

# Aplicación de modelos matemáticos para el estudio de Fuerzas de Casimir

Jacinto Daniel Pinto Santos

Tesis previa a la obtención del grado de  
Master en Física



Escuela de Física  
Universidad Nacional Autónoma de Honduras  
Honduras

Noviembre 2014

## *Dedicado a*

A Dios, por permitirme haber alcanzado una meta más, por guiarme por el buen camino y darme las fuerzas necesarias para enfrentar los problemas y poder seguir adelante.

A mi familia por estar pendiente, por cambiarme la vida, por ser el motor que me empuja día a día.

A mis padres por su apoyo, consejos, comprensión, ayuda en los momentos difíciles, y por ayudarme con los recursos necesarios para mi educación.

A mis hermanos por estar siempre presentes, acompañándome para poderme realizar.

# Aplicación de modelos matemáticos para el estudio de Fuerzas de casimir

Jacinto Daniel Pinto Santos

Presentado para el grado de Master en Física

Junio 2015

## Resumen

El efecto Casimir o la fuerza de Casimir es un efecto que se puede estudiar a través de la teoría cuántica de campos, se ha encontrado que si dos objetos metálicos se encuentran muy cerca, separados por una distancia pequeña comparada con el tamaño de los objetos, aparece una fuerza atractiva entre ambos debido a un efecto asociado al vacío.

Se aborda en este trabajo el cálculo de las fuerzas de casimir, utilizando datos experimentales obtenidos de prestigiosas universidades y comparando estos con los cálculos de la teoría cuántica.

El desarrollo de este trabajo involucra el uso de funciones matemáticas que han sido desarrolladas para resolver problemas científicos, la aplicación de las matemáticas a problemas del ámbito de la física y el desarrollo de métodos matemáticos apropiados para estos usos y para el desarrollo de conocimientos físicos, es cada día más frecuente. La teoría espectral de operadores, el análisis funcional, la teoría cuántica de campos son temas que se trataran en este trabajo y el estudio de las mismas requerirá el uso de técnicas matemáticas como ser la regularización de funciones, la función gamma, la función zeta, formulas de Euler entre otras. Se tratara específicamente el efecto casimir entre placas, perfectamente conductoras, en el vacío y la contribución de este trabajo, a la ciencia, incluye el diseño y puesta en marcha de un modelo con el cual se pueda simular el efecto casimir mediante un software. Se estudiara el enfoque teórico del efecto casimir y se llevaran a cabo las comparaciones con los resultados obtenidos experimentalmente, a partir de ello se formulara

el modelo que nos permita estudiar las variables más importantes que contendrá la simulación. El lenguaje de programación a utilizar para nuestro modelo es java script y el objetivo es que la simulación corra directamente desde un navegador web.

# Declaración

La responsabilidad del contenido de esta tesis en el grado de Maestría, me corresponde exclusivamente; y el patrimonio intelectual de la misma a la Universidad Nacional Autónoma de Honduras.

Derechos de autor © 2015 por JACINTO DANIEL PINTO.

# Agradecimientos

A Dios por proveerme de sabiduría y poder de discernimiento para continuar y poder lograr un objetivo más en mi vida.

A mi esposa Yenmy Lisseth Pinto por estar conmigo en todo momento y motivarme a lograr cada meta propuesta.

A mis Hijas Katerine Gisselle Pinto y Kimberly Danely Pinto por comprenderme en los momentos que no les dediqué el tiempo que se merecen.

A mis padres José Daniel Pinto y María Eusebia Santos por apoyarme siempre, a mis hermanos Aracely, Carlos, Suyapa, Jorge, Martha y Javier por estar conmigo en todo momento e impulsarme a alcanzar cada meta establecida.

A la Universidad Nacional Autónoma de Honduras por brindarme la oportunidad de mejorar mi perfil profesional.

A mi asesor, Msc. Alejandro Galo Roldan y al coordinador de la maestría, Dr. Armando Euceda por su paciencia y dedicación en la orientación que me han proporcionado.

A los catedráticos de la Escuela de Física de la Universidad Nacional Autónoma de Honduras por compartir sus conocimientos y su tiempo; y por su pasión a la actividad docente.

A la jefa del Departamento de física de la UNAH-VS, Msc. Brenda Rosita Hulse, por el gran apoyo durante la vida universitaria, por ser un ejemplo a seguir, por enseñarnos a seguir aprendiendo todos los días sin importar las circunstancias y el tiempo.

# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| Resumen  | III       |
| Declaración  | v         |
| Agradecimientos  | VI        |
| <b>1. Introducción</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2. Formulación del Problema y Objetivos</b>                       | <b>11</b> |
| 2.1. Formulación del Problema . . . . .                              | 11        |
| 2.1.1. Identificación del Problema de Investigación . . . . .        | 11        |
| 2.1.2. Descripción del Problema . . . . .                            | 12        |
| 2.1.3. Planteamiento del Problema . . . . .                          | 13        |
| 2.2. Objetivos . . . . .   | 14        |
| 2.2.1. Objetivo General . . . . .                                    | 14        |
| 2.2.2. Objetivos Específicos . . . . .                               | 15        |
| <b>3. Marco Teórico</b>  | <b>16</b> |
| 3.1. Oscilador Cuántico . . . . .                                    | 16        |
| 3.1.1. Normalización de la función de onda del estado base . . . . . | 19        |
| 3.2. Energía cuantizada del oscilador cuántico . . . . .             | 21        |
| 3.3. Modos de campo electromagnético . . . . .                       | 29        |
| 3.4. El Campo Cuantizado . . . . .                                   | 31        |
| 3.5. Efecto Casimir . . . . .  | 33        |
| 3.6. Interacción entre conductores perfectos . . . . .               | 35        |
| 3.7. Fuerza de Casimir en la materia . . . . .                       | 37        |

---

|   |           |
|---|-----------|
| 3.8. Dispersión Espacial de Ondas . . . . .       | 37        |
| 3.9. Enfoque de sistema real . . . . .            | 38        |
| 3.10. Enfoque de sistema artificial . . . . .     | 40        |
| <b>4. Procedimiento y resultados</b>              | <b>42</b> |
| 4.1. Modos Electromagnéticos . . . . .            | 42        |
| 4.2. Placas Conductoras Ideales . . . . .         | 45        |
| 4.2.1. Método I . . . . .                         | 45        |
| 4.2.2. Método II . . . . .                        | 49        |
| 4.3. A cerca de JavaScript . . . . .              | 52        |
| 4.3.1. JavaScript en un Archivo Externo . . . . . | 53        |
| 4.3.2. JavaScript y Navegadores . . . . .         | 53        |
| <b>5. Conclusiones</b>                            | <b>55</b> |
| <b>6. Anexos</b>                                  | <b>57</b> |
| 6.1. Código Javascript . . . . .                  | 57        |
| <b>Bibliografía</b>                               | <b>89</b> |
| <b>Apéndice</b>                                   | <b>92</b> |
| <b>A. Apéndice</b>                                | <b>92</b> |
| A.1. Funciones espectrales . . . . .              | 92        |
| A.2. Función Gamma . . . . .                      | 94        |
| A.3. Fórmula de Abel-Plana . . . . .              | 95        |
| A.4. Fórmula de Euler-Maclaurin . . . . .         | 96        |

# Índice de figuras

|  |    |
|--|----|
| 3.1. Función de potencial general , [9] . . . . .                            | 17 |
| 3.2. Diagrama de niveles energéticos del oscilador cuántico, [9] . . . . .   | 21 |
| 3.3. Funciones de onda del oscilador, [10] . . . . .                         | 27 |
| 3.4. Fluctuaciones de modo electromagnético entre dos espejos, [1] . . . . . | 33 |
| 3.5. Cálculo de $\zeta(-1)$ , . . . . .                                      | 36 |
| 3.6. Placas paralelas, [2] . . . . .   | 38 |
| 3.7. Placas Paralelas [1] . . . . .  | 41 |
| 4.1. Caja metálica para analizar la radiación, [18] . . . . .                | 43 |
| 4.2. Placa insertada en una cavidad a una distancia $R$ de una placa, [19] . | 46 |
| 4.3. Evaluando zeta de Riemann . . . . .                                     | 52 |
| 4.4. Vista Previa de la Simulación . . . . .                                 | 54 |

# Capítulo 1

## Introducción

A lo largo de la historia hemos estudiado el comportamiento de las fuerzas entre moléculas, fuerzas atractivas o repulsivas, científicos e investigadores famosos han dedicado mucho tiempo a este tipo de interacciones; James Prescott Joule, Rudolf Julius Emmanuel Clausius, Robert Boyle, Joseph-Louis Gay-Lussac entre otros hicieron importantes aportaciones a las bases de la termodinámica, sin embargo fue necesario el nacimiento de la mecánica cuántica para empezar a entender el origen de fuerzas atómicas e interatómicas.

Los fenómenos físicos conocidos frecuentemente como Efecto Casimir tienen naturaleza cuántica, estos fenómenos se asocian a la existencia de oscilaciones de vacío de campos cuánticos. Este fenómeno surge debido a que la energía del estado de vacío sufre una distorsión debida a la presencia de contornos.

El cálculo de funciones espectrales está muy relacionado con los cálculos de las primeras correcciones cuánticas de energía de vacío debido a que estas funciones han servido para describir la dinámica de campos. En la actualidad estos aspectos conforman la geometría espectral que tiene aplicaciones en matemáticas y física. En particular la función zeta  $\zeta$  y la traza de Heat Kernel están asociadas a algunos sistemas de contorno que son de gran utilidad para llegar a la regularización orientada a acciones efectivas como el cálculo de energías de casimir.

Debido al constante progreso en las técnicas experimentales, en la actualidad se pueden medir fuerzas de Casimir con gran precisión. Actualmente las fuerzas de casimir son una componente determinante en el diseño y elaboración de micro dispositivos

electromecánicos. Como una aplicación más de las fuerzas de casimir podemos mencionar otras situaciones como ser fenómenos físicos caracterizados por la emisión de luz en líquidos sometidos a ultrasonidos, Según teorías más recientes el ultrasonido genera cavidades o burbujas que colapsan rápidamente, en dicho colapso se generan temperaturas muy elevadas, bajo estas condiciones los electrones son separados de los núcleos de los átomos y se genera lo que se conoce como un plasma, este plasma emitiría cortos e intensos pulsos de luz, a este fenómeno se le conoce como sonoluminiscencia. Cada pulso generado tiene alrededor de un millón de fotones que se encuentran en el rango de la luz visible y la duración de dicha luz es del orden de picosegundos ( $10^{-12}$ ). Justo antes del rápido colapso de la burbuja su radio a disminuido unas diez veces desde su valor inicial considerado unos  $50\mu m$ . Se ha comparado la energía emitida desde una región de estas dimensiones, con la energía promedio transportada por la onda sonora y se ha determinado que en este fenómeno se da una concentración de energía de 12 órdenes de magnitud. Por tanto el Efecto Casimir es un aspecto básico de la teoría cuántica de campos, considerado como una consecuencia de fluctuaciones de vacío de los diferentes modos normales de campos considerados.

La primera predicción del efecto Casimir la dio Hendrik Brugt Gerhard Casimir (1909-2000), fue un físico holandés conocido por su investigación en el modelo de superconductores de dos fluidos en 1934 y por el Efecto Casimir junto a Dirk Pólder en 1946. Casimir había sugerido que debía existir una fuerza atractiva entre dos placas metálicas descargadas, esta fuerza se originaba por el cambio de energía de vacío del campo electromagnético producido por la presencia misma de las placas. Casimir considero un sistema formado por dos placas paralelas perfectamente conductoras y descargadas, ubicadas en el vacío y separadas una distancia muy pequeña comparada con las dimensiones de las placas. Si bien es aceptado que las oscilaciones de punto cero de los campos en el vacío del espacio ilimitado son no observables, la existencia de contornos cambia el escenario. Casimir consideró que se podía medir la diferencia de energía en el punto cero del campo electromagnético en el espacio vacío y la energía de punto cero del mismo en presencia de contornos, es decir  $E_{casimir} = \sum (1/2)\hbar\omega_{con} - \sum (1/2)\hbar\omega_{vac}$ , donde los subíndices se refieren a los modos

normales, de frecuencia  $\omega$  del campo electromagnético en presencia de contornos conductores y en el vacío del espacio no acotado, y las sumas son hechas sobre todos los posibles modos normales del campo en ambas situaciones. El cambio en el espectro de modos normales se debe a la cancelación de la componente tangencial del campo eléctrico sobre la superficie de las placas metálicas y esta es la razón por la cual se produce un efecto observable. La diferencia de energía o  $E_{cas}$  es de carácter simbólico ya que ambas sumas son divergentes. Casimir dio una definición adecuada a estas sumas mediante una técnica conocida como regularización, de la que se pudo extraer un resultado finito para la geometría mencionada, concluyendo que las placas descargadas deberían atraerse entre sí. Para un caso particular se ha observado que para placas de  $1\text{cm}^2$  y una separación entre sí de  $0,5\mu\text{m}$ , la fuerza resultante es aproximadamente  $0,2 \times 10^{-5}\text{N}$ , esta atracción ha sido demostrada por varios experimentos en los últimos años. [20]

Casimir y Polder trabajaban en los laboratorios en Holanda investigando las fuerzas de atracción de Van der Waals que existen entre las partículas suspendidas en un coloide, es decir un sistema formado por dos o más fases, principalmente: una continua, normalmente fluida, y otra dispersa en forma de partículas; por lo general sólidas. Encontraron que, para las separaciones ( $r$ ) relativamente grandes entre las partículas, el potencial era inversamente proporcional a la séptima potencia de ( $r$ ), lo que difería del resultado proveniente de la teoría cuántica para las interacciones intermoleculares, comúnmente denominadas fuerzas dispersivas, en donde el potencial decae inversamente proporcional a la sexta potencia de ( $r$ ). Entonces Casimir y Polder elaboraron una teoría para las interacciones intermoleculares en la que incluyeron el efecto del retardo asociado al tiempo de propagación de la interacción entre las dos moléculas. A partir de este hecho, Bohr sugirió a Casimir que el fenómeno debería estar asociado a las fluctuaciones de vacío. A raíz de esto Casimir decidió estudiar los efectos producidos por las fluctuaciones del campo electromagnético de vacío confinado por dos placas paralelas perfectamente conductoras y separadas por una pequeña distancia. [21]

El estado de mínima energía de un sistema cuántico recibe el nombre de estado de vacío. Para salir del estado de vacío se requiere de un aporte de energía. Las

fluctuaciones del estado de vacío están estrechamente relacionadas con el principio de incertidumbre o de indeterminación de Heisenberg, uno de los principios más importantes en el mundo cuántico, que establece la imposibilidad intrínseca de determinar a la vez dos magnitudes observables y complementarias del sistema, como lo son la posición y la velocidad o la energía y el tiempo. La mínima energía, que es proporcional a la mitad de la frecuencia, es compatible con el principio de incertidumbre. La energía clásica del oscilador, a partir de la cual se define la cuántica, depende del cuadrado de la distancia, parte que corresponde a la energía potencial, y del cuadrado de su velocidad, la parte de la energía cinética. El principio de incertidumbre impone un límite mínimo universal al producto de la incertidumbre de ambas magnitudes. De ahí, surge la mínima energía del oscilador de medio cuanto de energía. En un oscilador clásico, para una frecuencia de oscilación dada, una mayor energía equivale a una amplitud mayor. En el mundo cuántico, equivale a la adición de cuantos de energía de una misma magnitud, proporcional a la frecuencia. La probabilidad de encontrar a la partícula a una distancia cualquiera del centro viene dada en el nivel  $n$  de energía por una distribución de probabilidad, en el estado de mínima energía hay una sola campana de probabilidad, centrada en el origen. Los resultados de repetidas mediciones de la posición de un oscilador de una energía dada se concentran alrededor de ciertos puntos, así pues, lo que clásicamente es continuo y oscilante, cuánticamente parece corpuscular, con un número de corpúsculos mayor cuanto mayor sea la energía. La mecánica cuántica sustituye la partícula puntual del oscilador clásico por una onda que a su vez lleva de nuevo a pensar en partículas. [8]. Para un oscilador encerrado en una cavidad, la frecuencia podrá tomar también solo ciertos valores. Esta no es una peculiaridad cuántica, es lo que ocurre con una cuerda vibrante clásica como un instrumento musical, en cuya vibración se superponen una frecuencia fundamental y sus armónicos. La suma de las energías correspondientes a cada una de las frecuencias de oscilación posibles dentro de la cavidad de un oscilador que se halle en su estado de energía más baja, la energía del punto cero, resulta ser proporcional a una serie infinita es decir:  $1/2 + 3/2 + 5/2 + 7/2 + \dots$ . Esto es un ejemplo del tipo de infinitos con los que la teoría de campos cuánticos ha de trabajar, aquí es donde toman importancia los programas de renormalización

y hay varias formas de abordar este tipo de problemas. Resulta que las series más importantes que aparecen en las teorías de campos cuánticos desde los años treinta del siglo pasado son divergentes, pero las cantidades infinitas como el ejemplo mencionado anteriormente en nada ayudan para darles sentido a fenómenos físicos. Importantes métodos de suma de series divergentes fueron construidos a lo largo del tiempo por diversos matemáticos y ahora llevan sus nombres como ser: Euler, Abel, Cesaro, Borel.

