación de los frentes de onda en la óptica ocular, podemos observar que en un ojo artificial perfecto, libre de cualquier tipo de aberración óptica, los haces paralelos del objeto-imagen que vienen del infinito se refractan, llegando a un mismo lugar interno de enfoque que sería el equivalente a la mácula en un ojo biológico. Si de alguna manera pudiéramos analizar este frente de onda de salida del mismo sistema óptico, nos daríamos cuenta que este frente de onda no ha sufrido ninguna distorsión y que, por lo tanto, los haces de salida conservan el paralelismo con el que entraron, sin sufrir cambio alguno. Cuando analizamos un sistema óptico en el que hay aberraciones, como pudiera ser un ojo con algún tipo de defecto refractivo, encontramos que los haces de luz salientes pierden su paralelismo y algunos de ellos se adelantan o se atrasan con respecto al plano de referencia. Es lo que denominamos deformidad en el frente de onda, o etimológicamente, aberración óptica. Estas deformidades en el frente de onda pueden ser tan complejas como aberrado sea el sistema que las posee.

La Optical Society of America (OSA) recomendó, en los inicios de la interpretación de los mapas de frentes de onda, la adopción de la expansión de polinomios de Zernike como el método estándar para describir el error en el frente de onda de un sistema óptico. Los polinomios de Zernike son consi-

[7]Imagen tomada de [15]

derados como los bloques o funciones básicos de descripción o construcción de cualquier frente de onda, por complejo que éste sea. Cada una de estas funciones básicas es el producto de otras dos funciones, una de las cuales depende tan solo del radio y la otra del ángulo, lo cual confiere a los polinomios la característica de mutua ortogonalidad, es decir, independencia matemática. Otra característica conveniente de estos polinomios es que, a excepción del primer término, todos tienen una media de cero y están escalonados para tener una varianza correspondiente a la unidad. Esto coloca a todos los términos en una base común de tal forma que sus magnitudes relativas pueden ser comparadas con gran facilidad (ver [23]).

Las funciones básicas de Zernike o polinomios (como se conocen frecuentemente) están ordenadas sistemáticamente en una tabla periódica con la forma de una pirámide (Similar a la figura 4). Cada fila de la pirámide corresponde a un orden (grado) dado del componente polinomial de la función, y cada columna a una frecuencia meridional diferente; por convención, los armónicos en fase de coseno corresponden a frecuencias positivas y los de fase de seno a frecuencias negativas. Existe también una forma más sencilla de ubicar cada una de estas funciones polinomiales en la pirámide ya sea por la notación OSA o la notación de doble índice. Es importante conocer que, dependiendo de la posición de la aberración en la pirámide, ésta tiende a deteriorar más o menos la calidad de la imagen analizada: entre más arriba de la pirámide y más central al eje esté ubicada una aberración, tendrá mayor impacto en la calidad de visión del paciente. La pirámide de polinomios contempla 5 órdenes diferentes, iniciando con el cero, y se puede considerar dividida en 3 grupos principales: las aberraciones constantes, las de bajo orden y las de alto orden.

Las aberraciones constantes son los órdenes cero y uno de la pirámide. Contienen 3 aberraciones que se consideran constantes en todos los sistemas ópticos: el pistón, la inclinación horizontal (Horizontal Tilt) y la inclinación vertical (Vertical Tip). La primera, el pistón, puede considerarse en su forma más simple como el movimiento del plano focal interno del sistema óptico del aberrómetro por conjugarse con el plano retiniano para captar la imagen percibida. Si tenemos en cuenta, además, que nuestro complejo óptico es un sistema simétricamente asimétrico, la inclinación horizontal y vertical también son aberraciones constantes. Las aberraciones de bajo orden también conocidas como aberraciones de segundo orden, son aquellas que conocemos de la realidad diagnóstica y terapéutica diaria. Son tres expresiones las que ocupan este segundo orden: dos componentes del astigmatismo y un componente del defocus o desenfoque esférico. Éstas son las aberraciones que se está acostumbrados a medir, corregir y tratar con gafas, lentes de contacto o cirugía refractiva convencional. El astigmatismo tiene dos expresiones para la frecuencia angular de seno y de coseno, que al sumarlas sirven para determinar su magnitud y su eje de la siguiente manera: de la sumatoria de la primera expresión más la segunda, obtenemos la magnitud del astigmatismo como lo conocemos; y del porcentaje de uno con respecto al otro se determina el eje del mismo. Respecto al defocus o desenfoque esférico cabe mencionar que representa, aberrométricamente, el error de los rayos centrales de un frente de onda con respecto a los periféricos y éste, a su vez, puede ser positivo o negativo (si estamos ante un error miópico o hipermetrópico).

Las aberraciones de alto orden las encontramos a partir del tercer orden y para efectos prácticos del análisis óptico humano sólo se considera importante hasta el sexto orden e, incluso, algunos investigadores afirman que el análisis de las expresiones sólo hasta el cuarto orden es suficiente. Constituyen la parte del espectro óptico que no se está acostumbrado a medir ni a tratar, pero que ahora con la tecnología de frentes de onda se intenta medir y corregir para llevar a limites antes no pensados la calidad de visión de los pacientes. Porcentualmente, se considera que las aberraciones de bajo orden contribuyen con el 80 o el 85 % del deterioro de la calidad visual, y que las aberraciones de alto orden constituyen tan solo el 15 % del error total [según OSA]. A pesar de la importante diferencia entre estas magnitudes, las aberraciones de alto orden son las que limitan la visión de un ojo sano a menos de la capacidad retiniana y no son susceptibles de corrección con métodos convencionales. El Trefoil, conocido por algunos como astigmatismo triangular, es la primera de estas aberraciones. Bidimensionalmente representa la alternancia adelante – atrás de tres puntos fijos que determinan un encurvamiento del plano a expensas de la periferia. Su imagen tridimensional representa un frente de onda que avanza, se retrasa y alterna en 3 oportunidades a expensas de la periferia. El Coma es considerado como una de las aberraciones más temibles, dentro del espectro de las aberraciones de alto orden, debido al importante deterioro de la calidad visual que su hallazgo representa, cuando es inducida por un procedimiento terapéutico. El coma natural moderado, sin embargo, parece estar relacionado con buenas agudezas visuales, como ha sido demostrado en los pilotos de aviación en quienes se encontró que ésta era la aberración más frecuente. En toda su expresión, el coma es el descentramiento de los elementos que constituyen un sistema óptico. Esta aberración se encuentra con frecuencia en pacientes con patologías asimétricas como el queratocono, con tratamientos refractivos descentrados o lentes intraoculares inclinados o fuera de posición.

Bidimensionalmente, el coma muestra desde la periferia hacia el centro un frente de onda escindido que alterna de forma horizontal o vertical (dependiendo del tipo de coma), en planos que avanzan o se retrazan de manera abrupta. En su representación tridimensional, este frente de onda evidencia un quebramiento brusco con ondulaciones profundas que se alternan adelante – atrás desde el centro hasta la periferia. El Tetrafoil, o astigmatismo cuadrático, se encuentra situado en el cuarto orden; es la aberración que representa la simetría de cuatro puntos fijos a expensas de la periferia y que en su forma bidimensional y tridimensional representa un frente de onda que avanza y se retrasa en 4 oportunidades en la periferia del área analizada. El tetrafoil también tiene dos expresiones para la frecuencia angular de seno y de coseno. La Aberración Esférica está situada en el cuarto orden radial de la pirámide con frecuencia angular cero. La aberración esférica es una aberración simétrica y se define como la distancia focal entre los puntos del centro y la periferia de un frente de onda; si el centro y la periferia de un sistema se vuelven más curvos la aberración esférica se hace mayor. El análisis bidimensional nos muestra una imagen con colores fríos en la periferia que se va incrementando progresivamente hacia el centro; su forma tridimensional clásica la describe en forma de sombrero mexicano.

En cuanto a la sintomatología de las aberraciones de orden superior, el ojo tiene generalmente varias que interactúan juntas. Esta correlación manifiesta unos síntomas específicos que los pacientes reportan, tales como: sensación de visión doble, imágenes fantasmas, halos, pérdida de contraste más notorio en la noche, borrosidad de la imagen, visión no clara, bordes de letras poco nítidos (ver figura 10) y escaso grado de detalle, deslumbramiento, mala visión nocturna, comprometiendo ello en mayor grado la calidad visual y limitando el intervalo de frecuencias espaciales de la imagen ([24])

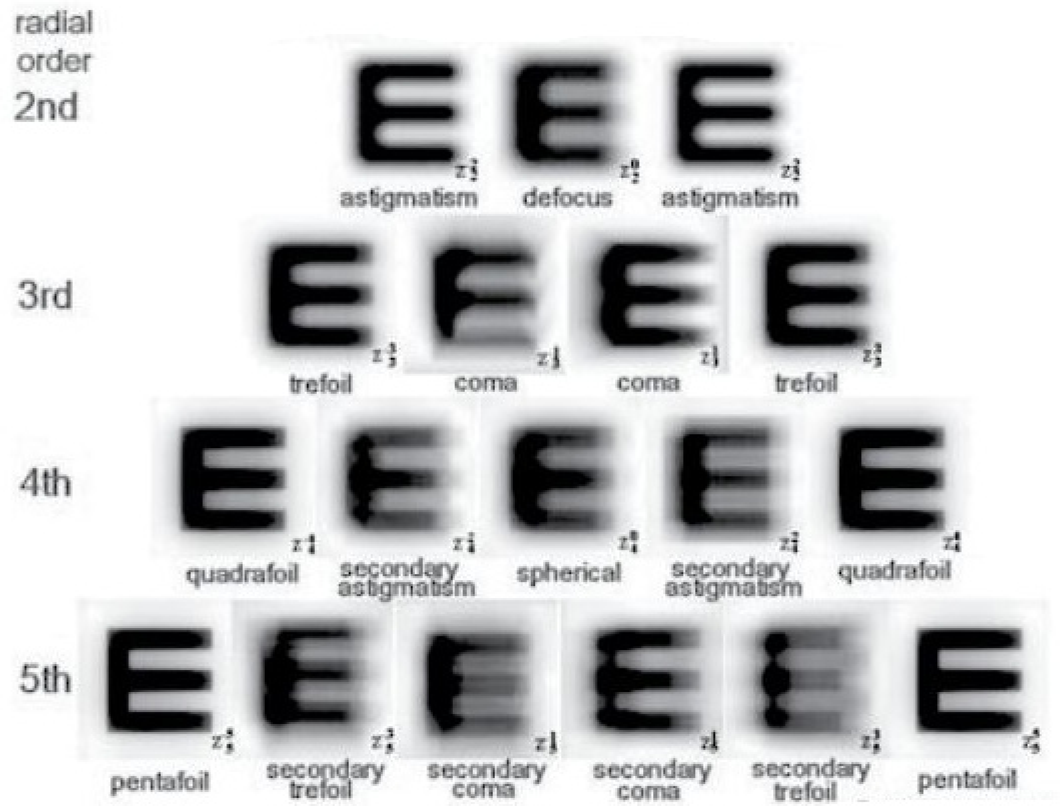


Figura 10: Imagen retinal simulada de los polinomios de Zernike

5.2. Principio de Fermat

El principio de Fermat se puede establecer de la siguiente manera: la luz, al ir desde un punto hasta otro, sigue la ruta que tiene la longitud de camino óptico menor. La longitud de camino óptico o distancia óptica se define como:

$$(\text{índice de refracción}) \times (\text{distancia física})$$

En un medio isotrópico y homogéneo el indice de refracción es constante y no depende de la dirección: por ejemplo, el vidrio o el plástico empleados usualmente en la fabricación de lentes oftálmicas son medios materiales isotrópicos y homogéneos. En un medio isotrópico no–homogéneo el índice de refracción varía de un punto a otro: por ejemplo, la lente del cristalino tiene un indice

[7] Imagen tomada de [24]

de refracción que varía con la distancia desde el centro hasta la periferia. Este tipo de variación de índice también se usa en la fabricación de fibras ópticas. Para lo que nos interesa, solo vamos a considerar medios isotrópicos (en un medio anisotrópico el indice de refracción varía con la dirección y el estado de polarización de la luz: por ejemplo, el cuarzo o la calcita son materiales anisotrópicos).

En un medio homogéneo la ruta que sigue la luz entre dos puntos será un línea recta (la distancia más corta entre dos puntos en el espacio euclidiano es la longitud de la línea recta que los une); en cambio, si el medio es inhomogéneo la luz seguirá una trayectoria diferente a la línea recta, en general, algún tipo de curva. La forma de la trayectoria depende de la manera como cambia el índice de refracción. Lo anterior se ilustra en la figura (11): en (a) se muestra un medio homogéneo y la trayectoria recta que sigue la luz de A a B (nótese que en este caso solo hay una posible trayectoria); en (b) el medio es inhomogéneo y la luz puede seguir varias trayectorias curvas para ir de A a B; y en (c) se muestra una aplicación usual: la formación de la imagen de A en B empleando una lente. En este caso se tienen dos medios homogéneos de diferente índice de refracción: aire-vidrio. Esta combinación de dos medios homogéneos permite que los diferentes rayos que salen de A sean enfocados en B.

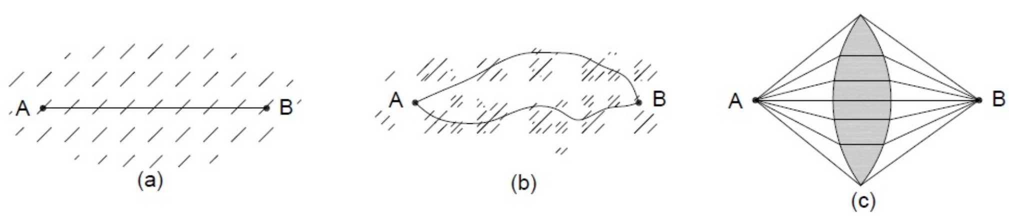


Figura 11: Diversas trayectorias de la luz en diferentes medios de acuerdo con el principio de Fermat

5.3. Formación de imagen

Para formar la imagen de un objeto usualmente empleamos un sistema óptico conformado por lentes, espejos, etc. En un sistema óptico ideal como el

[7]Imagen tomada de [16]

mostrado en la figura (12), el frente de onda esférico divergente del objeto puntual es transformado en un frente de onda esférico convergente, de modo que la imagen de un punto es otro punto y la imagen de un objeto extendido es una réplica del objeto (salvo un cambio de escala). Lo anterior también implica que los medios donde se encuentran el objeto (espacio objeto) y la imagen (espacio imagen) son homogéneos.