Para el caso de una cuerda fija en ambos extremos, cada punto de una cuerda vibrante describe en el tiempo un movimiento constituido por la superposición de una infinidad de movimientos, cada uno equivale a un oscilador armónico de distinta frecuencia y amplitud. A su vez, entre cada punto de la cuerda será diferente la amplitud de los componentes armónicos de igual frecuencia, en los extremos de la cuerda la amplitud será nula. De manera similar en cada punto del espacio vacío el campo electromagnético es una superposición de oscilaciones armónicas, pero ahora espaciales, en vez de unidimensionales de frecuencia distinta y de todas las energías posibles para cada frecuencia. Se sabe lo que ocurre cuando se someten los osciladores a la mecánica cuántica cada energía posible para una frecuencia dada es una suma de cuantos iguales, de energía proporcional a la frecuencia en cuestión. Cuando se trata de los osciladores que componen el campo electromagnético, se interpreta que sus cuantos de energía son fotones. Hablar de campos electromagnéticos es, en la práctica hablar de la interacción entre objetos materiales cargados: su interacción consiste en la emisión y absorción de esos fotones. Y como ocurre con los osciladores lineales, mientras que en el vacío libre, sin un sistema material que acote el campo, todas las frecuencias tienen el mismo peso, son igualmente importantes, en el interior de una cavidad, donde el campo se refleja una y otra vez por las placas, la situación es muy diferente. Las frecuencias que “cabén” perfectamente dentro de la cavidad son aquellas en que la distancia entre placas es un múltiplo entero de media longitud de onda (las placas han de ser nodos de la vibración); allí amplificadas, constituyen las frecuencias propias, sus “modos resonantes” de vibración, de la “cavidad resonante”. Para las demás longitudes de onda, el campo correspondiente queda atenuado. Es decir, las fluctuaciones de vacío resultan unas reforzadas y otras

atenuadas y contribuyen de manera diversa a la “presión de radiación” del campo. También se sabe ya que no hay osciladores cuánticos de energía nula. Por eso, aun sin fuentes materiales (sistemas de partículas con carga eléctrica) que generen el campo la energía mínima de los osciladores que componen el campo no será nula, de esos estados de energía mínima se dice que son “fluctuaciones del vacío”. En principio, parece que cabría pasar por alto su existencia. Al igual que ocurría con el oscilador armónico, libre o encerrado en una cavidad, la primera impresión es que la energía del campo, libre o encerrado, es infinita. Pero se trataría de un infinito sin efecto, por el que no habría que preocuparse. Lo que importa son las diferencias de energía entre estados físicos, no su valor absoluto. Dónde se ponga el cero de energías es una cuestión de mera conveniencia. Bastaría establecer que el cero de energía es la energía del vacío, y ya no habría que pensar más en ella. El mérito de Casimir estriba en haber descubierto que la energía del vacío, en determinadas circunstancias, sí tiene, pese a todo, consecuencias físicas discernibles. [8].

Casimir descubrió su efecto como un subproducto de la investigación aplicada que llevaba a cabo para Philips: la estabilidad de las suspensiones coloidales que se empleaban en las películas que se depositaban sobre las lámparas y tubos de rayos catódicos. La teoría que habían desarrollado Overbeek y Verwey, en el mismo laboratorio, sobre la estabilidad de las suspensiones de polvo de cuarzo no parecía ser correcta desde el punto de vista experimental la interacción entre partículas debía decaer más rápidamente con la distancia, con la potencia  $r^{-7}$  en lugar de  $r^{-6}$  de la que se deriva la ecuación de Van der Waals de las fuerzas intermoleculares. Overbeek había aventurado que ello podía deberse a la velocidad de propagación de la interacción (la de la luz), que es finita. Tal extremo fue confirmado en un primer trabajo teórico de Casimir y Polder, que aún abordaba el problema en el marco tradicional de las fuerzas de Van der Waals.

Intrigado por la simplicidad del resultado, Casimir se propuso profundizar en el tema. En conversación con Bohr en otoño de 1947, el danés se percató de que allí había algo nuevo y lo relacionó con la energía de punto cero. Puso a Casimir sobre una pista que ya no había de abandonar. Enseguida comprobó que el resultado que había obtenido con Polder podía ser en efecto interpretado como una variación de

la energía de punto cero. El 29 de mayo de 1948 presentó su manuscrito “Sobre la atracción de dos placas perfectamente conductoras” a la sesión de la Real Academia Holandesa de Artes y Ciencias. Fue publicado en la revista de la Asociación ese mismo año.

En un primer paso, haciendo uso de un método de regularización alternativo al de la zeta de Riemann, basado en introducir un corte en las frecuencias, Casimir logró que la energía de las fluctuaciones del vacío tuviese un valor finito, pero no consiguió dar sentido físico a tal valor. Sin otra referencia, lo que se obtiene es simplemente el origen de energías del sistema, que podemos arbitrariamente tomar como cero. Ahora bien, tras pensarlo un poco más, Casimir dio con una idea genial y sencilla a un tiempo. Propuso comparar dos situaciones: la energía de las fluctuaciones del vacío sin más y la correspondiente a las fluctuaciones del vacío en presencia de unas “condiciones de contorno”, es decir, cuando el vacío está sometido a ciertos límites, donde las magnitudes físicas han de tomar valores determinados. La diferencia entre ambas energías tiene un valor intrínseco, independiente de donde hayamos colocado el origen de energías.

En concreto, Casimir consideró el caso de dos placas livianas, ideales, perfectamente conductoras y de extensión infinita (todo en aras de simplificar los cálculos) colocadas en el vacío del campo electromagnético (es decir, en ausencia de un campo ordinario, generado por algún sistema material). Todo campo, incluso en su estado vacío, ejerce una presión de radiación que es proporcional a la energía o frecuencia de los distintos modos de vibración. En una cavidad resonante, la presión de radiación es mayor en el interior que en el exterior, por cuya razón los espejos o placas tienden a separarse. Para los modos fuera de resonancia, en cambio, la presión de radiación en el interior es más baja que en el exterior y las placas experimentan una fuerza de atracción. Resultó, en el caso de las dos placas, que los modos que contribuyen a la fuerza atractiva dominan ligeramente sobre los modos resonantes que tienden a separar las placas. Por consiguiente, sumando todos los efectos, las placas tienden a juntarse. Muy pocos físicos lograron entenderlo en aquella época. Esa fuerza es proporcional al área de las placas e inversamente proporcional a la separación entre las placas elevada a la cuarta potencia, con una constante de pro-

porcionalidad en la que intervienen solamente constantes fundamentales, como la de Planck y la velocidad de la luz. Mediante la fórmula resulta fácil calcular cuál es la fuerza en otras condiciones: mientras que se trata de un valor insignificante para dos placas separadas por metros de distancia, resulta una fuerza muy considerable cuando la separación es de unos pocos nanómetros, que es donde la fuerza de Casimir se convierte en la más importante que actúa entre dos cuerpos neutros. Así, a una separación de 10 nm, cien veces el tamaño de un átomo, el efecto Casimir produce el equivalente a una presión de una atmósfera. No resultó fácil llevar a cabo en el laboratorio el experimento. Las placas nunca tienen extensión infinita, ni son perfectamente conductoras. Intervienen efectos de temperatura, gravitatorios, de rugosidad de las superficies y otros. Hay infinitas distancias entre dos placas paralelas. ¿Cómo determinar que son en efecto paralelas? Las primeras y variadas confirmaciones experimentales del efecto Casimir, llevadas a cabo en los laboratorios de Philips en Eindhoven Holanda, diez años después de la aparición del artículo, subestimaron los diversos errores que aparecen y hoy en día nadie las considera ya verdaderas comprobaciones. Desde entonces se ha avanzado mucho en la detección del efecto. Transcurrieron, sin embargo, 50 años desde la propuesta de Casimir hasta que, en 1997, Steven Lamoreaux, en la Universidad de Washington, llevo a cabo un experimento concluyente. Midió la fuerza de Casimir entre una lente esférica de cuatro centímetros de diámetro y una placa de cuarzo óptico de dos centímetros y medio en diagonal, ambas con un recubrimiento de cobre y oro, conectadas a un péndulo de torsión en el vacío. Al acercar los dos objetos a una distancia de pocas micras, Lamoreaux observó que se atraían con la fuerza predicha. La medición efectuada con el péndulo de torsión reprodujo el resultado de Casimir para esta configuración, estimándose el error en un 5%. El de Lamoreaux fue el punto de partida de varios experimentos aún más precisos que han rebajado el margen de error al 1%. Ahora no cabe la menor duda de que los cálculos de Casimir eran correctos. También se ha utilizado una esfera de poliestireno de 200 micras de diámetro sobre la punta de un microscopio de fuerzas atómicas. Aproximando la esfera, recubierta de aluminio u oro, hasta una distancia de una décima de micra de un disco plano, recubierto de estos metales, se observa la atracción predicha por Casimir, con gran precisión

mediante las desviaciones experimentadas por un rayo láser. Thomas Ederth, del Real Instituto de Tecnología de Estocolmo, llevó a cabo otro experimento, también con un microscopio de fuerzas atómicas, en el que situaba dos cilindros recubiertos de oro en posiciones perpendiculares entre sí y separados por tan sólo 20 nanómetros. En todos estos casos se obtuvieron precisiones del 3% al 5%. Hay que tener en cuenta que esos experimentos no se llevaron a cabo con placas paralelas, según la propuesta original de Casimir, dada la dificultad de controlar con precisión la distancia entre dos placas. Es mucho más sencillo determinar la de una superficie esférica y una placa, que queda definida por la distancia entre los puntos más próximos entre un objeto y el otro. Sin embargo, los cálculos matemáticos que hay que llevar a cabo en este caso son mucho más difíciles e introducen también un pequeño error teórico (que puede controlarse para que quede por debajo del 1% experimental). El error del único experimento llevado a cabo con dos placas, por parte del grupo de G. Bressi, el año 2002, en la Universidad de Padua, con separaciones entre placas de entre 0,5 y 3 micras, no pudo bajarse del 15%. Los experimentos nunca se llevan a cabo en el cero absoluto de temperatura, sino a temperatura ambiente: las fluctuaciones térmicas compiten con las propias del vacío cuántico y enmascaran el resultado. Aunque el efecto térmico resulta irrelevante para separaciones inferiores a la micra (ya que entonces la longitud de onda de la radiación térmica es superior a la distancia entre placas y no “cabe” entre ellas una onda térmica), se ha calculado que es del mismo orden que la propia fuerza de Casimir a distancias superiores a las 7 micras. El debate sobre la contribución de los efectos de temperatura a la fuerza de Casimir prosigue. La fuerza de Casimir se manifiesta también sin necesidad de realizar experimentos específicos para detectarla. En algunos dispositivos micro y nanoelectromecánicos las fuerzas de Casimir no sólo se manifiestan a diario, sino que llegan a constituir un verdadero problema, ya que pegan las plaquitas y ocasionan el mal funcionamiento de las nanomáquinas [8].

Las fuerzas de Casimir son perceptibles en sistemas micro-electro-mecánicos, provocando un mal funcionamiento en estos dispositivos (stiction). En el contexto de unidades de disco duro, el “Stiction” se refiere a la tendencia a pegarse las cabezas de lectura / escritura. La adherencia estática se ve agravada por la humedad y

otros líquidos de condensación en la interface cabeza-disco. En los primeros modelos de unidades de disco duro, los cabezales de lectura / escritura se pegaban a las bandejas de la unidad de disco duro debido a la ruptura de los lubricantes utilizados para recubrir los platos. Pero las altas temperaturas de funcionamiento a menudo conducían a una descomposición acelerada de los lubricantes de superficie en sus componentes. Los discos duros modernos han resuelto en su mayoría el problema “stiction” utilizando rampas o topes para descargar los cabezales de la superficie del disco. Estas rampas aseguran que los cabezales no se toquen. [11].

Hasta ahora se ha expuesto una interpretación correcta del efecto, la que parte de la existencia real de las fluctuaciones del vacío cuántico y las trata como a otras fluctuaciones conocidas. Sin embargo, el propio Casimir era consciente de la posibilidad de otras interpretaciones. De entrada, la que dio en su trabajo con Polder en términos de fuerzas de Van der Waals entre las moléculas dieléctricas del material de las placas. En esencia, no hay tanta diferencia entre las dos aproximaciones, pues las fuerzas de Van der Waals vendrían a ser fuerzas efectivas residuales de interacciones más fundamentales de naturaleza cuántica (lo que en la época de Van der Waals era del todo desconocido). Sin embargo, las fuerzas de Van der Waals tienen un radio de acción más pequeño que la fuerza de Casimir. Según el propio Casimir, en el interior del metal que forma las placas hay fuerzas de cohesión, que cuando uno presiona las placas, juntándolas, comienzan a actuar. [8].

# Capítulo 2

## Formulación del Problema y Objetivos

### 2.1. Formulación del Problema

#### 2.1.1. Identificación del Problema de Investigación

En el departamento de física de la Universidad Nacional Autónoma se necesita, en algunas materias que se imparten, implementar temas de actualidad. Es necesario generar una reflexión sobre la importancia del uso de la tecnología en el proceso enseñanza aprendizaje. La aplicación de la tecnología en el ámbito educativo es vista como algo negativo por algunos docentes, una de las principales razones es que el alumno no se esfuerza por hacer las cosas, por ejemplo, cuando se deja una tarea y el alumno consulta en internet la información, este la transcribe tal y como la encontró. Es por esto que muchos docentes piden a sus alumnos que busquen información sólo en libros, enciclopedias, revistas y diccionarios. Se tiene entonces una actitud tradicional de enseñanza, nos negamos a aceptar y aplicar los adelantos tecnológicos a la actividad educativa. Sí analizamos y comparamos las situaciones, el alumno incurre en el mismo mal hábito cuando consulta un libro que internet, es decir, no explica las cosas con sus propias palabras; entonces podemos afirmar que lo malo no está en la tecnología en sí; sino en el uso y aplicación que se le dé. El gran desarrollo tecnológico que se ha producido recientemente ha propiciado lo que

algunos denominan la nueva revolución social, con el desarrollo de la sociedad de la información. Con ello, se desea hacer referencia a que la información será el motor de una nueva sociedad, y en torno a ella, surgirán profesiones y trabajos nuevos, o se readaptarán las profesiones existentes. [3]

Debido a lo anteriormente expuesto, este trabajo aportara una simulación en la cual el alumno hará uso de la tecnología y al mismo tiempo estará involucrándose en un tema de la física cuántica que será más fácil de comprender al tener la posibilidad de cambiar parámetros y observar cual es el efecto de tales cambios. También pondrá en práctica conocimientos previos como por ejemplo: poder exportar los datos y aplicar técnicas de liberalización que le ayudaran a interpretar constantes físicas con interceptos en los ejes.

### **2.1.2. Descripción del Problema**

En los últimos años, se han diseñado e implementado ambientes de aprendizaje poderosos, que se compenetran con las características de los procesos de aprendizaje en forma efectiva y que involucran una nueva concepción del aprendizaje, se abren las puertas al desarrollo de las técnicas de inteligencia artificial, aprendizaje reforzado y agentes inteligentes que ayuden a la navegación por los sistemas de enseñanza automatizada. [4] La tecnología se vislumbra atendiendo la influencia que tiene en los diferentes ámbitos y a las nuevas estructuras sociales que están emergiendo, produciéndose una interacción constante y bidireccional entre la tecnología y la sociedad. La influencia de la tecnología sobre la sociedad nos conduce a nuevas situaciones y planteamientos que deben llevarnos a través de la investigación y el análisis de sus efectos a tomar posiciones que marquen el camino y la dirección a seguir atendiendo a la sociedad que deseamos construir. Los valores que dinamicen la sociedad serán los mismos que orienten el uso de las tecnologías.