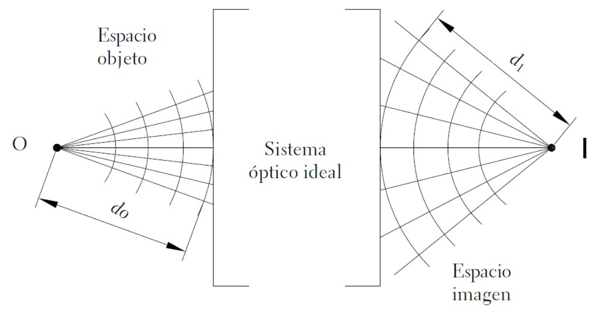


Figura 12: Formación de imagen de un punto objeto mediante un sistema óptico ideal

En la práctica, aunque los espacios objeto e imagen sean homogéneos, la imagen de un punto objeto no es un punto sino mas bien algo como una pequeña mancha, conocida como función de punto extendido o PSF (del ingles Point Spread Function). La forma de esta mancha depende de la geometría de los elementos que conforman el sistema óptico formador de imagen, de la homogeneidad de los medios refractores y de la difracción de la luz en la pupila de salida del sistema óptico. Lo anterior significa que el frente de onda que emerge del sistema óptico correspondiente a un frente de onda esférico incidente ya no es esférico, sino una superficie distorsionada, tal y como se ilustra en la figura (13). El efecto sobre la imagen de un objeto extendido será un deterioro en la calidad de la imagen, tal como disminución de contraste y de resolución (agudeza visual).

Una manera práctica de modelar un sistema óptico es mediante sus pupilas de entrada y de salida. Las pupilas son las imágenes del diafragma de apertura del sistema óptico. Veamos estos conceptos con la figura (14), en la que se

[7]Imagen tomada de [16]

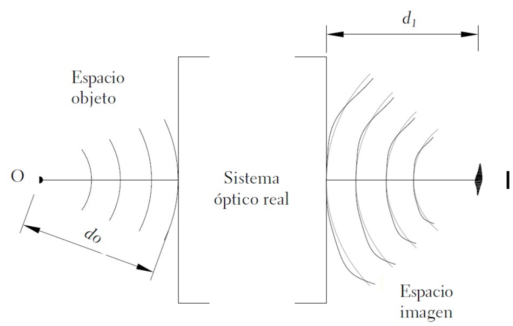


Figura 13: Formación de imagen de un punto objeto medianteun sistema óptico ideal

muestra un sistema óptico formado por dos lentes simples y un diafragma circular en medio de las dos lentes. La tarea de este diafragma es controlar la cantidad de luz que entra al sistema para formar la imagen; si en un sistema no se encuentra el diafragma como un elemento separado, entonces el borde de alguna de las lentes será el elemento que controla la cantidad de luz. Al diafragma que controla la cantidad de luz se le denomina diafragma de apertura (DA). Suponiendo que se forma una imagen ideal, la imagen del punto objeto O será el punto imagen I. La pupila de entrada es la imagen del diafragma de apertura vista desde el punto objeto a través de los elementos ópticos que están antes del diafragma (en este caso la lente L1). La pupila de salida es la imagen del diafragma de apertura vista desde el punto imagen a través de los elementos ópticos que están después del diafragma (en este caso la lente L2). Entonces, en la práctica, desde el punto objeto el tamaño del cono de luz que entra al sistema óptico está determinado por el diámetro de la pupila de entrada, y el tamaño del cono de luz que sale del sistema óptico para formar la imagen está determinado por el diámetro de la pupila de salida, como se muestra en la figura (15); en otras palabras, las pupilas determinan la cantidad de luz que efectivamente entra o sale del sistema óptico.

Las pupilas nos permiten modelar cualquier sistema óptico formador de imagen, tal como se muestra en la figura (16). Este modelo generalizado supone que: 1) entre las pupilas de entrada y de salida el paso de la luz ocurre de

[7]Imagen tomada de [24]

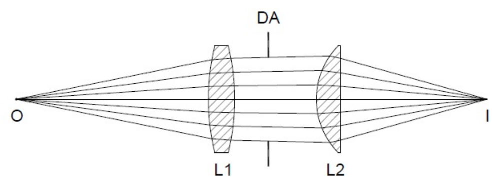


Figura 14: Sistema de dos lentes que forma una imagen perfecta

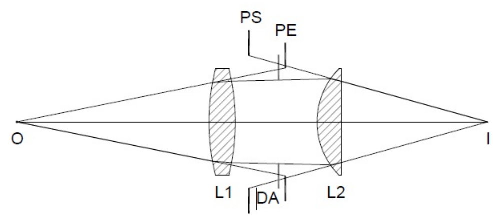


Figura 15: Pupilas de entrada (PE) y salida (PS) y conos de luz en el sistema de la figura (14)

acuerdo con las leyes de la óptica geométrica; 2) la pupila de entrada no distorsiona el frente de onda esférico a su paso; y 3) la distorsión del frente de onda en el espacio imagen se genera en la pupila de salida. En otras palabras, este modelo supone que los defectos ópticos del sistema se condensan en la pupila de salida. Lo anterior se representa matemáticamente mediante una función de transmitancia en el plano de la pupila de salida, entonces, el frente de onda que emerge de la pupila de salida es el resultado de multiplicar el frente de onda esférico que llega a la pupila de salida por la función de transmitancia que contiene los defectos ópticos del sistema. Con este modelo el estudio de la calidad de imagen generada por un sistema óptico se limita a medir el frente de onda en la pupila de salida. Una vez que se conoce el frente de onda en la pupila de salida se puede evaluar la PSF u otras funciones comúnmente empleadas para caracterizar un sistema óptico. Un ejemplo de la aplicación de este modelo generalizado en ciencias de la visión lo tenemos en los aberrómetros oculares ([23]). Estos instrumentos primero generan una fuente puntual luminosa en la retina y luego miden (en forma indirecta) en la pupila de salida del ojo el frente de onda emergente. En este caso, se tiene

[7] Imágenes tomadas de [16]

que la luz emerge de la retina y sale del ojo atravesando los medios transparentes del ojo, por lo que la pupila de salida será la imagen del iris que un observador externo ve. Los resultados suelen ser presentados mediante un histograma de coeficientes de polinomios de Zernike.