La sociedad de la información en la que estamos inmersos requiere nuevas demandas de los estudiantes y nuevos retos a lograr un nivel educativo, entre ellos: Disponer de criterios y estrategias de búsqueda y selección de la información efectivos que permitan acceder a la información relevante y de calidad, potenciar que los nuevos medios contribuyan a difundir los valores universales sin discriminación

a ningún colectivo, formar a ciudadanos críticos, autónomos y responsables que tengan una visión clara sobre las transformaciones sociales que se van produciendo y puedan participar activamente en ellas, adaptar la educación y la formación a los cambios continuos que se van produciendo a nivel social, cultural y profesional. [4]

### 2.1.3. Planteamiento del Problema

El proceso educativo es un proceso complejo que no admite soluciones drásticas como se ha venido desarrollando. En cuanto a este proceso, algunas contribuciones se refieren a las teorías sobre el aprendizaje, y otras se refieren a soluciones a problemas concretos. Sin embargo, el impacto de las investigaciones en la clase habitual es mínimo, a pesar del esfuerzo realizado en el diseño de proyectos. [5]

Hay muchas sugerencias que parecen atractivas en artículos de revistas educativas pero que son poco efectivas en el aula real, ya que el número de estudiantes puede ser grande, y muchos de ellos no han tenido la oportunidad de fijar los conceptos previos necesarios. [6]

Los cursos de Física han estado centrados en el conocimiento de hechos, teorías científicas y aplicaciones tecnológicas. Las nuevas tendencias pedagógicas ponen el énfasis en la naturaleza, estructura y unidad de la ciencia, y en el proceso de indagación científica. El problema que se presenta al estudiante, es el de transmitir una concepción particular o estructura de conocimiento científico a los estudiantes, de forma que se convierta en componente permanente de su propio conocimiento. [7]

La Física y las demás ciencias encierran en sí mismas un elevado valor cultural. Para la comprensión del mundo moderno desarrollado tecnológicamente, es necesario tener conocimientos de Física. La demanda creciente de conocimiento científico por el público en general, es un indicador del gran impacto social de la revolución científica, como lo indica la existencia de revistas de divulgación, artículos, periódicos, libros. [5]

Los países que deseen estar en los primeros lugares, con industrias competitivas, y aceptable nivel tecnológico, han de potenciar el nivel de calidad de la enseñanza de las ciencias en todos los niveles. Al sistema educativo moderno se le plantea el reto de formar personas altamente preparadas, y con flexibilidad mental para adaptarse a

los cambios que ocasiona la introducción de nuevas tecnologías. Desafortunadamente, la mayoría de los estudiantes considera la Física como una asignatura abstracta, difícil y árida, que es necesario aprobar para pasar un periodo de la carrera universitaria. Esta opinión, se adquiere a lo largo de los cursos de la vida estudiantil, y no cambia substancialmente a lo largo de la carrera universitaria. Se pretende que los estudiantes al finalizar el curso, logren un aprendizaje significativo, es decir, la habilidad de interpretar y usar el conocimiento en situaciones no idénticas a aquellas en las que fue inicialmente adquirido. Para que esto ocurra es necesario ayudar a los estudiantes a:

- Desarrollar y aplicar ideas importantes (principios y leyes) que expliquen un amplio campo de fenómenos en el dominio de la Física.
- Aprender técnicas, y adquirir hábitos o modos de pensar y razonar.

Y en cuanto a las actitudes, se intentará que los estudiantes:

- Sean responsables de su propio proceso de aprendizaje.
- Tengan una actitud positiva hacia la ciencia y en particular, hacia la Física.

Para alcanzar estos objetivos, se pueden emplear los métodos tradicionales de enseñanza, y como complemento importante se puede hacer uso de programas interactivos de ordenador. [5]

## 2.2. Objetivos

### 2.2.1. Objetivo General

Fortalecer el área de estudio de los estudiantes de Licenciatura en Física en la Universidad Nacional Autónoma de Honduras, con temas de actualidad en el área de física cuántica.

### 2.2.2. Objetivos Específicos

- Diseñar una herramienta que facilite la comprensión del efecto Casimir entre dos placas conductoras dispuestas de manera paralela.
- Fortalecer el área de estudio de nuestros estudiantes de física en la Universidad Nacional Autónoma de Honduras, con temas de actualidad en el área de física cuántica.
- Fortalecer el conocimiento de la física cuántica mediante el cálculo de fuerzas entre conductores separados por distancias muy pequeñas.

# Capítulo 3

## Marco Teórico

En esta sección haremos un recordatorio de algunos temas básicos que debemos manejar antes de entrar a nuestro problema, es importante comprender la cuantización del oscilador armónico, partiendo de este sistema veremos como se puede de forma similar, cuantizar el campo electromagnético y describir como la superposición de osciladores armónicos cuánticos independientes, cada uno con su respectiva frecuencia de resonancia.

### 3.1. Oscilador Cuántico

Se analiza aquí el caso de una partícula sujeta a una fuerza de restitución lineal  $F = -Kx$ , donde  $x$  es el desplazamiento de la partícula con respecto a un punto de equilibrio  $x = 0$  y  $K$  es una constante de proporcionalidad. La energía potencial correspondiente está dada por  $U(x) = 1/2Kx^2$ . Un sistema físico que se ajusta a esta descripción es una masa unida a un resorte, pero la descripción matemática en realidad se aplica a cualquier objeto que realice pequeños desplazamientos alrededor de un punto de equilibrio estable. [9]

En la función general, mostrada en la figura 3.1, las posiciones  $a, b$  y  $c$  son todos puntos de equilibrio donde la fuerza es cero, es decir  $F = -dU/dx = 0$ . Además, las posiciones  $a$  y  $c$  son ejemplos de equilibrio estable, pero  $b$  es inestable. La estabilidad del equilibrio se determina analizando las fuerzas en la vecindad inmediata del punto de equilibrio. Justo a la izquierda de  $a$ , por ejemplo,  $F = -dU/dx$  es positiva, es

decir la fuerza está dirigida hacia la derecha; por el contrario, a la derecha de  $a$  la fuerza está dirigida hacia la izquierda. En consecuencia, una partícula ligeramente desplazada con respecto al punto de equilibrio en  $a$  encuentra una fuerza que la devuelve al punto de equilibrio (Fuerza de restitución). Un razonamiento semejante demuestra que el equilibrio en  $c$  también es estable. Por otra parte, una partícula desplazada en cualquier dirección con respecto al punto  $b$  experimenta una fuerza que la aleja aun mas del punto equilibrio, lo cual es una condición inestable. En general, el equilibrio estable e inestable se identifica por curvas de potencial cóncavas o convexas, respectivamente, en el punto de equilibrio. [9] Para plantearlo de otra forma, la curvatura de  $d^2U/dx^2 > 0$  en el punto de equilibrio estable y negativa  $d^2U/dx^2 < 0$  en el punto de equilibrio inestable.

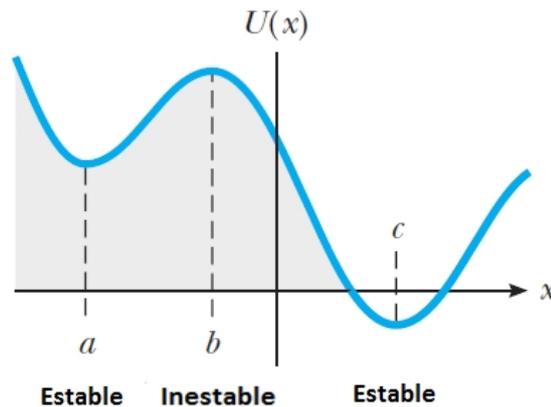


Figura 3.1: Función de potencial general , [9]

Cerca de un punto de equilibrio estable, como  $a$  ó  $c$ ,  $U(x)$  pueden ajustarse bastante bien mediante una parábola:

$$U(x) = U(a) + \frac{1}{2}K(x - a)^2 \quad (3.1.1)$$

Por supuesto, la curvatura de esta parábola debe corresponder a la de  $U(x)$  en el punto de equilibrio  $x = a$  [9]:

$$K = \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=a} \quad (3.1.2)$$

Además,  $U(a)$ , la energía potencial en el punto de equilibrio puede tomarse como cero si se establece que esta sea la energía de referencia; es decir, sí todas las energías

se miden a partir de este nivel. En la misma línea de pensamiento, el origen de coordenadas puede ubicarse en  $x = a$ , permitiendo, en efecto, hacer  $a = 0$ . Con  $U(a) = 0$  y  $a = 0$ , nuevamente la ecuación 3.1.1 se vuelve el potencial de un resorte; en otras palabras, una partícula limitada a pequeños desplazamientos alrededor de cualquier punto de equilibrio estable se comporta como si estuviese sujeta a un resorte con una constante de rigidez prestita por la curvatura del potencial verdadero en equilibrio. De esta manera, el oscilador se vuelve una primera aproximación a las vibraciones que ocurren en muchos sistemas reales. [9] El movimiento de un oscilador clásico con masa  $m$  es una vibración armónica simple de frecuencia angular  $\omega = \sqrt{K/m}$ . Si la partícula se aleja del equilibrio una distancia  $A$  y luego se libera, oscila entre los puntos  $x = A$  y  $x = -A$  donde  $A$  es la amplitud de la vibración, con una energía total  $E = 1/2KA^2$ . Al cambiar el punto inicial en que se libera  $A$ , es posible proporcionar a la partícula clásica en principio cualquier energía (no negativa), incluso cero. [9]

El oscilador cuántico se describe por la energía potencial  $U(x) = 1/2Kx^2 = 1/2m\omega^2x^2$  en la ecuación de Schrodinger. Luego de reordenar la expresión se obtiene

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2} \left( \frac{1}{2}m\omega^2x^2 - E \right) \psi(x) \quad (3.1.3)$$

También, con el objetivo de encontrar la solución al estado fundamental, puede ser escrita de manera conveniente como [9]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi(x) = E\psi(x) \quad (3.1.4)$$

Se propone una solución de la siguiente forma

$$\psi(x) = Ce^{-\alpha x^2/2} \quad (3.1.5)$$

Sustituyendo esta función en la ecuación de Schrodinger, mediante la evaluación de la derivada segunda [9],

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = -C\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha x^2/2}2x \quad (3.1.6)$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -C\alpha e^{-\alpha x^2/2}2x + C\alpha^2x^2e^{-\alpha x^2/2} = [-\alpha + \alpha^2x^2]\psi \quad (3.1.7)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}[-\alpha + \alpha^2 x^2]\psi + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi(x) = E\psi(x) \quad (3.1.8)$$

Para que esto sea una solución a la ecuación de Schrodinger para todos los valores de  $x$ , los coeficientes de cada potencia de  $x$  deben ser iguales. Eso nos da un método para fijar las condiciones de contorno de la ecuación diferencial. Estableciendo los coeficientes del cuadrado de  $x$  iguales entre sí [9]:

$$-\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 = 0 \quad \alpha = \frac{m\omega}{\hbar} \quad (3.1.9)$$

Luego, estableciendo los términos constantes iguales, da la energía

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \quad (3.1.10)$$

Este es un resultado físico muy importante, ya que nos dice que la energía de un sistema descrito por un potencial de oscilador armónico, no puede tener un valor cero, como se menciono anteriormente. Los sistemas físicos tales como los átomos en una red sólida o las moléculas poliatómicas en un gas, no puede tener energía cero incluso a la temperatura del cero absoluto. La energía del estado vibracional fundamental, es referida a menudo como "vibración de punto cero". [10]

De esta manera, se descubre que la función de onda en 3.1.5, describe el estado base del oscilador, y que la energía en este estado está dada por 3.1.10. La constante  $C$  se determina normalizando la función de onda  $\psi_0$  del estado base.

### 3.1.1. Normalización de la funcion de onda del estado base

El procedimiento de Normalización de la funcion de onda del estado base brinda la posibilidad de encontrar la constante  $C$  en 3.1.5 La probabilidad de que una particula se eencuentre en el intervalo infinitesimal  $dx$  alrededor de un punto  $x$  denotada po  $P(x)dx$  es [10]:

$$P(x)dx = |\psi(x, t)|^2 dx \quad (3.1.11)$$

Por lo que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0(x)|^2 dx = C^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-m\omega x^2/\hbar} dx \quad (3.1.12)$$

La integral anterior se puede relacionar con la integral resuelta de manera predeterminada:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{usando } a = m\omega/\hbar \quad (3.1.13)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0(x)|^2 dx = C^2 \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} \quad (3.1.14)$$

La normalización requiere que esta integral sea igual a la unidad, lo que nos lleva a que

$$C = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \quad (3.1.15)$$

Para obtener los estados excitados del oscilador, puede seguirse un procedimiento semejante al del estado base. El primer estado excitado debe ser antisimétrico alrededor del punto medio y presentar exactamente un nodo. [9] Debido a la antisimetría, este nodo debe encontrarse en el origen, de modo que una solución debe ser  $\psi(x) = xe^{-\alpha x^2}$ , al sustituir esta función en la ecuación 3.1.4 se obtiene la misma  $\alpha$  que antes, junto con la energía del primer estado excitado,  $E_1 = 3/2\hbar\omega$ . De esta manera es posible generar otros estados excitados del oscilador con sus respectivas energías, aunque rápidamente el procedimiento se vuelve demasiado laborioso para ser práctico. Por lo que se recurre a un método sistemático, como el método de desarrollo en series de potencias, el cual nos lleva a poder representar las energías permitidas del oscilador [10].

El diagrama de niveles energéticos que se obtiene para el oscilador cuántico se muestra en la figura 3.2.

Es importante destacar la separación uniforme de los niveles, ampliamente reconocida como el sello característico del espectro del oscilador armónico. La diferencia de energía entre los niveles adyacentes es justamente  $\Delta E = \hbar\omega$ . [9]

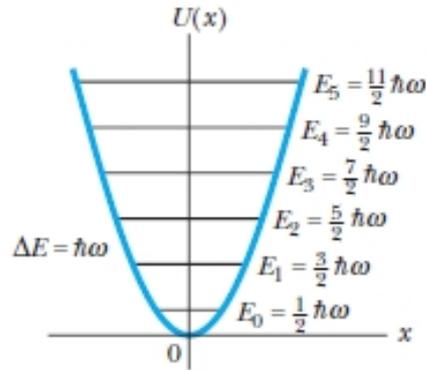


Figura 3.2: Diagrama de niveles energéticos del oscilador cuántico, [9]

## 3.2. Energía cuantizada del oscilador cuántico

En esta sección se abordará nuevamente el oscilador cuántico, haciendo uso de operadores llamados operadores de escalera para resolver la ecuación de Schrodinger

3.1.4

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi(x) = E\psi(x) \quad (3.2.1)$$

Esta expresión puede ser tratada de manera conveniente haciendo algunas sustituciones y utilizando reglas de conmutación, se propone el siguiente cambio de variable [12]:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} q \quad (3.2.2)$$

Con este cambio de variable 3.2.1 toma otra apariencia

$$\frac{\hbar\omega}{2} \left( -\frac{d^2}{dq^2} + q^2 \right) = E\psi(q) \quad (3.2.3)$$

Prestando atención en lo que hay dentro del paréntesis del Hamiltoniano, podemos ver que se puede descomponer algebraicamente en tres términos, el primero de los cuales es un producto de dos factores [12]:

$$-\frac{d^2}{dq^2} + q^2 = \left( -\frac{d}{dq} + q \right) \left( \frac{d}{dq} + q \right) + \frac{d}{dq} q - q \frac{d}{dq} \quad (3.2.4)$$

Los últimos dos términos pueden ser simplificados viendo cuál es la acción de ambos sobre una función diferenciable cualquiera  $f(q)$ :

$$\left(\frac{d}{dq}q - q\frac{d}{dq}\right)f(q) = \left(\frac{d(qf(q))}{dq} - q\frac{df(q)}{dq}\right)f(q) = f(q) \quad (3.2.5)$$

La acción de dichos términos sobre la función consiste en regresarnos la misma función. Entonces dichos términos juntos representan un operador identidad:

$$\frac{d}{dq}q - q\frac{d}{dq} = 1 \quad (3.2.6)$$

Por tanto

$$-\frac{d^2}{dq^2} + q^2 = \left(-\frac{d}{dq} + q\right)\left(\frac{d}{dq} + q\right) + 1 \quad (3.2.7)$$

Con esto y tras una redistribución del factor 1/2, la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico simple se convierte en:

$$\hbar\omega \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dq} + q\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dq} + q\right) + \frac{1}{2} \right] \psi(q) = E\psi(q) \quad (3.2.8)$$

Podemos ver aquí como se definen los dos operadores escalera con los que estaremos trabajando:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dq} + q\right) \text{ Operador de ascenso} \quad (3.2.9)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dq} + q\right) \text{ Operador de descenso} \quad (3.2.10)$$

Definidos de este modo los operadores de creación y aniquilación, la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico simple toma la siguiente forma mucho más sencilla que la forma original [12]:

$$\hbar\omega \left[ a^\dagger a + \frac{1}{2} \right] \psi(q) = E\psi(q) \quad (3.2.11)$$

Luego se define el operador de momentum  $p$  (se ha hecho  $\hbar = 1$ ) como:

$$p = \frac{1}{i} \frac{d}{dq} \quad (3.2.12)$$

Al conmutar este operador con  $q$ , se encuentra que:

$$[q, p] = qp - pq = i \quad (3.2.13)$$

se tiene entonces para el operador de creación: Al conmutar este operador con  $q$ , se encuentra que:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{d}{dq} + q \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (q + ip) \quad (3.2.14)$$

y para el operador de aniquilación:

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{d}{dq} + q \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (q - ip) \quad (3.2.15)$$

Una relación importante que inevitablemente sale a relucir cuando por curiosidad tomamos el conmutador del operador de creación  $a$  y el operador de aniquilación  $a^\dagger$  es que el conmutador de ambos operadores escalera es igual a la unidad [12]:

$$[a, a^\dagger] = \frac{1}{2} [q + ip, q - ip] = \frac{1}{2} ([q, -ip] + [ip, q]) = \frac{-i}{2} ([q, p] + [q, p]) = 1 \quad (3.2.16)$$

Conservando todas las constantes físicas en su posición original. Si hacemos esto, obtenemos lo siguiente para los operadores de creación y aniquilación, se destaca el hecho de que por la presencia tanto en la relación para  $a^\dagger$  como en la relación  $a$  del operador del momentum  $p$ , el cual es un operador diferencial de primer orden en la Mecánica Ondulatoria, ambos operadores también son a su vez operadores diferenciales:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x + \frac{ip}{m\omega} \right) \quad (3.2.17)$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x - \frac{ip}{m\omega} \right) \quad (3.2.18)$$

Sí volvemos a tomar el conmutador de estos dos operadores, volvemos a obtener el equivalente de un operador identidad sin que aparezca constante física alguna en ello:

$$[a, a^\dagger] = \frac{1}{2\hbar} (-i[x, p] + i[p, x]) = \frac{1}{2\hbar} (-i(i\hbar) + i(-i\hbar)) = \frac{1}{2\hbar} (\hbar + \hbar) = 1 \quad (3.2.19)$$

Tomando ahora el producto de ambos operadores en el orden  $a^\dagger a$ , definiremos un operador de número  $\hat{N}$ :

$$\hat{N} = a^\dagger a \quad (3.2.20)$$

En esta última expresión,  $\hat{N}$  no se trata de un simple número, sino de un operador. Tomando en cuenta de que tanto  $a^\dagger$  como  $a$  están definidos sobre un operador del momentum que es un operador diferencial bajo el contexto de la Mecánica Ondulatoria, podríamos resaltar el hecho utilizando algún distintivo para resaltar que se trata de operadores, por ejemplo mediante el uso de “sombros” puestos encima de las literales como acostumbran hacerlo en algunos textos. Volviendo a la notación más general bajo la cual la referencia simbólica se aplica a operadores diferenciales en Mecánica Ondulatoria, y llevando a cabo la multiplicación en el orden indicado en la definición del operador de número, se tiene [12]:

$$\hat{N} = a^\dagger a = \left( \frac{m\omega}{2\hbar} \right) \left( x^2 + \frac{p^2}{m^2\omega^2} \right) + \left( \frac{i}{2\hbar} \right) [x, p] \quad (3.2.21)$$

Que colocando de nuevo el operador Hamiltoniano de energía  $H$  se va simplificando hasta llegar a:

$$\hat{N} = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \quad (3.2.22)$$

Luego

$$\hat{H} = \left( \hat{N} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad (3.2.23)$$

Este está directamente relacionado con las eigenfunciones de onda para cada estado estacionario del oscilador, por simplicidad utilizaremos la notación bra-ket de Dirac en lugar de la notación regular, lo cual significa:

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \psi_0 \\ |1\rangle &= \psi_1 \\ |2\rangle &= \psi_2 \\ |n\rangle &= \psi_n \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

Trabajando con eigenkets en lugar de funciones de onda, y aplicando el operador Hamiltoniano obtenido arriba al eigenket general, se tiene:

$$\hat{H} | n \rangle = \left( \hat{N} + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega | n \rangle \quad (3.2.25)$$

Ahora bien, si evaluamos el conmutador  $[\hat{N}, a]$ , llegamos a la siguiente relación operacional [12]:

$$\begin{aligned} [\hat{N}, a] &= [a^\dagger a, a] \\ [\hat{N}, a] &= a^\dagger a a - a a^\dagger a \\ [\hat{N}, a] &= a^\dagger - a^\dagger a a + a^\dagger a a a a^\dagger a \\ [\hat{N}, a] &= a^\dagger (a a - a a) + (a^\dagger a - a a^\dagger) a \\ [\hat{N}, a] &= [a^\dagger, a] a \\ [\hat{N}, a] &= -a \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

Del mismo modo, si evaluamos el conmutador  $[\hat{N}, a^\dagger]$ , llegamos a la siguiente relación operacional:

$$\begin{aligned} [\hat{N}, a^\dagger] &= [a^\dagger a, a^\dagger] \\ [\hat{N}, a^\dagger] &= a^\dagger a a a^\dagger - a^\dagger a^\dagger a \\ [\hat{N}, a^\dagger] &= a^\dagger (a a^\dagger - a^\dagger a) \\ [\hat{N}, a^\dagger] &= a^\dagger [a, a^\dagger] \\ [\hat{N}, a^\dagger] &= (a^\dagger) 1 \\ [\hat{N}, a^\dagger] &= a^\dagger \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

Como consecuencia de lo anterior, se tiene:

$$\begin{aligned}
\hat{N}a^\dagger | n \rangle &= (\hat{N}a^\dagger - a^\dagger \hat{N} + a^\dagger \hat{N}) | n \rangle \\
&= ([\hat{N}, a^\dagger] + a^\dagger \hat{N}) | n \rangle \\
&= (a^\dagger + a^\dagger \hat{N}) | n \rangle \\
&= (a^\dagger \hat{N} + a^\dagger) | n \rangle \\
&= (\hat{N} + 1)a^\dagger | n \rangle \\
&= (n + 1)a^\dagger | n \rangle
\end{aligned} \tag{3.2.28}$$

$$\begin{aligned}
\hat{N}a | n \rangle &= (\hat{N}a - a\hat{N} + a\hat{N}) | n \rangle \\
&= ([\hat{N}, a] + a\hat{N}) | n \rangle \\
&= (-a + a\hat{N}) | n \rangle \\
&= (\hat{N}a - a) | n \rangle \\
&= (\hat{N} - 1)a | n \rangle \\
&= (n - 1)a | n \rangle
\end{aligned} \tag{3.2.29}$$

Estas últimas dos relaciones implican que  $a^\dagger | n \rangle$  es un eigenket de  $\hat{N}$  con el eigenvalor elevado (o disminuído) en una unidad. Puesto que la elevación (o el descenso) de  $n$  en una unidad equivale a la creación (o la destrucción) de un cuanto de energía  $\hbar\omega$ , esto proporciona la razón del por qué se ha utilizado el término operador de creación (operador de aniquilación en el caso de  $a$ ) [12].

La secuencia descendente debe terminar con  $n = 0$  y los valores permitidos de  $n$  deben ser enteros no negativos. En virtud de que el valor más pequeño posible de  $n$  es cero, el estado fundamental o estado base del oscilador tiene como energía [12]:

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \tag{3.2.30}$$

Tal como se menciona en 3.1.10

Después de hacer algunas operaciones, también puede demostrarse que:

$$\left( \frac{a}{\sqrt{n}} \right) | n \rangle = | n - 1 \rangle \tag{3.2.31}$$

$$\left( \frac{a^\dagger}{\sqrt{n+1}} \right) |n\rangle = |n+1\rangle \quad (3.2.32)$$

Sí aplicamos sucesivamente el operador de creación  $a^\dagger$  al estado fundamental del oscilador armónico simple, podemos ver que emerge el siguiente patrón:

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \psi_1 = a^\dagger |0\rangle \\ |2\rangle &= \psi_2 = \left[ \frac{(a^\dagger)^2}{\sqrt{2}} \right] |0\rangle \\ |3\rangle &= \psi_3 = \left[ \frac{(a^\dagger)^3}{\sqrt{3 \cdot 2}} \right] |0\rangle \\ |n\rangle &= \psi_n = \left[ \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \right] |0\rangle \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

Se ha logrado de este modo la construcción de eigenkets simultáneos del operador de número  $N$  y del operador Hamiltoniano  $H$  con los eigenvalores de energía:

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad (3.2.34)$$

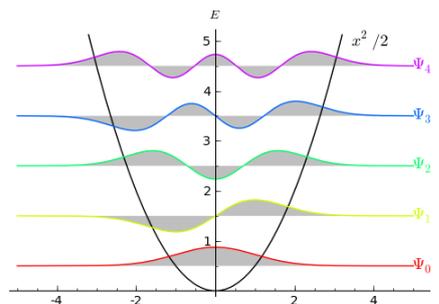


Figura 3.3: Funciones de onda del oscilador, [10]

La solución de la ecuación de Shrodinger para los primeros estados de energía, da las funciones de onda que se observan en la figura 3.3 . La probabilidad de encontrar una partícula en cualquier intervalo  $[ab]$ , es igual al área bajo la curva de la densidad de probabilidad en función de  $x$ . Nótese que las funciones de onda para un mayor  $n$ , tienen más jorobas o máximos y mínimos. Esto corresponde a una longitud de onda más corta, por lo que tienen un momento más alto, y por lo tanto más alta

energía. Las funciones de onda del oscilador armónico cuántico, contienen la forma gaussiana que les permite satisfacer las condiciones de contorno impuestas [10].

El Hamiltoniano para un oscilador armónico cuántico, desde el punto de vista de la mecánica clásica esta expresado como:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad (3.2.35)$$

En el Hamiltoniano cuántico, los términos  $p$  y  $q$  se convierten en operadores mecano-cuánticos en un espacio de Hilbert. Además las ecuaciones de Heisenberg del movimiento tienen igual forma que las ecuaciones de Hamilton clásicas [1],

$$\dot{q} = \frac{1}{i\hbar}[q, H] = \frac{p}{m} \quad (3.2.36)$$

$$\dot{p} = \frac{1}{i\hbar}[p, H] = -m\omega^2 q \quad (3.2.37)$$

En las ecuaciones anteriores se ha utilizado la regla de conmutación

$$[p, H] \equiv qp - pq = i\hbar \quad (3.2.38)$$

Haremos uso del operador no Hamiltoniano

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p - im\omega q) \quad (3.2.39)$$

Y su adjunto

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p + im\omega q) \quad (3.2.40)$$

Por lo que podemos plantear las ecuaciones de  $p$  y  $q$  como [1]:

$$q = i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a - a^\dagger) \quad (3.2.41)$$

$$p = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a + a^\dagger) \quad (3.2.42)$$

Se observa que la regla de conmutación de los operadores de posición y momento, satisface  $[a, a^\dagger] = 1$  como se demostró anteriormente. Después de aplicar lo anterior el Hamiltoniano para el oscilador armónico se puede escribir como: [2]

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega(aa^\dagger + a^\dagger a) = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right) \quad (3.2.43)$$

En donde se ha utilizado el operador de número  $N = a^\dagger a$ . Debido a esta razón los niveles de energía del oscilador armónico quedan determinados a partir de los eigenvalores del operador  $N$ .

Debido a que los eigenvalores de  $H$  de la ecuación son positivos 3.2.35, la secuencia de estados generados por iteraciones de 3.2.35 debe converger por lo que los eigenvalores de  $N$  deben ser números enteros positivos, entonces los niveles de energía del oscilador armónico quedan determinados por:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad n = 0, 1, 2, 3\dots \quad (3.2.44)$$

- $\Delta q_n \Delta p_n = (n + 1/2)\hbar$  donde  $(\Delta q_n)^2 \equiv \langle n | q^2 | n \rangle - \langle n | q | n \rangle^2$ . Esto es consistente con la relación de incertidumbre general  $\Delta q_n \Delta p_n \geq \hbar/2$  y se observa que el estado base del oscilador armónico es un estado de mínima incertidumbre, es decir que el estado base es un estado coherente del oscilador armónico. [13]

### 3.3. Modos de campo electromagnético

Ahora estudiamos los modos de campo donde se muestra que dichos campos son equivalentes a un oscilador armónico, este desarrollo se convierte en una forma de cuantización del campo electromagnético. Recordando las ecuaciones de Maxwell para un campo libre en una región encerrada dentro de una cavidad sin fuentes [1]:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (3.3.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.3.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.3.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (3.3.4)$$

Sí ahora utilizamos  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  donde  $\vec{A}$  es el potencial vectorial. La ecuación 3.3.3 es la ecuación de Faraday, esta implica  $\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t - \nabla\phi$  donde  $\phi$  representa el potencial escalar. Cuando el sistema se encuentra en ausencia de fuentes, es decir  $\rho = 0$  y  $J = 0$ , se podrá utilizar la norma de Coulomb ( $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ ), mientras que la ecuación 3.3.4 llamada ecuación de Ampere- Maxwell se puede expresar [1]:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0, \quad (3.3.5)$$

Se trata entonces de resolver la ecuación 3.3.5, al utilizar separación de variables y las condiciones de frontera adecuadas, la solución tiene la forma [1]:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \alpha(t)\vec{A}_0(\vec{r}) + \alpha^*(t)\vec{A}_0^*(\vec{r})$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \alpha(0)e^{-i\omega t}\vec{A}_0(\vec{r}) + \alpha^*(0)e^{i\omega t}\vec{A}_0^*(\vec{r}) \quad (3.3.6)$$

Las ecuaciones 3.3.6 representan las soluciones de 3.3.5 para el espacio libre en la norma de Coulomb, donde  $\vec{A}_0(\vec{r})$  satisface la ecuación de Helmholtz [1]:

$$\nabla^2 \vec{A}_0(\vec{r}) + k^2 \vec{A}_0(\vec{r}) = 0 \quad (3.3.7)$$

Mientras que  $\alpha(t)$  es la solución de la ecuación diferencial del movimiento del oscilador armónico, es decir  $\ddot{\alpha}(t) = -\omega^2\alpha(t)$ . Donde  $k$  es una variable de separación que se encuentra cuantizada por las condiciones de contorno que le fueron impuestas al potencial en las paredes de la cavidad por lo que  $k \rightarrow k_n$  y  $\omega = kc$ . La ecuación de eigenvalores de 3.3.7 nos remite a la primera cuantización del campo. Finalmente al utilizar las ecuaciones de Maxwell, se concluye que el campo eléctrico y magnético están dados por [1]:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c}[\dot{\alpha}(t)\vec{A}_0(\vec{r}) + \dot{\alpha}^*(t)\vec{A}_0^*(\vec{r})] \quad (3.3.8)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \alpha(t)\nabla \times \vec{A}_0(\vec{r}) + \alpha^*(t)\nabla \times \vec{A}_0^*(\vec{r}) \quad (3.3.9)$$

De manera similar la energía electromagnética queda:

$$H_F = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) d^3r = \frac{k^2}{2\pi} |\alpha(t)|^2 \quad (3.3.10)$$

Donde

$$\int |\vec{A}_0(\vec{r})|^2 = 1, \quad (3.3.11)$$

La expresión anterior implica que  $\vec{A}_0$  esta normalizada. [1] Ahora retomamos las ecuaciones para  $q(t)$  y  $p(t)$

$$q(t) = \frac{i}{c\sqrt{4\pi}} [\alpha(t) - \alpha^*(t)] \quad (3.3.12)$$

$$p(t) = \frac{k}{\sqrt{4\pi}} [\alpha(t) + \alpha^*(t)] \quad (3.3.13)$$

Por lo tanto la expresión para la energía en 3.3.10 se puede plantear en función de  $p$  y  $q$

$$H_F = \frac{1}{\sqrt{2}} (p^2 + \omega^2 q^2) \quad (3.3.14)$$

Hay que tomar en cuenta que 3.3.14 no es el Hamiltoniano clásico del oscilador armónico con frecuencia  $\omega$ , lo cual implica que el campo electromagnético en la primera cuantización es la superposición de osciladores armónicos clásicos, un oscilador para cada modo propio de oscilación [1].