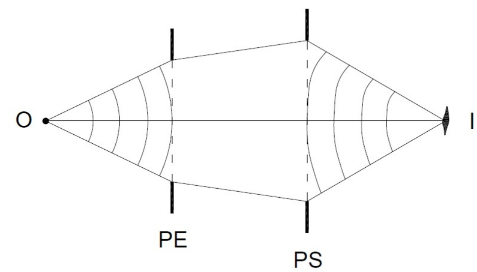


Figura 16: Modelo generalizado de un sistema óptico a partir de las pupilas de entrada y de salida

Las pupilas también nos permiten definir un par de rayos de gran relevancia en óptica geométrica: el rayo principal y el rayo marginal. El rayo principal sale de un punto objeto fuera de eje, entra al sistema óptico dirigido al centro de la pupila de entrada, pasa por el centro del diafragma de apertura y llega al punto imagen correspondiente en una dirección tal como si viniera del centro de la pupila de salida. El rayo marginal sale de un punto objeto en eje, entra al sistema óptico dirigido al borde de la pupila de entrada, pasa por el borde del diafragma de apertura y llega al punto imagen correspondiente en una dirección tal como si viniera del borde de la pupila de salida. En un sistema óptico, un plano que contenga al eje óptico y al rayo principal se denomina plano meridional o tangencial, y el plano ortogonal al plano meridional se denomina plano sagital.

5.4. Representación matemática del frente de onda

De acuerdo con lo dicho anteriormente, para caracterizar el sistema óptico (calidad de imagen) se requiere conocer el frente de onda en la pupila de salida. Primero vamos a suponer que el sistema forma una imagen perfecta, es

[7]Imagen tomada de [16]

decir, la imagen será un punto. Entonces, un observador en el punto imagen verá que de la pupila de salida sale un frente de onda esférico que converge en el punto imagen; el radio del frente de onda esférico en la pupila lo denotaremos por R. La cuestión ahora es cómo describimos matemáticamente este frente de onda. Comencemos por introducir un sistema de coordenadas cartesiano (x, y, z) cuyo origen esté en el plano de la pupila de salida y cuyo eje z coincida con el eje óptico del sistema, como se ilustra en la figura (17): x y y denotan las coordenadas transversales en el plano de la pupila de salida, mientras que x_i y y_i denotan las coordenadas transversales en el plano imagen gaussiano (donde se forma la imagen perfecta). La porción de la esfera que describe el frente de onda en la pupila de salida estará representada por la siguiente ecuación:

$$z = R - \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} \tag{15}$$

tal que $x \leq r_0$ y $y \leq r_0$, siendo r_0 el radio de la pupila de salida. Esta es la ecuación de una esfera de radio R con centro en $(0, 0, R)$. Note que si $x = 0$ y $y = 0$ (vértice de la esfera), entonces $z = 0$. Las coordenadas del punto imagen serán las mismas que las del centro de la esfera. Como esta esfera representa el frente de onda en la pupila de salida cuando la formación de la imagen es perfecta, a esta esfera la denominamos esfera de referencia.

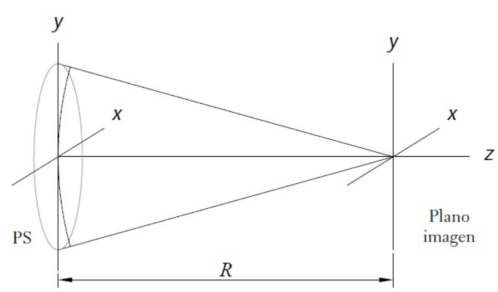


Figura 17: Coordenadas de la pupila de salida (PS) y del plano imagen gaussiano

Volvamos al sistema óptico de la figura (14), pero ahora consideremos la formación de la imagen real. En este caso, los rayos en el espacio imagen

[7]Imagen tomada de [16]

no se cruzan todos en el mismo punto, así que la imagen será una mancha extendida, como se muestra en la figura (18), y en consecuencia el frente de onda en la pupila de salida no puede ser esférico. La forma del frente de onda en este caso será una superficie más compleja en comparación con la forma esférica, y su forma explícita dependerá de cada sistema óptico en particular.

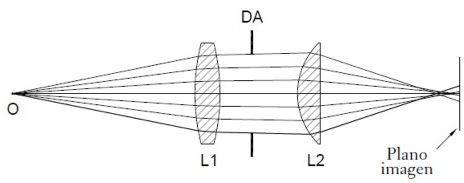


Figura 18: Formación real de la imagen del punto objeto

Vamos a denotar a la esfera de referencia como $z = S(x, y)$, y al frente de onda real como $z = S'(x, y)$. Decimos que $z = S(x, y)$ es la ecuación implícita de la esfera de referencia, mientras que la ecuación (15) es la ecuación explícita de la esfera de referencia. En forma análoga, $z = S'(x, y)$ es la ecuación implícita del frente de onda real, pero por ahora no tenemos una ecuación explícita de esta superficie como en el caso de la esfera de referencia. En la práctica, la forma del frente de onda real se analiza con respecto a la esfera de referencia, calculando la diferencia entre las dos superficies; es lo que se denomina aberración de frente de onda. En general, la aberración de frente de onda es pequeña en comparación con el radio de la esfera de referencia, por lo que la forma del frente de onda real se puede calcular como

$$S'(x, y) = S(x, y) + W(x, y), \tag{16}$$

siendo $W(x, y)$ la aberración del frente de onda.

5.4.1. Aberración de frente de onda

Según lo dicho en la sección anterior, medir la aberración de frente de onda es equivalente a medir la forma del frente de onda real; por otra parte, usualmente, lo que medimos experimentalmente es la aberración de frente de onda.

En la figura (19) se representa el frente de onda real junto con la esfera de referencia. El rayo 1 es el rayo correspondiente a la esfera de referencia en el

[7] Imágenes tomadas de [16]

punto P, el cual cruza al frente de onda real en el punto Q; el rayo 2 es el rayo correspondiente al frente de onda real en el punto Q; la aberración de frente de onda, que denotamos por W, se define como la distancia óptica entre P y Q, a lo largo del rayo 1. Otros autores definen la aberración de frente de onda como la distancia óptica entre los frentes de onda a lo largo del rayo 2. En la práctica, el ángulo entre los rayos 1 y 2 es pequeño y se llega al mismo resultado, dado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= -\frac{R}{n'}\frac{\partial W}{\partial x} \\ \Delta y_i &= -\frac{R}{n'}\frac{\partial W}{\partial y} \end{aligned}$$

donde Δx_i y Δy_i miden la diferencia entre las coordenadas x_i y y_i de la intersección del rayo 1 con el plano imagen (punto imagen ideal) y de la intersección del rayo 2 con el plano imagen. En otras palabras, Δx_i y Δy_i son las desviaciones de los rayos reales con respecto a los rayos ideales medidas en el plano imagen; a estas desviaciones se les denomina aberraciones de rayo: $\frac{\partial W}{\partial x}$ y $\frac{\partial W}{\partial x}$ representan las derivadas de la aberración de frente de onda en las direcciones x y y. Geométricamente, la derivada es la pendiente. El índice de refracción en el espacio imagen se denota por n'.