## 3.4. El Campo Cuantizado

Hemos observado que para describir los modos de campo, solo es necesario describir el oscilador armónico y relacionarlo con dichos campos. Si prestamos atención a las ecuaciones 3.2.41, 3.2.42, 3.3.12, 3.3.13 entonces podemos sustituir  $\alpha(t)$  y  $\alpha^*(t)$  de la teoría clásica por los operadores de aniquilación y creación de la teoría mecano-cuántica, luego el potencial vectorial para la teoría cuántica queda como [1]:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega}} [a(t)\vec{A}_0(\vec{r}) + a^\dagger(t)\vec{A}_0^*(\vec{r})] \quad (3.4.1)$$

La expresión anterior corresponde a un solo modo de frecuencia y los respectivos operadores del campo eléctrico y magnético son

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i\sqrt{2\pi\hbar\omega}[a(t)\vec{A}_0(\vec{r}) + a^\dagger(t)\vec{A}_0^*(\vec{r})] \quad (3.4.2)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega}}[a(t)\nabla \times \vec{A}_0(\vec{r}) + a^\dagger(t)\nabla \times \vec{A}_0^*(\vec{r})] \quad (3.4.3)$$

Por tanto, el Hamiltoniano para el caso de campos cuantizados se puede expresar [1]

$$H_F = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (3.4.4)$$

Mientras que sus eigenvalores siguen siendo

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.4.5)$$

En la ecuación anterior  $n$  es un entero que representa el nivel de excitación del modo, en todo caso puede interpretarse como el numero de cuantos de energía que tendrá el campo en el estado  $|n\rangle$ . Por otro lado se sabe que cada fotón tiene una energía equivalente a  $\hbar\omega$  y su estado base corresponde al vacío donde no habrá fotones  $|0\rangle$ , pero sí hay energía de hecho su valor corresponde a  $\hbar\omega/2$ . [1] La teoría cuántica de radiación hace referencia a la existencia de la energía del punto cero para los campos electromagnéticos, el estado base. El valor esperado del campo magnético y eléctrico en los demás estados estacionarios  $|n\rangle$  es

$$\langle \vec{B}(\vec{r}, t) \rangle = \langle \vec{E}(\vec{r}, t) \rangle = 0 \quad (3.4.6)$$

Pero el promedio del cuadrado del campo  $\vec{E}$  no es nulo, es:

$$\langle \vec{E}^2(\vec{r}, t) \rangle = 4\pi\hbar\omega |\vec{A}_0(\vec{r})|^2 n + \langle \vec{E}^2(\vec{r}, t) \rangle_0 \quad (3.4.7)$$

donde

$$\langle \vec{E}^2(\vec{r}, t) \rangle_0 = 2\pi\hbar\omega |\vec{A}_0(\vec{r})|^2 \quad (3.4.8)$$

La ecuación 3.4.8 representa el promedio del cuadrado del campo eléctrico cuando está en el estado base. [1]

La expresión 3.4.7 muestra que los vectores de campo eléctrico y magnético en el estado  $|n\rangle$  no son cero sino que sufren fluctuaciones con promedio cero, por lo tanto el campo tendrá energía finita equivalente a  $(n + 1/2)\hbar\omega$

Los últimos resultados muestran que el vacío electromagnético es un estado estacionario del campo con fluctuaciones de los campos magnético y eléctrico. El vacío, desde el punto de vista de la teoría de la física de partículas elementales, es un espacio lleno de campos de energía, que lo configuran, esta energía es la energía del punto cero o ZPE (zero-point-energy). [14]

En general una cavidad tiene un número infinito de modos cuya frecuencia no está acotada, esto implica que la energía total de punto cero es una cantidad infinita. [1]

### 3.5. Efecto Casimir

El efecto casimir trata de la existencia de fuerzas entre objetos separados distancias muy cortas. Este efecto es medible y consiste en dos objetos metálicos separados por una distancia pequeña comparada con el tamaño de los objetos en los cuales aparece una fuerza atractiva entre ambos debido a un efecto asociado al vacío cuántico.

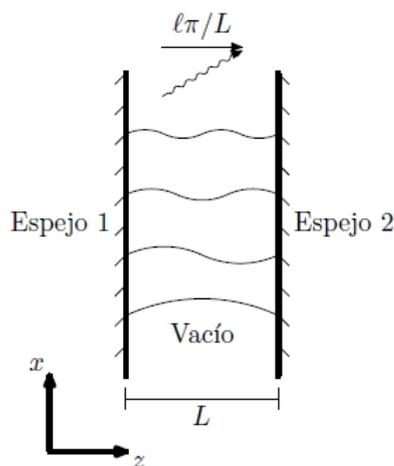


Figura 3.4: Fluctuaciones de modo electromagnético entre dos espejos, [1]

Para comprender mejor este efecto, haremos uso de dos espejos colocados uno frente al otro de tal manera que sean paralelos al eje  $xy$  como se puede observar en la figura 3.4, por simplicidad se supone que el campo electromagnético se propaga solamente en la dirección  $z$ . En la sección anterior mencionamos que el campo electromagnético dentro de una cavidad puede fluctuar libremente siempre que se satisfagan las condiciones de frontera en los espejos, es decir que las superficies de

los espejos deben ser planos nodales de campo. Esto nos lleva a la primera cuantización del campo que es proporcional a  $\sin(kz)$  donde  $k$  representa el número de onda. Para  $z = L$  se debe cumplir que  $\sin(kL) = 0$  por lo que, en forma general:

$$k_l = \frac{l\pi}{L}, \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (3.5.1)$$

Donde hemos utilizado el sub índice  $l$  para no entrar en confusiones con  $n$  utilizado en 3.2.44 para la energía.

Cada componente independiente de campo, dentro de la cavidad, la representáremos por  $\phi$ , donde  $\phi$  satisface la ecuación de onda:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = 0 \quad (3.5.2)$$

Que se puede expresar como

$$\frac{d^2}{dt^2} \phi_{kl} = -k_l^2 c^2 \phi_{kl} \quad (3.5.3)$$

$k_l$  es el número de onda y  $l$  es el  $l$ -ésimo oscilador, nuevamente se observa que el campo electromagnético se puede describir como la superposición de osciladores armónicos independientes, cada oscilador tiene su propia frecuencia de resonancia  $\omega_l = k_l c$ .

Esto conlleva a la segunda cuantización de campo electromagnético, por lo que la eigen-energía se puede expresar ahora:

$$E_{nl} = \left( n_l + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_l \quad n_l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.5.4)$$

Al sustituir  $\omega_l = k_l c$  y la ecuación 3.5.1 en la ecuación 3.5.4, obtenemos una expresión para la energía total en el sistema

$$U = \frac{\pi \hbar c}{L} \sum_l \left( n_l + \frac{1}{2} \right) l \quad (3.5.5)$$

El resultado obtenido en 3.5.5, que representa la energía total del sistema, nos permitirá en la siguiente sección calcular la fuerza entre placas paralelas.

## 3.6. Interacción entre conductores perfectos

Inicialmente vamos a considerar nuevamente los espejos conductores perfectos, para comprender en qué consiste la fuerza de Casimir. Si los campos electromagnéticos entre los espejos se encuentra en su estado base, es decir  $n_l = 0$  en la ecuación 3.5.5, la energía será

$$U = \frac{\pi \hbar c}{2L} \sum_{l=1}^{\infty} l \quad (3.6.1)$$

La expresión anterior muestra una cantidad que diverge, es decir que la energía del estado base es infinita, esto se puede relacionar como ejemplo con la llamada catástrofe ultravioleta.

La catástrofe ultravioleta, es un fallo de la teoría clásica del electromagnetismo al explicar la emisión electromagnética de un cuerpo en equilibrio térmico con el ambiente. De acuerdo con las predicciones del electromagnetismo clásico, un cuerpo negro ideal en equilibrio térmico debía emitir energía en todos los rangos de frecuencia; de manera que a mayor frecuencia, mayor energía.

En 1900, cuando Max Planck explicó una contradicción de las teorías físicas establecidas en ese entonces mediante la adición de un postulado. Dichas teorías predecían que un cuerpo que absorbiera toda la luz y la energía que incidiera sobre él emitiría una cantidad infinita de energía, esta contradicción se solucionó asumiendo que la energía no puede tener valores arbitrarios, sino que esta viene por paquetes de determinado tamaño, es decir que esta cuantizada. [15] En este caso argumentaremos el por qué de dicha divergencia, respaldándonos en los aspectos poco físicos inherentes con la definición de espejo perfecto. Sabemos además que arriba de ciertas frecuencias los metales tienden a volverse transparentes, esta razón es la base fundamental por la cual consideramos una frecuencia de corte correspondiente a un valor de  $l$  que elimine de manera conveniente la divergencia. Una manera rápida, matemáticamente hablando, consiste en tomar la parte finita de la sumatoria, así que se usara una técnica llamada regularización mediante la función zeta de Riemann. [16]

Reescribimos la ecuación 3.6.1 de la siguiente manera

$$U(s) = \frac{\pi \hbar c}{2L} \sum_{l=1}^{\infty} l^s = \frac{\pi \hbar c}{2L} \zeta(-s) \quad (3.6.2)$$

La función zeta de Riemann está definida como:

$$\zeta(s) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s} \quad (3.6.3)$$

Al utilizar algún programa orientado a realizar cálculos de problemas matemáticos, en esta caso utilizamos MAPLE y al calcular  $\zeta(-1)$  se obtiene  $\zeta(-1) = -1/12$  como se muestra en la figura 3.5

De la expresión anterior, si  $s$  es positiva, la suma converge. Además se observa que para  $s = 1$  la serie  $U(1) = U$  la serie diverge, además  $\zeta(-1) = -1/12$  es finita.

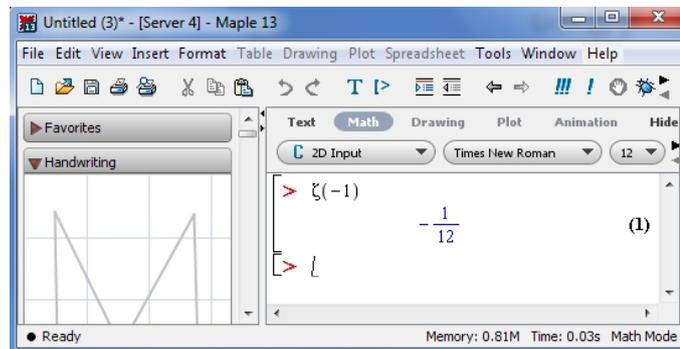


Figura 3.5: Cálculo de  $\zeta(-1)$  ,

Al hacer uso de los resultados de la función zeta de Riemann la energía adopta un valor finito:

$$U = -\frac{\pi \hbar c}{24L} \quad (3.6.4)$$

Por lo que ahora se puede plantear una expresión para la fuerza:

$$F = -\frac{dU}{dL} \quad (3.6.5)$$

Por lo que ahora se puede plantear una expresión para la fuerza:

$$F = -\frac{dU}{dL} = 2 \frac{\pi \hbar c}{24L^2} = \frac{\pi \hbar c}{12L^2} \quad (3.6.6)$$

En la expresión anterior se ha duplicado el resultado debido a que la luz tiene dos estados de polarización transversal independientes. [20]

### 3.7. Fuerza de Casimir en la materia

En la sección anterior se considero únicamente el caso de espejos idealizados, pero en el caso real los espejos se vuelven transparentes a frecuencias suficientemente altas por ejemplo si la frecuencia de la luz es igual a la frecuencia de alguna transición electrónica del material con el cual se elaboró el espejo, este podrá absorber los campos eléctrico y magnéticos. En el caso que haya disipación en el sistema, no hay un formalismo del Hamiltoniano para poder describir los campos, esta es la principal razón por la cual se utiliza el modelo de ciertos tipos de osciladores armónicos para describir los materiales que componen los espejos, además que supone que los osciladores armónicos están distribuidos homogéneamente.

En el caso de materiales arbitrarios, se puede obtener deducciones simples para la fuerza de Casimir, en los cuales habrá que estudiar la dependencia y estructura a través de las amplitudes de reflexión., por lo que en dicho estudio se abarca una amplia gama de materiales como ser: aislantes, isotrópicos, homogéneos, transparentes, opacos.

### 3.8. Dispersión Espacial de Ondas

Se denomina dispersión espacial de la constante dieléctrica a la dependencia de  $\epsilon$  respecto del vector de onda  $k$  del campo electromagnético. En el caso que no haya absorción  $k = 2\pi/\lambda$  donde  $\lambda$  es la longitud de onda en el medio [17]

En un prisma la luz blanca se separa y esta separación genera los colores, este es un ejemplo de dispersión óptica, conocido también como dispersión temporal, se debe distinguir la dispersión temporal con la dispersión espacial. La dispersión temporal está relacionada con el índice de refracción del material, dicho índice determina la desviación angular de una onda electromagnética cuando esta pasa a través de una interface, por lo que depende de la frecuencia de la onda. La solución de las ecuaciones de Maxwell nos ayudan a estudiar la propagación de las ondas electromagnéticas en medios materiales, en este caso la función dieléctrica juega un papel importante ya que en ella se encuentra toda la información referente a las propiedades de la materia. El retraso entre el tiempo en el cual actúa el campo eléctrico

y el tiempo en el cual aparece en el medio la corriente, es el origen de la dispersión temporal. En el caso de la dispersión espacial, una excitación debida al campo eléctrico afecta al punto donde se aplique dicho campo, pero también afectara a los puntos de la vecindad. Se utilizara el modelo hidrodinámico para hacer cálculos de la dispersión espacial en el efecto Casimir, este modelo el metal es considerado como un gas de electrones con fondo inmóvil, ocurre una interacción entre los electrones dando como resultado gradientes de presión y de densidad electrónica del metal. Según el principio de exclusión de Pauli se llega a una compresibilidad finita de la nube de electrones por lo que hay una dependencia directa de la función dieléctrica en el vector que representa la onda y a la propagación de las ondas longitudinales, así mismo se verán modificados los coeficientes de reflexión de Fresnel, en los cuales se incluyen los campos transversales, estas modificaciones es necesario tenerlas en cuenta a la hora de calcular la fuerza de Casimir. [1]

### 3.9. Enfoque de sistema real

En este capítulo se tiene como objetivo buscar una expresión para representar la fuerza de casimir entre dos placas mediante una formulación sencilla, general y que no requiere del empleo de modelos específicos sobre la materia que conforma las placas en estudio. [1]

Supóngase que se tiene un sistema  $S$  formado por dos placas paralelas 1 y 2 separadas entre sí una distancia  $L$  por una cavidad  $\nu$  como se ilustra en la figura 3.6

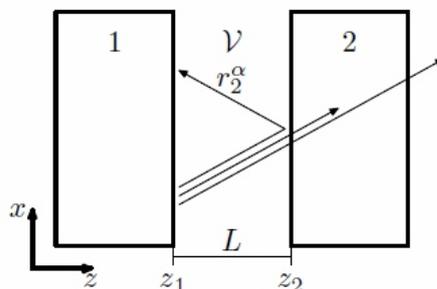


Figura 3.6: Placas paralelas, [2]

Estas placas pueden ser sistemas más complejos, como por ejemplo varias pelícu-

las ya sea que están unidas o separadas, transparentes u opacos, medios homogéneos o inhomogéneos, disipativos o no, locales o con dispersión; pero para simplificar nuestro estudio las llamaremos placas simplemente. La interface de cada una de las placas está colocada sobre el eje  $z$  en  $z_a$ . Además, el sistema se puede considerar como una placa infinita a lo largo del plano  $xy$  en el cual mantiene una simetría de carácter traslacional.

Consideremos ahora que un fotón, dentro de la cavidad  $\nu$ , con polarización  $\alpha$  incide sobre una de las placas  $a$ , y se refleja con una amplitud de probabilidad  $r_a^\alpha$  y se transmite hacia un material con probabilidad  $T_a^\alpha = 1 - |r_a^\alpha|^2$ , donde puede absorberse y excitar grados de libertad vibracionales y electrónicos debido a los diferentes niveles energéticos que se pueden dar en función de las interacciones entre los electrones y el núcleo entre electrones entre sí, o transmitirse más allá de la placa donde posteriormente se perderá. Debido a que los fotones pueden absorberse, el campo electromagnético del sistema real forma un sistema cuántico abierto en el cual la cantidad de partículas y la energía no son cantidades que se conservan. Debido a lo anterior, nuestro sistema no se puede ser descrito cuánticamente por lo que se debe introducir explícitamente los grados de libertad de la materia que conforman al sistema, por lo que se requiere hacer modelos microscópicos de los mismos. Sin embargo, en el equilibrio termodinámico habrán fotones proveniente del vacío más allá de las placas y otros serán radiados por el material mismo. Estos compensarían a los fotones en  $\nu$  perdidos por transmisión y por absorción. Estos fotones tendrán una probabilidad  $T_a^\alpha$ . Entonces se puede concluir que las propiedades de radiación dentro de la cavidad  $\nu$  dependen únicamente de la geometría del sistema, misma que está caracterizada por la separación  $L$  entre las placas y por los coeficientes de reflexión  $r_a^\alpha$ , que caracterizan la naturaleza óptica de las placas. Se puede desarrollar una formulación para la fuerza de Casimir sin hacer suposiciones sobre la composición de las placas; la información de importancia se halla contenida en  $r_a^\alpha$ .

### 3.10. Enfoque de sistema artificial

Ahora estudiamos el sistema a través de un sistema ficticio, observe la figura 3.7, este sistema  $S'$  estará formado por dos películas muy delgadas, ubicadas en  $z_a$  de forma similar al sistema real  $S$ . Definimos las amplitudes de reflexión ficticias iguales a las que se definieron para las placas reales  $r_a^\alpha$ . De esta manera se garantiza que el campo de radiación en un punto dentro de la cavidad ficticia sea el mismo dentro de la cavidad del sistema real. También se asume que en el sistema ficticio los fotones se pueden transmitir de la cavidad hacia el espacio vacío con una amplitud de transmisión  $t_a^\alpha$ . Además se debe cumplir que  $|t_a^\alpha|^2 + |r_a^\alpha|^2 = 1$ , asegurando la conservación de la energía, la ganancia aquí es que no es necesario tomar en cuenta los grados de libertad internos de las películas ficticias. Ahora, podemos concentrarnos en estudiar los eigenestados del campo electromagnético en  $S'$  sin involucrar los estados vibracionales o electrónicos. Las ecuaciones de Maxwell rigen el campo dentro y fuera de la cavidad, y ciertas condiciones de contorno de las superficies internas  $z = z_a$ . Para poder discretizar y contar los modos, le asignamos un tamaño finito  $W = L_I + L_{II} + L_{III}$  al sistema ficticio completo y se asignan condiciones de contorno homogéneas, que pueden ser de Dirichlet, Neuman o de von Karman, en las superficies externas  $z = z_0, z_3$ , tomando al final del cálculo los límites.

$$W = L_I + L_{II} + L_{III}\infty.$$

La figura 3.7 muestra el sistema artificial. Aquí  $L_I$  y  $L_{II}$  son los anchos de las regiones vacías de  $S'$  antes y después de las placas, consideradas muy delgadas 1 y 2, respectivamente, y  $L_{III} = L$ . Habiendo fijado los valores de  $L_I$  y  $L_{III}$ , cada fotón que deje la cavidad ficticia, retornara a ella después de visitar las regiones I y/o III con una fase determinada. Esta fase varia rápidamente con la frecuencia y con el tamaño del sistema si  $L_I$  y  $L_{III}$  son suficientemente grandes, por lo que promediando los resultados sobre un enlace de sistemas de longitud diferentes se puede simular la fase aleatoria esperada en el sistema real. El problema se simplifica de manera significativa cuando lo tratamos como un sistema no quiral, es decir que se tratara el sistema como uno en el cual las partículas no forman parte de un sistema de

referencia dextrógiro o levógiro. Esto trae como consecuencia que las ondas electromagnéticas cuyo campo se halle polarizado en la dirección perpendicular al plano de incidencia, formado por el vector de onda incidente y el vector que es normal a la superficie, se trata entonces de un campo con polarización  $s$ , y este no se mezcla con las ondas cuyo campo magnético es perpendicular al plano de incidencia, es decir un campo con polarización  $p$ . También se tratara el problema como un sistema invariante a rotaciones en el plano  $xy$ .

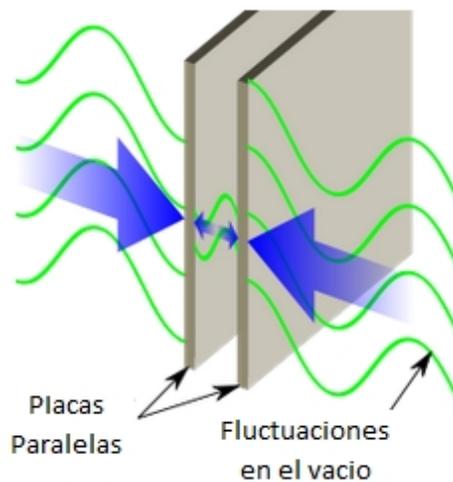


Figura 3.7: Placas Paralelas [1]

# Capítulo 4

## Procedimiento y resultados

Hemos visto que los modos de campo cuántico oscilatorio tiene un espectro de energía que se puede asimilar al de un oscilador armónico, esto genera el origen formal del vacío cuántico. La energía quedó definida en 3.2.44 también se concluyó que aun en el estado cero de cuantos, es decir para  $n = 0$ , se tiene una energía finita para el modo  $E_0 = \hbar\omega/2$ . Ahora definimos el número de modos para cualquier campo oscilatorio, por unidad de frecuencia y por unidad de volumen en un sistema isotrópico y homogéneo.

### 4.1. Modos Electromagnéticos

Considerando una cavidad cerrada que contiene un pequeño agujero, la temperatura es constante en las paredes de la cavidad. La energía que es emitida por las paredes que están en equilibrio termodinámico, llenará la cavidad. Pero una pequeña cantidad de la radiación escapará por el pequeño agujero, a esta radiación emitida se le denomina radiación del cuerpo negro. Se a encontrado experimentalmente que el espectro emitido por el agujero solo depende de la temperatura  $T$  y no del material de la que está elaborada la caja. Véase la figura 4.1, una caja de paredes metálicas de tamaño  $L_x, L_y, L_z$ , a la cual determinaremos los modos electromagnéticos posibles , inicialmente estudiaremos el campo eléctrico de la radiación.

El campo eléctrico  $\vec{E}$  paralelo a las superficies debe anularse debido a que las paredes son conductoras, En el interior de la cavidad se cumple la ecuación de ondas

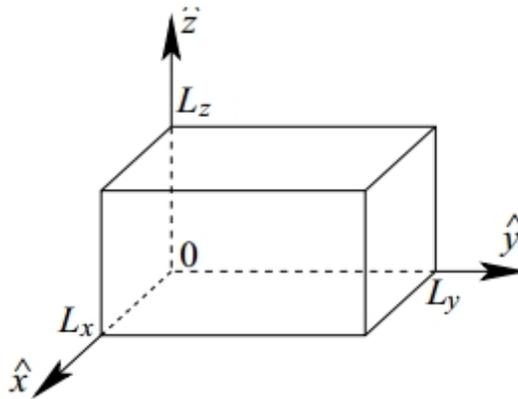


Figura 4.1: Caja metálica para analizar la radiación, [18]

libres que rigen el campo eléctrico  $\vec{E}$ :

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1.1)$$

Proponemos soluciones de la forma:

$$\vec{E} = E_x(x, y, z, t)\hat{x} + E_y(x, y, z, t)\hat{y} + E_z(x, y, z, t)\hat{z} \quad (4.1.2)$$

donde

$$E_x(x, y, z, t) = \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) e^{i\omega t} \quad (4.1.3)$$

$$E_y(x, y, z, t) = \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) e^{i\omega t} \quad (4.1.4)$$

$$E_z(x, y, z, t) = \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) e^{i\omega t} \quad (4.1.5)$$

Además se deben satisfacer las siguientes condiciones de frontera:

$$E_x(x, y, 0, t) = E_x(x, y, L_z, t) = 0 \quad (4.1.6)$$

$$E_x(x, 0, z, t) = E_x(x, L_y, z, t) = 0$$

$$E_y(0, y, z, t) = E_y(L_x, y, z, t) = 0$$

$$E_y(x, y, 0, t) = E_y(x, y, L_z, t) = 0$$

$$E_z(0, y, z, t) = E_z(L_x, y, z, t) = 0$$

$$E_z(x, 0, z, t) = E_z(x, L_y, z, t) = 0$$

La ecuación 4.1.5 satisface las condiciones 4.1.6 si elegimos  $\vec{k}$  tal que:

$$\sin(k_x L_x) = 0 \quad (4.1.7)$$

$$\sin(k_y L_y) = 0$$

$$\sin(k_z L_z) = 0$$

Esto implica que los vectores de onda  $k_i$ , para  $i = x, y, z$  no pueden ser arbitrarios y deben tener la siguiente recurrencia

$$k_i = \frac{n_i \pi}{L_i} \quad (4.1.8)$$

Si elegimos el módulo al cuadrado del vector de onda como  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ . Luego relacionamos el vector de onda  $k$  con la frecuencia angular  $\omega$  de las ondas electromagnéticas

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (4.1.9)$$

La expresión anterior recibe el nombre de relación de dispersión.

Ahora procedamos a calcular cuántos modos existen, que poseen un vector de onda con magnitud entre  $k$  y  $k + \Delta k$

De acuerdo a la ecuación 4.1.8 se concluye que para cada componente, la separación entre vectores de onda contiguos es:

$$\Delta k_x = \frac{\pi}{L_x}, \Delta k_y = \frac{\pi}{L_y}, \Delta k_z = \frac{\pi}{L_z} \quad (4.1.10)$$

Cabe mencionar que  $n_i$  pueden variar solo en un entero, es decir  $\Delta n_i = 1$ . Luego cada modo oscilatorio de campo electromagnético ocupará en el espacio  $k$  un volumen equivalente a:

$$\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z = \frac{\pi}{L_x} \frac{\pi}{L_y} \frac{\pi}{L_z} = \frac{\pi^3}{V} \quad (4.1.11)$$

## 4.2. Placas Conductoras Ideales

### 4.2.1. Método I

Desarrollaremos, a continuación, una teoría para determinar la fuerza de Casimir a partir del confinamiento en las fluctuaciones cuánticas. Considerando dos placas paralelas conductoras en presencia de campos electromagnéticos del vacío.

Consideremos una cavidad cúbica del volumen  $V = L^3$ , es decir  $L_x = L$ ,  $L_y = L$  y  $L_z = L$ , delimitada por paredes perfectamente conductoras e insertamos, una placa cuadrada perfectamente conductora con lados de longitud  $L$ , dentro de la cavidad cúbica de tal manera que dicha placa es paralela a la cara  $xy$  y vamos a comparar la situación en la que esta placa se encuentra a una pequeña distancia de una desde la cara  $xy$  y la situación en la que se encuentra en una distancia muy grande, por ejemplo  $L/2$ . En ambos casos, la expresión  $1/2 \sum \hbar\omega$  implica la suma sobre todas las posibles frecuencias de resonancia en la cavidad, desde luego como se menciono antes está cantidad es divergente y carente de sentido físico. Pero la diferencia de energía para las dos situaciones mencionadas, es decir  $1/2(\sum \hbar\omega)_I - (1/2 \sum \hbar\omega)_{II}$  tiene un valor definido y es interpretado como la interacción entre la placa conductora y la cara que está en  $xy$ .

Las posibles vibraciones de la cavidad definidas por

$$0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq L, \quad 0 \leq z \leq R \quad (4.2.1)$$

tienen números de onda

$$k_x = \frac{n_x \pi}{L}, \quad k_y = \frac{n_y \pi}{L}, \quad k_z = \frac{n_z \pi}{R} \quad (4.2.2)$$

Donde  $n_x, n_y, n_z$  son enteros positivos, además

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (4.2.3)$$

Para cada  $k_x, k_y, k_z$  corresponden dos ondas estacionarias excepto en el caso cuando  $n_i = 0$ , en este caso solamente hay una. Para el caso de  $k_x, k_y$  que pueden ser consideradas variables continuas, tomamos como referencia la figura 4.2 la diferencia de energía puede ser expresada como:

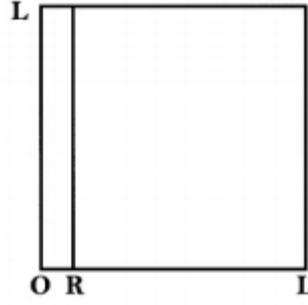


Figura 4.2: Placa insertada en una cavidad a una distancia  $R$  de una placa, [19]

$$\Delta E = E_R + E_{L-R} - E_L \quad (4.2.4)$$

A Las paredes conductoras de la caja se le imponen condiciones de contorno de Dirichlet sobre los posibles modos de EM de la cavidad. La componente tangencial del campo electromagnético debe desaparecer allí como se muestra en 4.1.6.

En el vacío, la frecuencia angular  $\omega_n$  está relacionada con el número de onda  $k_n$  y la velocidad de la luz  $c$ :

$$\omega_n = ck_n \quad (4.2.5)$$

Donde  $k_n$  está dada por 4.2.3. La energía de punto cero del campo se encontró en el capítulo 2:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} \hbar \omega_n = \frac{1}{2} \hbar ck_n = \frac{1}{2} \hbar c \sum \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad (4.2.6)$$

Por supuesto, la cavidad es grande de tal manera que  $R \ll L$  puede sustituir la suma con una integral y obtener las energías:

$$E_L = \frac{2L^3}{\pi^3} \int \int \int_0^\infty \frac{1}{2} \hbar c \left( \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \right) dk_x dk_y dk_z \quad (4.2.7)$$

$$E_{L-R} = \frac{2L^2(L-R)}{\pi^3} \int \int \int_0^\infty \frac{1}{2} \hbar c \left( \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \right) dk_x dk_y dk_z \quad (4.2.8)$$

$$E_R = \sum_{n=0}^{\infty} 2\theta_n \frac{L^2}{\pi^2} \int \int_0^\infty \frac{1}{2} \hbar c \left( \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2} \right) dk_x dk_y \quad (4.2.9)$$

Donde  $n \equiv n_z$ , con el objetivo de no estar llevando el sub índice a través de todos los cálculos. Además definimos una nueva función  $\theta$  donde:

$$\theta_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n > 0 \\ 1/2 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Debido al diferente número de estados de polarización de  $k$ . La notación de  $\theta_n$  se puede descartar mediante la adopción de los límites de la suma de menos infinito en lugar de cero, sin embargo, esta notación la utilizaremos más adelante en la fórmula de Euler-Maclaurin.

La suma y las integrales de 4.2.9 son divergentes por lo tanto es necesario introducir una función de corte,  $f(k/K_c)$ , que tiene las propiedades:

$$f(k/k_c) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } k \ll k_c \\ 0 & \text{si } k \gg k_c \end{cases}$$

La razón que justifica esta función es que cualquier material conductor se vuelve transparente a frecuencias suficientemente altas, es la frecuencia mínima de oscilación a la cual los electrones en el conductor pueden soportar. Por debajo de la frecuencia de corte, el conductor refleja las ondas electromagnéticas que dan lugar a las condiciones de contorno descritas anteriormente. Mientras que por encima de la frecuencia de corte, los electrones son capaces de oscilar en resonancia, esto significa que el conductor es transparente a los fotones por encima de una cierta frecuencia, y las condiciones de contorno ya no se cumplen.

Ahora, la ecuación de la diferencia de energía expresada en 4.2.4 tendrá la forma:

$$\begin{aligned} \Delta E = & \sum_{n=0}^{\infty} 2\theta_n \frac{L^2}{\pi^2} \int \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \hbar c \left( \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2} \right) dk_x dk_y \\ & + \frac{2L^2(L-R)}{\pi^3} \int \int \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \hbar c \left( \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \right) dk_x dk_y dk_z \\ & - \frac{2L^3}{\pi^3} \int \int \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \hbar c \left( \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \right) dk_x dk_y dk_z \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

A continuación simplificaremos la expresión 4.2.10 al definir una expresión  $g(k_z)$ :

$$g(k_z) = \int \int_0^{\infty} f \frac{k}{k_c} \left( \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \right) dk_x dk_y \quad (4.2.11)$$

Entonces

$$\Delta E = \hbar c \frac{L^2}{\pi^2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n g\left(\frac{n\pi}{R}\right) - \frac{R}{\pi} \int_0^{\infty} g(k_z) dk_z \right] \quad (4.2.12)$$

Mediante sustitución de variables mediante el uso de coordenadas polares en el plano  $xy$  se obtiene

$$g(k_z) = \frac{4\pi}{8} \int_0^{\infty} f\left(\frac{\sqrt{k_\rho^2 + k_z^2}}{k_c}\right) \left(\sqrt{k_\rho^2 + k_z^2}\right) k_\rho dk_\rho \quad (4.2.13)$$

Luego hacemos una segunda sustitución de variables,  $k_z = n\pi/R$  y  $k_\rho = \alpha\pi/R$  para obtener:

$$g(k_z) = \frac{\pi}{2} \frac{\pi^3}{R^3} \int_0^{\infty} f\left(\frac{\pi\sqrt{n^2 + \alpha^2}}{Rk_c}\right) \left(\sqrt{n^2 + \alpha^2}\right) \alpha d\alpha \quad (4.2.14)$$

Posteriormente  $\omega = n^2 + \alpha^2$  y  $d\omega = 2\alpha d\alpha$

$$g(k_z) = \frac{\pi}{2} \frac{\pi^3}{R^3} \int_0^{\infty} f\left(\frac{\pi\sqrt{\omega}}{Rk_c}\right) \left(\sqrt{\omega}\right) \frac{\alpha d\alpha}{2} \quad (4.2.15)$$

A continuación definiremos una segunda expresión  $F(n)$  tal que:

$$F(n) = \int_{n^2}^{\infty} \sqrt{\omega} f\left(\frac{\pi\sqrt{\omega}}{Rk_c}\right) d\omega \quad (4.2.16)$$

$g(z)$  puede escribirse de manera condensada

$$g(z) = \frac{\pi^4 F(n)}{4R^3} \quad (4.2.17)$$

De igual manera las expresiones 4.2.12 queda:

$$\Delta E = \frac{\hbar c L^2 \pi^2}{4R^3} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n F(n) - \int_0^{\infty} F(n) dn \right] \quad (4.2.18)$$

La diferencia entre la sumatoria y la integral pueden ser aproximadas usando la formula de Euler-Maclaurin:

$$\left[ \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n F(n) - \int_0^{\infty} F(n) dn \right] = -\frac{1}{6x^2!} F'(0) + \frac{1}{30x^4!} F'''(0) - \dots \quad (4.2.19)$$

Necesitamos calcular las derivadas de  $F(n)$ , al utilizar 4.2.16

$$F'(n) = -2n^2 f\left(\frac{n^2\pi}{Rk_c}\right) \quad (4.2.20)$$

Por lo que

$$F'(0) = 0 \quad y \quad F'''(0) = -4 \quad (4.2.21)$$

Las derivadas de orden superior contienen en termino  $(\pi/Rk_c$ , por lo que se obtiene para  $\Delta E$ :

$$\Delta E = -\frac{\hbar c L^2 \pi^2}{720 R^3} \quad (4.2.22)$$

Por lo que ahora se puede plantear una expresión para la fuerza por unidad de área:

$$F_A = -\frac{\partial(\Delta E)}{\partial R} = -\frac{\hbar c \pi^2}{240 R^4} \quad (4.2.23)$$

En signo negativo en 4.2.23, indica el carácter atractivo de la fuerza entre placas. La presencia de  $\hbar$  indica que la fuerza de Casimir por unidad de área es muy pequeña, por lo que su origen pertenece a la mecánica cuántica.