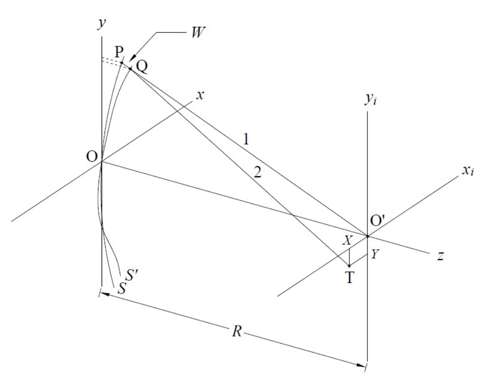


Figura 19: La longitud entre los puntos Q y P a lo largo del rayo 1 es la-distorsion del frente de onda S' en comparacion con la esfera de referencia S

[7]Imagen tomada de [16]

Desde el punto de vista matemático, la forma explícita de la aberración de frente de onda es una función que puede contener muchos términos (en principio infinitos términos); en el sistema de coordenadas cartesiano tiene la forma general:

$$\begin{aligned} W(x,y) &= a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 \\ &+ a_{30}x^3 + a_{03}y^3 + \ldots a_{mn}x^my^n + \ldots \end{aligned}$$

donde los coeficientes a_{mn}, con $m = 1, 2, 3\ldots$ y $n = 1, 2, 3\ldots$, son números reales, cuyo valor determina la relevancia que cada uno de los monomios x^my^n tiene dentro de la suma. Cada monomio en sí representa una superficie, por ejemplo: $f(x,y) = x$ representa un plano inclinado en la dirección x, $f(x,y) = y$ representa un plano inclinado en la dirección y, etc.

El ángulo de inclinación dependerá del valor del coeficiente correspondiente, así si $a_{10} = 1$, entonces tendremos un plano inclinado en la dirección x que forma un ángulo de 45°. El término a_{00} representa un plano horizontal (paralelo al plano definido por los ejes x y y) de altura igual a $z = a_{00}$ (pistón). El coeficiente a_{00} permite desplazar axialmente el resto de los términos de $W(x,y)$ con respecto al plano formado por los ejes x y y. Por esta razón, al término a_{00} se le denomina pistón, y en sí no representa ningún tipo de aberración.

Estos tres monomios, se denominan monomios de orden 1 y a las figuras correspondientes superficies de orden 1. Algunos autores se refieren a la dirección de la inclinación de los planos de manera diferente, considerando el eje que se debe girar para obtener la inclinación, por ejemplo, el plano inclinado $f(x,y) = x$ se obtiene rotando un plano horizontal alrededor del eje y (un ángulo de 45°). Por eso se refieren a este plano como una inclinación alrededor del eje y; sin embargo, en este texto nos parece más claro decir que este plano está inclinado en la dirección x.

Por otra parte, el monomio x^2 representa un paraboloide cilíndrico, es decir, el perfil de la superficie en cualquier plano paralelo al plano formado por los ejes x y z es una parábola; análogamente, el monomio y^2 representa un paraboloide cilíndrico, pero ahora el perfil parabólico de la superficie ocurre en cualquier plano paralelo al plano formado por los ejes y y z.

Por último, el monomio xy representa una superficie un poco más compleja, pues en las direcciones diagonales el perfil de la superficie también son parábolas, en un caso orientada hacia arriba y en el otro orientada hacia abajo, mientras que el perfil en las direcciones x o y son líneas rectas; a esta superficie, debido a su forma, se le llama silla de montar. A medida que avancemos en el orden del monomio, la superficie descrita es cada vez más compleja.

El polinomio de orden 2, $f(x,y) = a_{11}xy + a_{20}x^2 + a_{02}y^2$, resulta de gran importancia en ciencias de la visión, ya que con este polinomio se representan matemáticamente el cilindro o astigmatismo y la esfera media o el defoco.

Geométricamente diremos entonces que un polinomio representa una superficie. La forma de esta superficie puede ser simple o compleja, dependiendo del número de monomios que componen el polinomio. A su vez, podemos decir que la superficie que describe el polinomio es la suma de un conjunto de superficies más simples, por ejemplo, planos inclinados, paraboloides, etc.

Otro hecho importante es que diferentes superficies pueden ser generadas por polinomios conformados por el mismo tipo de monomios; lo que hace la diferencia aquí es el valor de los coeficientes en cada caso. Por esta razón, es común describir la superficie simplemente por sus coeficientes (ordenados en algún tipo de histograma) en lugar de escribir la ecuación. Es decir que la aberacción del frente de onda $W(\rho,\theta)$ viene dada por un conjunto discreto de datos (mediciones) que se realizan en la pupila.

$$\{x_i, y_i, W(x_i, y_i) : i = 1, 2, \ldots, M\}$$

Se utiliza entonces una aproximación por mínimos cuadrados para reproducir la aberración del frente de onda

$$W(\rho,\theta) \sim \sum_{j=0}^{N} \lambda_j Z_j(\rho,\theta)$$

donde $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_N$ son las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \langle Z_0, Z_0\rangle & \langle Z_1, Z_0\rangle & \dots & \langle Z_N, Z_0\rangle \\ \langle Z_0, Z_1\rangle & \langle Z_1, Z_1\rangle & \dots & \langle Z_N, Z_1\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Z_0, Z_N\rangle & \langle Z_1, Z_N\rangle & \dots & \langle Z_N, Z_N\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle W, Z_0\rangle \\ \langle W, Z_1\rangle \\ \vdots \\ \langle W, Z_N\rangle \end{pmatrix}$$

Usando el producto escalar discreto

$$\langle f, g\rangle := \sum_{i=1}^{M} f(x_i, y_i) g(x_i, y_i).$$

Observemos que este producto escalar discreto estará bien definido si el número de medidas M es mayor que el número de elemenos de la base de Zernike que se usen, N, y además que estas medidas esten dispuestas en forma adecuada.

En la actualidad, el sensor de Shack–Hartmann utiliza datos sobre una rejilla cartesiana (cuadrada) y la máquina devuelve los coeficientes de cada uno de los polinomios de Zernike resolviendo el sistema de ecuaciones utilizando el método iterativo de Gauss - Seidel.

Los resultados se suelen presentar en un gráfico como el que se muestra en la figura (20), que fue tomada de [13].

Este sensor envía rayos de luz a través de la retina y hasta que llegan al punto donde convergen todos los rayos de luz que pasan por ésta, entonces estos rayos se reflejan hasta llegar al frente de onda, una vez allí, se calcula la pendiente de la diferencia que hay entre la posición a la que habría llegado ese rayo de luz en el caso de tener un ojo perfecto y la posición a la que ha llegado en realidad.

Por lo tanto, a la hora de trabajar, no se trabaja con la altura de la retina, ya que al ser ésta muy pequeña es una labor muy difícil, sino que se trabaja con pendientes de rectas, de tal modo que si el ojo es un ojo perfecto, todos estas pendientes valdrán cero.