### 4.2.2. Método II

En la sección anterior se consideró un método para calcular la fuerza de Casimir entre placas conductoras. A continuación usaremos un segundo método con el objetivo de llegar a dicha fuerza, se trata de una transformación matemática más avanzada conocida como función zeta de regularización. Considerando el mismo sistema de placas paralelas conductoras vamos a plantear la energía de vacío por unidad de área del sistema:

$$\frac{E}{A} = \frac{\hbar}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega dk_x dk_y \quad (4.2.24)$$

Aquí los límites de la suma toman en consideración los dos estados de polarización para  $k \neq 0$ . Ahora, la suma en 4.2.24 es divergente, con el objetivo de evitar que la suma no sea convergente vamos a dividir por potencias de  $s$  y al final de procedimiento tomaremos el caso en el cual  $s = -1$ , que es el caso que nos compete aquí. La expresión de energía de manera regularizada se puede expresar:

$$\frac{E(s)}{A} = 2 \frac{\hbar}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega dk_x dk_y \Big|_{s=-1} \quad (4.2.25)$$

$$\frac{E(s)}{A} = \hbar c \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( k_x^2 + k_y^2 + \left( \frac{n\pi}{R} \right)^2 \right)^{-\frac{s}{2}} dk_x dk_y \Big|_{s=-1} \quad (4.2.26)$$

Aquí  $s$  es una variable compleja que garantiza la convergencia absoluta 4.2.26, luego la energía de vacío estará definida a través de su extensión analítica, además haremos uso de una función adicional:

$$z^{-q} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{\infty} t^{q-1} e^{-zt} dt \quad (4.2.27)$$

Hacemos las siguientes sustituciones:

$$q = \frac{s}{2} \quad y \quad z = \left( k_x^2 + k_y^2 + \left( \frac{n\pi}{R} \right)^2 \right)^{-s/2} \quad (4.2.28)$$

Por lo que la ecuación 4.2.27 puede escribirse como

$$\frac{E(s)}{A} = \hbar c \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(s/2)} \int_0^{\infty} t^{s/2-1} e^{-\left( k_x^2 + k_y^2 + \left( \frac{n\pi}{R} \right)^2 \right) t} dt \Big|_{s=-1} \quad (4.2.29)$$

$$\frac{E(s)}{A} = \hbar c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(s/2)} \int_0^{\infty} t^{s/2-1} e^{-\left( \frac{n\pi}{R} \right)^2 t} dt \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(k_x^2 + k_y^2)} dk_x dk_y \Big|_{s=-1} \quad (4.2.30)$$

La última integral de 4.2.30 puede resolverse utilizando un cambio de coordenadas polares en donde  $r^2 = k_x^2 + k_y^2$  y  $da = dk_x dk_y = r dr d\phi$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(k_x^2 + k_y^2)} dk_x dk_y = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \quad (4.2.31)$$

La expresión anterior se puede integrar fácilmente al hacer nuevamente cambio de variables, sea  $u = r^2$  por lo que  $du = 2r dr$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(k_x^2 + k_y^2)} dk_x dk_y = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{du}{2} = \pi \int_0^{\infty} e^{-u} du = \pi \left( -e^{-u} \right) \Big|_0^{\infty} = \pi \quad (4.2.32)$$

Luego 4.2.30 se resume a

$$\frac{E(s)}{A} = \frac{\hbar c}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(s/2)} \int_0^{\infty} t^{s/2-1} e^{-\left( \frac{n\pi}{R} \right)^2 t} dt \Big|_{s=-1} \quad (4.2.33)$$

Una vez resueltas las integrales gaussianas, volvemos a aplicar 4.2.27 y obtenemos

$$\frac{E(s)}{A} = \frac{\hbar c}{4\pi} \frac{\Gamma(s/2 - 1)}{\Gamma(s/2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{R}\right)^{2-s} \Big|_{s=-1} \quad (4.2.34)$$

Ahora utilizamos una de las propiedades de la función Gamma ( $\Gamma$ );  $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$

$$\frac{\Gamma(s/2 - 1)}{\Gamma(s/2)} = \frac{\Gamma(s/2 - 1)}{\Gamma(s/2 - 1 + 1)} = \frac{\cancel{\Gamma(s/2 - 1)}}{(s/2 - 1)\cancel{\Gamma(s/2 - 1)}} = \frac{1}{(s/2 - 1)} = \frac{2}{(s - 2)} \quad (4.2.35)$$

La energía por unidad de área quedará expresada

$$\frac{E(s)}{A} = \frac{\hbar c}{4\pi} \frac{2}{(s - 2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{n\pi}\right)^{s-2} \Big|_{s=-1} \quad (4.2.36)$$

$$\frac{E(s)}{A} = \frac{\hbar c}{4\pi} \frac{2}{(s - 2)} \left(\frac{R}{\pi}\right)^{s-2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{s-2} \Big|_{s=-1} = \frac{\hbar c}{4\pi} \frac{2}{(-3)} \left(\frac{R}{\pi}\right)^{-3} \zeta(s - 2) \quad (4.2.37)$$

En la expresión anterior se ha utilizado Función zeta de Riemann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} = \zeta(r) \quad (4.2.38)$$

En nuestro caso  $s = -1$  por lo que debemos calcular  $\zeta(-3)$ , la función zeta de Riemann es utilizada frecuentemente en muchas aplicaciones, por lo que algunas herramientas de software matemático lo incluyen en sus librerías, en este caso vamos a utilizar Matlab:

Sustituyendo el valor de  $\zeta(-3) = 1/120$ , obtenido al usar Matlab, en la ecuación 4.2.37

$$\frac{E}{A} = \frac{\hbar c}{4\pi} \frac{2}{(-3)} \left(\frac{R}{\pi}\right)^{-3} \frac{1}{120} = -\frac{\hbar c \pi^2}{720 R^3} \quad (4.2.39)$$

Y nuevamente se puede plantear la expresión para la fuerza por unidad de área:

$$\frac{F}{A} = -\frac{\partial(\Delta E)}{\partial R} = -\frac{\hbar c \pi^2}{240 R^4} \quad (4.2.40)$$

El resultado obtenido en 4.2.40 coincide con el obtenido en 4.2.23 por lo que hemos resuelto el problema, abordándolo desde dos perspectivas diferentes.

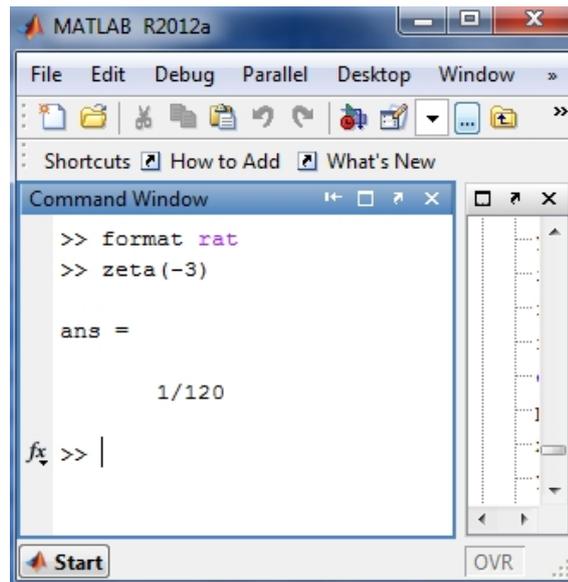


Figura 4.3: Evaluando zeta de Riemann

### 4.3. A cerca de JavaScript

Debido a que uno de los objetivos de este trabajo involucra el diseño de una herramienta que facilite la comprensión del efecto Casimir entre dos placas conductoras dispuestas de manera paralela, se hará uso del lenguaje JavaScript para simular las placas antes mencionadas utilizando los resultados obtenidos en la sección anterior, por lo que modelaremos la ecuaciones 4.2.23

Java es un lenguaje de programación, así como Pascal, Basic ó C y C++, fue desarrollado para crear aplicaciones para internet. El lenguaje java permite realizar cualquier operación sobre el ordenador. Javascript también conocido como lenguaje script, trata de códigos de programación insertados en un documento, la idea principal es la creación de páginas web dinámicas para navegadores. En Javascript los programas dependen del código HTML de la página, es decir que Javascript es interpretado directamente por el navegador, de hecho el código Javascript se incrusta dentro del código HTML de la página. Una de las ventajas de Javascript es que su aprendizaje y uso son relativamente sencillos, permitiendo realizar labores complejas en una página. [26]

A Javascript se le denomina "del lado del cliente" porque donde se ejecuta es en el navegador de la computadora del usuario, es decir es el navegador del usuario el que

soporta la carga de procesamiento. Debido a su compatibilidad con todos los navegadores modernos se ha convertido en un estándar como lenguaje de programación del lado del cliente. Con Javascript es posible crear efectos especiales en las páginas y definir interactividades con el usuario. El navegador del cliente es el encargado de interpretar las instrucciones Javascript y ejecutarlas para realizar estos efectos e interactividades, de modo que el mayor recurso, con que cuenta este lenguaje es el propio navegador y todos los elementos que hay dentro de una página. [27]

### 4.3.1. JavaScript en un Archivo Externo

En Javascript se pueden incluir instrucciones en un archivo externo que los documentos XHTML enlazan mediante la etiqueta `< script >`. Se pueden crear todos los archivos Javascript que sean necesarios y cada documento XHTML puede enlazar tantos archivos Javascript como necesite. Los archivos de tipo Javascript son documentos normales de texto con la extensión `.js`, que se pueden crear con cualquier editor de texto como Notepad, Wordpad, EmEditor, UltraEdit, Vi. En la aplicación desarrollada en este trabajo se utilizó el editor *Netepad ++*, pues este identifica los lenguajes de programación más habituales y ofrece una presentación ordenada y clara del código. Además *Netepad ++* nos permite localizar y editar con rapidez alguna línea aludida, pues nos indica los números de línea. Muchas veces los mensajes de error con que nos encontramos son del tipo “Warning”. La principal ventaja de enlazar un archivo JavaScript externo es que se simplifica el código HTML de la página, además se puede reutilizar el mismo código JavaScript en todas las páginas del sitio web y que cualquier modificación realizada en el archivo JavaScript se ve reflejada inmediatamente en todas las páginas HTML que lo enlazan. [28]

### 4.3.2. JavaScript y Navegadores

La inigualable popularidad de JavaScript como lenguaje de programación de aplicaciones web se ha extendido a otras aplicaciones y otros entornos no relacionados con la web. Los navegadores más modernos disponibles actualmente incluyen soporte de JavaScript, entre ellos: Internet Explorer, Firefox, Opera, Safari, Konqueror. [28]

Aunque el lenguaje de programación Javascript es un tema muy importante en el desarrollo de este trabajo, nos limitaremos a las descripciones básicas del mismo. En los anexos se muestra una copia del código fuente con el cual fue desarrollada la simulación con la cual se puede hacer algunos estudios acerca del efecto Casimir.

Al compilar el programa elaborado, véase la sección 6.1. Código Javascript, se obtiene la vista previa de la simulación:

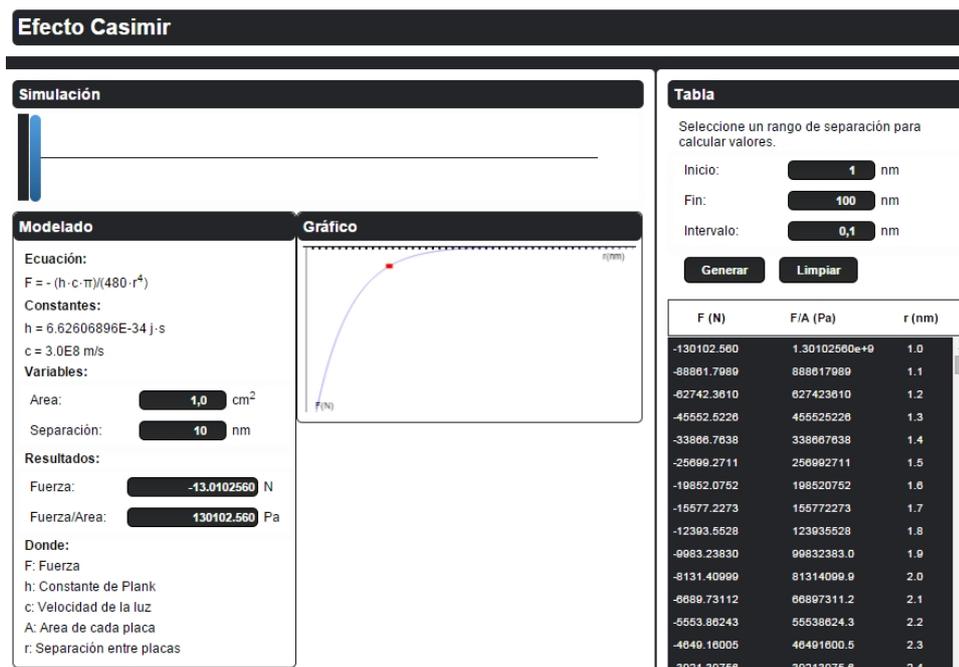


Figura 4.4: Vista Previa de la Simulación

En esta simulación el usuario puede interactuar cambiando parámetros como ser el área de las placas, la separación entre ellas. También puede regular la separación entre placas ubicando el puntero en la placa izquierda y arrastrarla hasta tener la separación deseada, automáticamente se muestra la fuerza y la presión para los parámetros ingresados. Además el usuario puede copiar una serie de datos tabulados, con los cuales puede hacer sus estudios individuales. Una buena práctica para desarrollar con los datos será graficar  $\log(F)$  en función de  $\log(r)$  e interpretar físicamente el intercepto y la pendiente del gráfico obtenido.

# Capítulo 5

## Conclusiones

El efecto Casimir ha convertido en objeto de estudio con interés físico en general en diversos campos. Es interesante e importante para la Teoría Cuántica de Campos, Física de Materia Condensada, Gravitación, astrofísica y la cosmología, la física atómica y Física Matemática. Actualmente el efecto Casimir ha avanzado como prueba del alcance para las interacciones de largo alcance de manera hipotética, incluyendo las correcciones a la ley de gravitación de Newton a pequeñas distancias. También está ganando importancia en tecnológica, en aplicaciones vitales como en dispositivos nanoelectromecánicos. Mediciones de precisión de la fuerza de Casimir han dado lugar a un excelente acuerdo entre los experimentos por medio de un microscopio de fuerza atómica y la teoría.

La expresión de Abel Plana que relaciona la diferencia entre una suma y una integral es particularmente útil en los cálculos relacionados con el efecto casimir. En la determinación de las energías, se está interesado en la diferencia entre un observable con un espectro discreto (lo que representa un campo en presencia de condiciones de contorno: como los platos conductores) y un observable con un espectro continuo (que representa el campo libre). La formula de Abel Plana tiene la ventaja de no introducir una función de corte explícita, una técnica de uso frecuente para tratar los infinitos que crean divergencias en los cálculos de suma directa.

El oscilador armónico cuántico es la base para lograr comprender el efecto casimir, un sistema dinámico simple que permite modelar el problema y darle sentido a la energía del punto cero que es la energía más baja que un sistema físico mecano-

cuántico puede poseer, y es la energía del estado fundamental del sistema.

Este trabajo tiene como aportación original el diseño y ejecución de la simulación utilizando como lenguaje de programación Javascript, en este programa se puede modelar la fuerza y la presión, debido al vacío, que sufren dos placas conductoras cuando estas están a distancias muy cortas. En el simulador se puede fijar el área de las placas y la distancia entre placas, ya sea moviendo una de las placas o fijando el valor numérico de la misma, el programa calcula la fuerza y la presión y ubica un punto en el gráfico que muestra la tendencia entre variables. Además si se desea exportar una tabla de datos para las variables antes mencionadas, se puede ingresar la distancia inicial entre placas y la iteración con la cual queremos que se hagan los cálculos, este generará una tabla con los datos que puede ser copiada para realizar estudios adicionales.