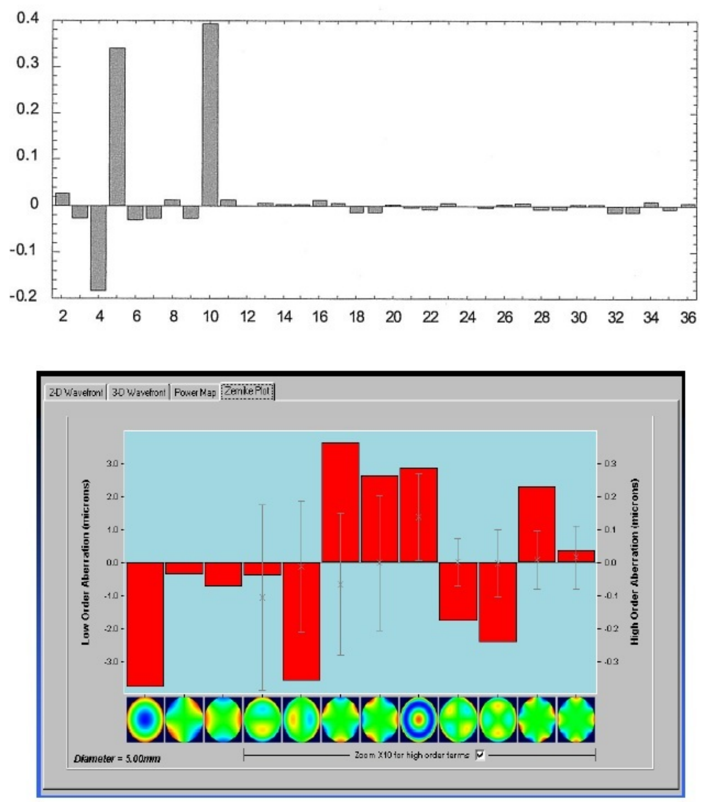


Figura 20: Tabulación de aberraciones

Consecuencia de que los datos que obtenemos son de tipo discreto es que los resultados que obtengamos dependerán de las mediciones que hayamos tomado. De esta forma, si tomamos la misma cantidad de mediciones pero las tomamos en diferentes sitios, obtendremos resultados diferentes.

Para saber si la forma en la que tomamos los puntos es buena o no, utilizaremos el número de condición para nuestra matriz de coeficientes que obtenemos al aplicar mínimos cuadrados.

El número de condición para una matriz A de un sistema $Ax = b$ viene dado por:

$$k(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$$

con $\|\cdot\|_2$ la norma dos matricial.

Si nuestro número de condición está cercano a 1, diremos que nuestra matriz A estará bien condicionada y nuestro sistema será estable. Si el número de condición es grande, nuestro sistema será muy inestable.

Por lo tanto, es muy importante la forma en la que se tomen las mediciones, ya que esta tendrá que ver con el condicionamiento de nuestra matriz de coeficientes. En la figura (21) (tomada de [21]) se muestran tres formas distintas de tomar las mediciones para 91 nodos, hexagonal, hexapolar y espiral:

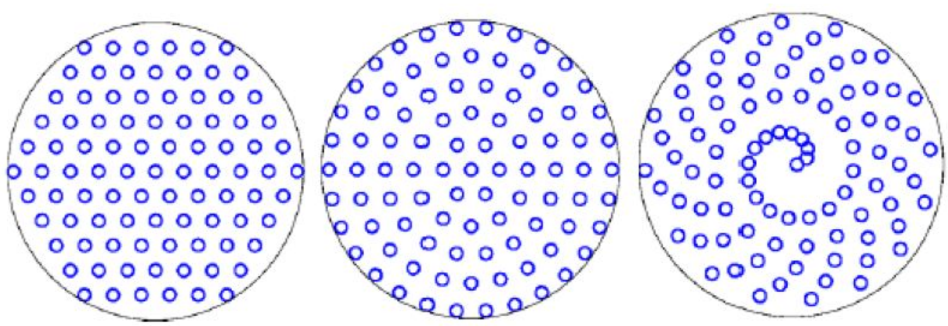


Figura 21: Formas de tomar mediciones

Cada una de ellas nos dará un número de condición distinto (ver [21]), por lo que no solo tendremos más precisión cuanto mayor número de muestras tomemos, también dependerá de la forma en la que se tomen.

6. Conclusiones y problemas abiertos

Los polinomios de Zernike constituyen una base matemática adecuada para representar las aberraciones oculares. Cada término de Zernike representa la aberración de frente de onda de una de las aberraciones ópticas, de modo que su varianza con respecto a una superficie de referencia adecuada es la mínima y, además, el promedio de las distorsiones del frente de onda con respecto a la superficie de referencia es cero.

Los siguientes pueden ser temas de futuras investigaciones :

1. Respecto a la matriz A, utilizada para el cálculo de los coeficientes de la aproximación del frente de onda; en el caso que la matriz sea cuadrada debe determinarse cuando es invertible o no, también estudiar el número de condición de dicha matriz para diversas formas en que se tomen las mediciones (tema de insvestigación Actual en la Universidad de Almeria)

2. A pesar de la ortogonalidad continua de los polinomios de Zernike, que parece ser una propiedad deseable, en la práctica se vuelve inútil, ya que normalmente se hace uso de los valores de esos polinomios en un conjunto finito y discreto de puntos del disco unitario, hay un resultado de la ortogonalidad discreta de los polinomios de Zernike, pueden buscarse otros conjuntos de puntos donde también se verifique la ortogonalidad discreta.

A. Apéndice [8]

A.1. Las funciones Gamma y Beta

Definición A.1.1 *La función Gamma está definida para $Re(x) > 0$ por la integral:*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Definición A.1.2 *La función Beta está definida para $Re(x) > 0$ y $Re(y) > 0$ por:*

$$\mathcal{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

La función Beta está relacionada con la función Gamma de la siguiente forma:

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)\mathcal{B}(x,y),$$

esta relación es válida para $Re(x) > 0$ y $Re(y) > 0$.

Algunas propiedades

- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{x-1}(\theta)\cos^{y-1}(\theta) d\theta = \frac{1}{2}\mathcal{B}\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$

- $\displaystyle\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

- $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t^2)^{y-1} dt = \frac{1}{2}\mathcal{B}\left(\frac{x}{2}, y\right)$

- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (fórmula de recurrencia)

- $\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2x}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x)$ (fórmula de duplicación)

[8] Para todas las referencias del apéndice ver [1]

A.2. Símbolo de Pochhammer

Definición A.2.1 *El símbolo de Pochhammer está definido para toda x por:*

$$(x)_0 = 1, \quad (x)_n = \prod_{i=1}^{n}(x+i-1) \qquad \textit{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Algunas consecuencias de la definición son:

- $(x)_{n+1} = (x+n)(x)_n$ (fórmula de recurrencia)
- $(x)_{m+n} = (x)_m(x+m)_n$
- $(x)_n = (-1)^n(1-n-x)_n$
- $(x)_{n-i} = (x)_n(-1)^i/(1-n-x)_i$

Relación con los coeficientes binomiales y la notación de factorial:

- $(1)_n = n!$ (fórmula de recurrencia)
- $(n+m)! = n!(n+1)_m$
- $\binom{n}{k} = \frac{(-1)^k(-n)_k}{k!}$ (coeficiente binomial)
- $(x)_{2n} = 2^{2n}\left(\frac{x}{2}\right)_n\left(\frac{x+1}{2}\right)_n$ (fórmula de duplicación).

Relación con la funcion Gamma:

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$$

A.3. Series hipergeométricas

Una serie hipergeométrica es una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} r_k x^k$ (convergente para $|x| < 1$) donde la razón de coeficientes sucesivos r_{k+1} , r_k es una función racional de k.

La notación estándar para una serie hipergeométrica es:

$$ {}_pF_q(a_1, a_2, ...a_p; b_1, b_2, ..., b_q; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k(a_2)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k(b_2)_k \cdots (b_q)_k} \frac{x^k}{k!} $$

donde los valores a_i y b_j son parámetros.

Los tipos más comunes son:

$$ {}_1F_0(a;;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} x^k. $$

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k k!} x^k. $$

A.3.1. Desarrollo binomial

$$ (1+z)^{\alpha} \; = \; {}_1F_0(-\alpha;_; -z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_k}{k!} z^k. $$

A.3.2. Desarrollo multinomial

$$ (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_d)^k = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} \frac{(-k)_{|\alpha|}}{\alpha!} x^{\alpha}, $$

donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ y α es un multi–índice (ver página 1).

A.4. Serie de Lauricella

Una manera para definir un análogo multivariable a las series hipergeométricas consiste en las generalizaciones de Laurecilla de las ${}_2F_1$ series.

Sean $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_d)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_d)$, $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots, c_d) \in \mathbb{R}^d$ paramétros vectoriales; $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ parámetros escalares y la variable $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Usamos la siguiente notación:

Sea $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, \dots, m_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $\quad \boldsymbol{m}! = \displaystyle\prod_{j=1}^{d} (m_j)!$,

$|\boldsymbol{m}| = \sum_{j=1}^{d} m_j$, $\quad (\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{m}} = \displaystyle\prod_{j=1}^{d} (a_j)_{m_j}$, $\quad x^{\boldsymbol{m}} = \displaystyle\prod_{j=1}^{d} {x_j}^{m_j}$.

Las cuatro tipos de funciones de Lauricella son (Ver [9] página 6):

(I) $F_A(\alpha, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, x) = \displaystyle\sum_{\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}_0^d} \frac{(\alpha)_{|\boldsymbol{m}|}(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{m}}}{(\boldsymbol{c})_{\boldsymbol{m}}\ \boldsymbol{m}!} x^{\boldsymbol{m}}$, convergente para $\displaystyle\sum_{j=1}^{d} |x_j| < 1$;

(II) $F_B(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \gamma, x) = \displaystyle\sum_{\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}_0^d} \frac{(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{m}}}{(\gamma)_{|\boldsymbol{m}|}\ \boldsymbol{m}!} x^{\boldsymbol{m}}$, convergente para $\max\limits_{j} |x_j| < 1$;

(III) $F_C(\alpha, \beta, \boldsymbol{c}, x) = \displaystyle\sum_{\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}_0^d} \frac{(\alpha)_{|\boldsymbol{m}|}(\beta)_{|\boldsymbol{m}|}}{(\boldsymbol{c})_{\boldsymbol{m}}\ \boldsymbol{m}!} x^{\boldsymbol{m}}$, convergente para $\displaystyle\sum_{j=1}^{d} |x_j|^{\frac{1}{2}} < 1$;

(IV) $F_D(\alpha, \boldsymbol{b}, \gamma, x) = \displaystyle\sum_{\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}_0^d} \frac{(\alpha)_{|\boldsymbol{m}|}(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{m}}}{(\gamma)_{|\boldsymbol{m}|}\ \boldsymbol{m}!} x^{\boldsymbol{m}}$, convergente para $\max\limits_{j} |x_j| < 1$.

A.5. Polinomios ortogonales clásicos en una variable

Definición A.5.1 *Una sucesión de polinomios* $\{f_n\}_{n\geq 0}$ *con* grado$(f_n(x)) = n$*, es llamado* ortogonal *en un intervalo* $I \in \mathbb{R}$ *con respecto a una medida de ortogonalidad* $d\mu = cw(x)$*, donde* $w(x) > 0$ *es una función peso y* $c = \left(\int_I w(x)dx\right)^{-1}$ *es una costante de normalización si:*

$$\langle f_n, f_m\rangle = \int_I f_n(x)f_m(x)cw(x)dx = k_n\delta_{n,m}, \quad k_n \neq 0.$$

Observemos que c *se toma para que* $\langle 1, 1\rangle = 1$.

Las familias de polinomios ortogonales clásicos en una variable, llamados así por las propiedades diferenciales que los caracterizan son (según [1] y [22]):

f_n	**Nombre**	I	$w(x)$	c
H_n	Hermite	$(-\infty, \infty)$	e^{-x^2}	$\pi^{-\frac{1}{2}}$
L_n^α	Laguerre	$[0, \infty)$	$x^\alpha e^{-x}, \quad \alpha > -1$	$\Gamma(\alpha+1)^{-1}$
$P_n^{(\alpha,\beta)}$	Jacobi	$[-1, 1]$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \quad \alpha, \beta > -1$	$\dfrac{2^{-\alpha-\beta-1}}{\mathcal{B}\left(\alpha+1, \beta+1\right)}$
C_n^λ	Gegenbauer	$[-1, 1]$	$(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}, \quad \lambda > -\frac{1}{2}$	$\dfrac{1}{\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}, \lambda+\frac{1}{2}\right)}$
p_n	Legendre	$[-1, 1]$	1	2

Notemos que los polinomios ortogonales de Legendre y Gegenbauer son casos particulares de los polinomios ortogonales de Jacobi.

A.5.1. Polinomios Ortogonales de Jacobi

Los polinomios ortogonales de Jacobi son denotados usualmente por $P_n^{(\alpha,\beta)}$.

La parte radial de los polinomios de Zernike son poliminios de Jacobi, por lo que resulta conveniente mencionar algunas de sus propiedades.

- Los polinomios ortogonales son únicos salvo constante multiplicativa, es necesario definir un valor de normalización que puede variar según diversos autores. Utilizaremos la siguiente normalización :

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}, \quad n \geq 0$$

- La derivada de un polinomio de Jacobi es un polinomio de Jacobi con parámetros desplazados

$$\frac{d}{dt}P_n^{(\alpha,\beta)}(t) = \frac{n+\alpha+\beta+1}{2}p_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(t)$$

- Los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ son solución de la ecuación diferencial

$$(1-t^2)y''(t) - (\alpha-\beta+(\alpha+\beta+2)t)y'(t) + n(n+\alpha+\beta+1)y(t) = 0$$

- La relación a recurrencia a tres términos para los polinomios de Jacobi

$$A_n P_n^{(\alpha,\beta)}(t) = (B_n t + C_n)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(t) - D_n P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(t), \quad n \geq 2,$$

donde

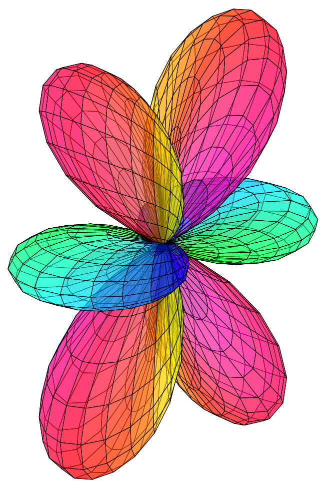
$$\begin{aligned} A_n &= 2n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2), \\ B_n &= (2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2), \\ C_n &= \alpha^2-\beta^2 \\ D_n &= 2(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta). \end{aligned}$$

Ademas $\quad P_0^{(\alpha,\beta)}(t) = 1, \quad P_1^{(\alpha,\beta)}(t) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2)t + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

- Sea Sean $\alpha, \beta > -1$, la fórmula de Rodrigues para cualquier para $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ es la siguiente

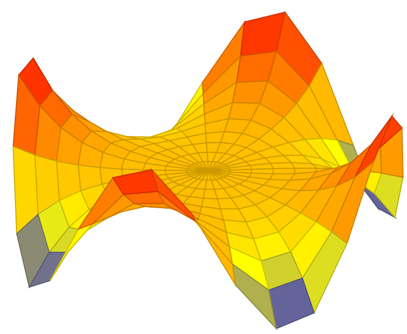
$$(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\alpha}P_n^{(\alpha,\beta)}(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \left[(1-t)^{\alpha+n}(1+t)^{\beta+n}\right]$$

A.6. Codigos fuente de los gráficos usando el paquete Tikz

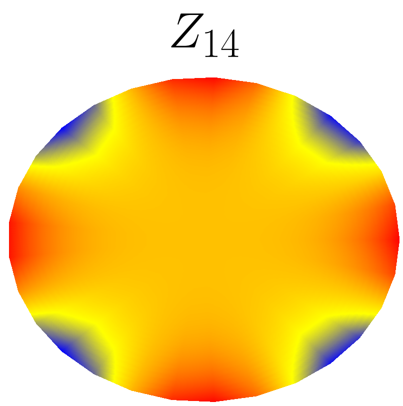


```
\tdplotsetmaincoords{70}{135}
\begin{tikzpicture}[scale=7,line join=bevel,
tdplot_main_coords,fill opacity=.5]
\pgfsetlinewidth{.2pt}
\tdplotsphericalsurfaceplot [parametricfill]{72}{36}
{1.146*sin(\tdplottheta)*
(5*cos(\tdplottheta)*cos(\tdplottheta)-1)
*cos(\tdplotphi))}{black}{\tdplotphi}%
{}%
{}%
{}%
\end{tikzpicture}
```

Z_{14}



```
\tdplotsetmaincoords{70}{135}
\begin{center}
\begin{tikzpicture}[scale=3.2]
   \begin{axis}[title=\begin{Huge}$Z_{14}$\end{Huge}
   ,hide axis, grid=major,view={20}{40},z buffer=sort,
    data cs=polar,shader=faceted,draw=black]
      \addplot3 [surf, domain=0:360, domain y=0:1,
      samples=30,  samples y=10]
      {3.162*y^4*cos(4*x)};
      \end{axis}
\end{tikzpicture}
\end{center}
```




```
\tdplotsetmaincoords{70}{135}
\begin{center}
\begin{tikzpicture}[scale=2.5]
   \begin{axis}[title=\begin{Huge}$Z_{14}$\end{Huge},
   hide axis, grid=major,view={0}{90},z buffer=sort,
    data cs=polar,shader=interp,draw=black]
      \addplot3 [surf, domain=0:360, domain y=0:1,
      samples=30, samples y=30]
      {3.162*y^4*cos(4*x)};
      \end{axis}
\end{tikzpicture
\end{center}
```

Referencias

[1] M. ABRAMOWITZ and I. STEGUN. *Handbook of Mathematical functions, 9th. ed.* Dover Publ, New York, 1970.

[2] G. ARFKEN and H. WEBER. *Mathematical Methods for Physicists, 6th edition*. Elsevier Academic Press, Cambridge University Press, New York, 2005.

[3] R. ASKEY. *Orthogonal Polynomials and Special Functions*. Society For Industrial and Applied Mathematics, Pennsylvania, 1975.

[4] K. ATKINSON and W. HAN. *Spherical Harmonics and Approximations on the Unit Sphere: An Introduction*. Lecture Notes in Mathematics, New York, 2012.

[5] L. E. BLUMENSON. A derivation of n–dimentional spherical coordinates. *The American Mathematical Monthly. 67*, pages 63–66, January 1960.

[6] M. BORN and E. WOLF. *Principles of Optics, 5th ed.* Pergamon, New York, 1975.

[7] T. S. CHIHARA. *An introduction to Orthogonal Polynomials*. Gordon and Breach, 1978.

[8] F. DAI and Y. XU. *Approximation Theory and Harmonic Analysis on Spheres and Balls*. Springer Monographs in Mathematics, New York, 2013.

[9] C. F DUNKL and Y. XU. *Orthogonal Polinomials of Several Variables*. Encyclopedia of Mathematics and its aplications 81, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[10] E. GROSSWALD. *Bessel Polynomials, Lecture Notes in Math. vol. 698*. Springer–Verlag, Berlin-Heidelber-New York, 1978.

[11] C. HOWLAND. The history and methods of ophthalmic wavefront sensing. *J Refract Surg. Vol. 16*, pages S552–S553, 2000.

[12] T. E. PÉREZ L. FERNÁNDEZ and M. A. PIÑAR. On multivariate classical orthogonal polynomials. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. No. 76*, pages 315–329, 2005.

[13] L.THIBOS, R. APPLEGATE, J. SCHWIEGERLIN, and R. WEBB. Standards for reporting the optical aberrations of eyes. *Vision Science and its Applications*, page SuC1, 2000.

[14] V. MAHAJAN. Zernike circle polynomials and optical aberrations of systems with circular pupils. *Applied Optics Vol. 33*, pages 8121–8124, 1994.

[15] D. MALACARA. Polinomios de Zernike para representar la aberración de un frente de onda, EIBPOA 2015.

[16] Y. MEJÍA. El frente de onda y su representación con polinomios de Zernike. *Cien. tecnol. salud. vis. ocul*, 9, No.2:145–166, 2011.

[17] C. MULLER. *Spherical Harmonics.* Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[18] R. NOLL. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *J. Opt. Soc. Am. 66*, pages 207–211, 1976.

[19] M. PAP and F. SCHIPP. Discrete orthogonality of Zernike functions. *Mathematica Pannonica*, 16:137–144, 2005.

[20] D. RAMOS. *Mathamatical modelling in biomedical optics and ophtalmology.* PhD thesis, Universidad de Almería, 2014.

[21] D. RAMOS, M. SÁNCHEZ, and M. FERNÁNDEZ. Optimal sampling patterns for zernike polynomials, (preprint).

[22] G. SZEGÖ. *Orthogonal Polinomials, 4th. ed.* American Mathematical Society, Colloquium Publication, 23, American Mathematical Society, Providence RI, 1975.

[23] L. THIBOS. Wavefront data reporting and terminology. *J Refract Surg. Vol. 17*, pages S578–S583, 2001.

[24] R. VIDAL. Entendiendo e interpretando las aberraciones ópticas. *Cien. tecnol. salud. vis. ocul*, 9, No.2:105–122, 2011.