Con el desarrollo de este tema se espera fortalecer el área de estudio de los estudiantes de Licenciatura en Física en la Universidad Nacional Autónoma de Honduras, con temas de actualidad en el área de física cuántica.

# Capítulo 6

## Anexos

### 6.1. Código Javascript

En esta sección se muestra el código JavaScript de la aplicación que simula el efecto Casimir entre dos placas conductoras. Las páginas web se componen de código HTML (HyperText Markup Language), y para incluir el código Javascript se utiliza una marca HTML, `< script >`. A continuación se muestra el código:

```
<html lang="es">
  <head>
    <meta charset="utf-8">
    <title>Efecto Casimir</title>
    <style type="text/css">
      * {
        -webkit-box-sizing: border-box;
        -moz-box-sizing: border-box;
        box-sizing: border-box;
      }

      * {
        margin: 0px;
        padding: 0px;
      }
    </style>
  </head>
</html>
```

```
h1 {
font: bold 20px Arial, verdana;
}

h2 {
font: bold 14px Arial, verdana;
}

h3 {
font: bold 12px Arial, verdana;
margin: 5px;
}

p {
font: 12px Arial, verdana;
margin: 5px;
}

header, section, footer, aside, article {
display: block;
}

body {
background: #232528;
}

#lienzo{
-webkit-border-radius: 5px;
-moz-border-radius: 5px;
border-radius: 5px;
}
```

```
background: transparent;
margin: 10px auto;
height: 850px;
width: 900px;
}

#encabezado {
  -webkit-border-radius: 5px;
  -moz-border-radius: 5px;
  border-radius: 5px;
background: #ffffff;
border: 1px solid #232528;
margin: 5px 0 5px 0;
padding: 10px;
}

#bandaTitulo{
  -webkit-border-radius: 5px;
  -moz-border-radius: 5px;
  border-radius: 5px;
background: #232528;
color: #ffffff;
cursor: pointer;
margin: 0;
padding: 5px;
}

#descripcion {
  -webkit-border-radius: 5px;
  -moz-border-radius: 5px;
  border-radius: 5px;
```

```
margin: 0;
padding: 5px;
}

#panelIzquierdo {
  -webkit-border-radius: 5px;
  -moz-border-radius: 5px;
  border-radius: 5px;
  background: #ffffff;
  border: 1px solid #232528;
  float: left;
  height: 100%;
  margin: 5px 0;
  padding: 10px;
  width: 600px;
}

#panelDerecho {
  -webkit-border-radius: 5px;
  -moz-border-radius: 5px;
  border-radius: 5px;
  background: #ffffff;
  border: 1px solid #232528;
  float: left;
  height: 100%;
  margin: 5px 0;
  padding: 10px;
  width: 300px;
}

#contenido1 {
```

```
-webkit-border-radius: 5px;
-moz-border-radius: 5px;
border-radius: 5px;
background: #ffffff;
border: 1px solid #232528;
float: left;
margin: 5px 0;
! padding: 10px;
width: 45%;
}
```

```
#grafico1 {
  -webkit-border-radius: 5px;
  -moz-border-radius: 5px;
  border-radius: 5px;
  background: #ffffff;
  border: 1px solid #232528;
  float: left;
  margin: 5px 0;
! padding: 10px;
width: 55%;
}
```

```
#rectangulo {
  background: #232528;
  height: 80px;
  margin: 0 0 0 5px;
  width: 10px;
}
```

```
div.subtitulo{
  -webkit-border-radius: 5px;
  -moz-border-radius: 5px;
  border-radius: 5px;
  background: #232528;
  color: #ffffff;
  margin: 0;
  padding: 5px;
}

div.recuadro {
border: none !1px solid #232528;
margin: 0;
padding: 5px;
}

#piePagina {
  -webkit-border-radius: 5px;
  -moz-border-radius: 5px;
  border-radius: 5px;
background: #ffffff;
clear: both;
text-align: center;
margin: 10px 0;
padding: 10px;
border-top: 2px solid #999999;
}

.button {
display: inline-block;
background: #232528;
```

```
background: -webkit-gradient(linear, left top,
                             left bottom, color-stop(0%,#232528), color-stop
                             (100%,#2a2a2a));
background: -moz-linear-gradient(center top, #
                             232528 0%, #2a2a2a 100%);
-webkit-border-radius: 5px;
-moz-border-radius: 5px;
border-radius: 5px;
color: #ffffff;
margin: 5px;
padding: 5px 15px;
display: inline-block;
border-color: #000000;
border-width: 1px;
border-style: solid;
font-family: Arial;
font-size: 11px;
font-weight: bold;
}

.button:hover {
background: #eee;
background: -webkit-gradient(linear, left top,
                             left bottom, color-stop(0%,#eee), color-stop
                             (100%,#fff));
background: -moz-linear-gradient(center top, #eee
                             0%, #fff 100%);
color: #000;
}

.number {
background: #232528;
```

```
background: -webkit-gradient(linear, left top,
                             left bottom, color-stop(0%,#232528), color-stop
                             (100%,#2a2a2a));
background: -moz-linear-gradient(center top, #
                             232528 0%, #2a2a2a 100%);
border-color: #000000;
border-width: 1px;
border-style: solid;
-webkit-border-radius: 5px;
-moz-border-radius: 5px;
border-radius: 5px;
color: #ffffff;
display: inline-block;
font-family: Arial;
font-size: 11px;
font-weight: bold;
margin: 5px;
padding: 2px;
text-align: right;
width: 80px;
}
.number:hover, .number:focus {
background: #eee;
background: -webkit-gradient(linear, left top,
                             left bottom, color-stop(0%,#eee), color-stop
                             (100%,#fff));
background: -moz-linear-gradient(center top, #eee
                             0%, #fff 100%);
color: #000;
}
```

```
.text {
background: #232528;
background: -webkit-gradient(linear, left top,
                             left bottom, color-stop(0%,#232528), color-stop
                             (100%,#2a2a2a));
background: -moz-linear-gradient(center top, #
                             232528 0%, #2a2a2a 100%);

border-color: #000000;
border-width: 1px;
border-style: solid;
-webkit-border-radius: 5px;
-moz-border-radius: 5px;
border-radius: 5px;
color: #ffffff;
display: inline-block;
font-family: Arial;
font-size: 11px;
font-weight: bold;
margin: 5px;
padding: 2px;
text-align: right;
width: 120px;
}

.text:hover, .text:focus {
background: #eee;
background: -webkit-gradient(linear, left top,
                             left bottom, color-stop(0%,#eee), color-stop
                             (100%,#fff));
background: -moz-linear-gradient(center top, #eee
                             0%, #fff 100%);
color: #000;
}
```

```
}

.caja th {
font: normal 12px arial, verdana;
padding: 0 0 0 10px;
    text-align: left;
}

#tituloTabla {
    border: 1px solid #232528;
}

#tituloTabla th {
border: none;
font: bold 11px arial, verdana;
padding: 10px;
}

table {
    border-collapse: collapse;
    border-spacing: 0;
    box-shadow: 0px 2px 1px 5px rgba(242, 242, 242,
        0.1);
    -webkit-box-shadow: 0px 2px 1px 5px rgba(242, 242,
        242, 0.1);
    -moz-box-shadow: 0px 2px 1px 5px rgba(242, 242, 242,
        0.1);
    width: 100%;
}

.zebra {
```

```
border: none;
}

.zebra td {
border-left: none;
border-top: none;
padding: 5px;
text-align: left;
}

.zebra tr:hover *{
background: #fff;
color: #000;
font: bold 10px arial, verdana;
}

.zebra tr {
background: #232528;
color: #fff;
font: normal 10px arial, verdana;
}

input[type="range"] {
-webkit-appearance: none;
-webkit-tap-highlight-color: rgba(255, 255, 255, 0);
width: 520px;
height: 1px;
margin: 0 0 12px -35px;
border: none;
padding: 0px;
```

```
border-radius: 0px;
background: #232528;
box-shadow: inset 0 1px 0 0 #0d0e0f, inset 0 -1px 0
            0 #3a3d42;
-webkit-box-shadow: inset 0 1px 0 0 #0d0e0f, inset 0
                  -1px 0 0 #3a3d42;
outline: none; /* no focus outline */
}

input[type="range"]::-moz-range-track {
    border: inherit;
    background: transparent;
    padding: 0px;
}

input[type="range"]::-ms-track {
    border: inherit;
    color: transparent; /* don't drawn vertical
                        reference line */
    background: transparent;
}

input[type="range"]::-ms-fill-lower,
input[type="range"]::-ms-fill-upper {
    background: transparent;
}

input[type="range"]::-ms-tooltip {
    display: none;
}
```

```
/* thumb */

input[type="range"]::-webkit-slider-thumb {
  -webkit-appearance: none;
  width: 10px;
  height: 80px;
  border: none;
  border-radius: 12px;
  background-image: -webkit-gradient(linear, left top,
    left bottom, color-stop(0%, #529de1), color-stop
    (100%, #245e8f)); /* android <= 2.2 */
  background-image: -webkit-linear-gradient(top , #
    529de1 0, #245e8f 100%); /* older mobile safari and
    android > 2.2 */;
  background-image: linear-gradient(to bottom, #529de1
    0, #245e8f 100%); /* W3C */
  padding: 0px;
}

input[type="range"]::-moz-range-thumb {
  width: 10px;
  height: 80px;
  border: none;
  border-radius: 0px;
  background-image: linear-gradient(to bottom, #529de1
    0, #245e8f 100%); /* W3C */
  padding: 0px;
}

input[type="range"]::-ms-thumb {
  width: 10px;
```

```
height: 80px;
border-radius: 12px;
border: 0;
background-image: linear-gradient(to bottom, #529de1
    0, #245e8f 100%); /* W3C */
padding: 0px;
}
```

```
</style>
<script type="text/javascript">
/* Determina la fuerza para una determinada area A
    (centimetros cuadrados)
    y distancia r (nanometros).
    */
function FuerzaCasimir (A_cm2, r_nms) {
    // Constante Pi (adimensional)
    this.pi = Math.PI,
    // Constante de plank (joules * segundo)
    this.h = 6.62606896e-34,
    // Velocidad de la luz (metros / segundo)
    this.c = 3e8,
    // Area de la placa (centimetros cuadrados)
    this.A_cms2 = A_cm2,
    // Area de las placas (metros cuadrados)
    this.A_mts2 = this.A_cms2 / Math.pow(100, 2),
    // Distancia de la separaci3n de las placas
        (nanometros)
    this.r_nms = r_nms,
    // Distancia de la separaci3n de las placas
        (metros)
    this.r_mts = this.r_nms * 1e-9,
```

```
// Función que calcula la fuerza:
this.fuerza = function() {
return -((this.h * this.c * this.pi *
          this.A_mts2) / (480 * Math.pow(this.r_mts,4)))
},

// Función que calcula la fuerza por unidad de
      area:
this.fuerzaPorArea = function() {return Math.abs
          (this.fuerza() / this.A_mts2)}
}

function rellenar_tabla(inicio, fin, intervalo) {
  var areaPlacas = parseFloat(document.getElementById
          ("area_placas").value);
  var tabla = document.getElementById("tabla");

  for (var i = inicio; i <= (fin+1); i += intervalo) {
// Crea las filas de la tabla
var fila = document.createElement("tr");
fila.id = "fila" + i;

for (var j = 1; j <= 3; j++) {
  // Crea un elemento <td> y un nodo de texto,
          has
  // que el nodo de texto sea el contenido de
          <td>,
  // ubica el elemento <td> al final de la hilera
  // de la tabla.
var celda = document.createElement("td");
```

```
var fi = new FuerzaCasimir(areaPlacas, i);
var valorNodo = (j == 1) ? fi.fuerza
                    ().toPrecision(9) : ((j == 2) ?
                    fi.fuerzaPorArea().toPrecision(9) : i.toFixed
                    (1));
var textoCelda = document.createTextNode
                    (valorNodo);
celda.appendChild(textoCelda);
fila.appendChild(celda);
}

// Agrega la fila al final de la tabla
tabla.appendChild(fila);
}

}

function generar_tabla() {
    var inicio = parseFloat(document.getElementById
                            ("r_inicial").value);
    var fin = parseFloat(document.getElementById
                          ("r_final").value).toFixed(1);
    var intervalo = parseFloat(document.getElementById
                               ("r_intervalo").value);

    limpiar_tabla();
    rellenar_tabla(inicio, fin, intervalo);
}

function limpiar_tabla() {
    var tabla = document.getElementById("tabla");
```

```
while (tabla.rows.length > 0) {
tabla.deleteRow(tabla.rows.length-1);
}

}

function calcular() {
var distancia = parseFloat(document.getElementById
("separacion_placas").value);
var areaPlacas = parseFloat(document.getElementById
("area_placas").value);
var fuerzaPlacas = document.getElementById
("fuerza_placas");
var fuerzaPorArea = document.getElementById
("fuerza_por_area");
var f1 = new FuerzaCasimir(areaPlacas, distancia);

fuerzaPlacas.value = parseFloat(f1.fuerza
()).toFixed(9);
fuerzaPorArea.value = parseFloat(f1.fuerzaPorArea
()).toFixed(9);

generar_tabla();
graficar();
}

function ajustarDistanciaEnTexto() {
var distanciaBarra = document.getElementById
("distancia_barra").value;
var distancia = document.getElementById
("separacion_placas");
```

```
    distancia.value = distanciaBarra;

    calcular();
}

function ajustarDistanciaEnBarra() {
    var distancia = document.getElementById
        ("separacion_placas").value;
    var distanciaBarra = document.getElementByI
        ("distancia_barra");
    distanciaBarra.value = distancia;

    calcular();
}

function verOcultar() {
    var c = document.getElementById("descripcion");

    if(c.style.display=='none') {
c.style.display='block';
    } else {
c.style.display='none'; }
}

function log10(x) {
    return Math.log(x)/Math.log(1.1);    //7funcion log
}

// Gráfico:
function Graph(config) {
    // user defined properties
```

```
this.canvas = document.getElementById
                (config.canvasId);

this.canvas.width = this.canvas.width;

this.minX = config.minX;
this.minY = config.minY;
this.maxX = config.maxX;
this.maxY = config.maxY;
this.unitsPerTick = config.unitsPerTick;

// constants
this.axisColor = '#000';
this.font = '6pt Arial';
this.tickSize = 5;

// relationships
this.context = this.canvas.getContext('2d');
this.rangeX = this.maxX - this.minX;
this.rangeY = this.maxY - this.minY;
this.unitX = this.canvas.width / this.rangeX;
this.unitY = this.canvas.height / this.rangeY;
this.centerY = Math.round(Math.abs(this.minY /
                this.rangeY) * this.canvas.height);
this.centerX = Math.round(Math.abs(this.minX /
                this.rangeX) * this.canvas.width);
this.iteration = (this.maxX - this.minX) / 1000;
this.scaleX = this.canvas.width / this.rangeX;
this.scaleY = this.canvas.height / this.rangeY;

// draw x and y axis
this.drawXAxis();
this.drawYAxis();
```

```
}

Graph.prototype.drawXAxis = function() {
    var context = this.context;
    context.save();
    context.beginPath();
    context.moveTo(0, this.centerY);
    context.lineTo(this.canvas.width, this.centerY);
    context.strokeStyle = this.axisColor;
    context.lineWidth = 0.5;
    context.stroke();

    // draw tick marks
    var xPosIncrement = this.unitsPerTick * this.unitX;
    var xPos, unit;
    context.font = this.font;
    context.textAlign = 'center';
    context.textBaseline = 'top';

    // draw left tick marks
    xPos = this.centerX - xPosIncrement;
    unit = -1 * this.unitsPerTick;
    while(xPos > 0) {
context.moveTo(xPos, this.centerY - this.tickSize
                / 2);
context.lineTo(xPos, this.centerY + this.tickSize
                / 2);
context.stroke();
        // context.fillText(unit, xPos, this.centerY +
                this.tickSize / 2 + 3);
    unit -= this.unitsPerTick;
}
```

```
xPos = Math.round(xPos - xPosIncrement);
}

context.fillText("r(nm)", this.canvas.width-20,
                this.centerY+5);

// draw right tick marks
xPos = this.centerX + xPosIncrement;
unit = this.unitsPerTick;
while(xPos < this.canvas.width) {
context.moveTo(xPos, this.centerY - this.tickSize
               / 2);
context.lineTo(xPos, this.centerY + this.tickSize
               / 2);

context.stroke();
//    context.fillText(unit, xPos, this.centerY +
                    this.tickSize / 2 + 3);

unit += this.unitsPerTick;
xPos = Math.round(xPos + xPosIncrement);
}

context.restore();
};

Graph.prototype.drawYAxis = function() {
    var context = this.context;
    context.save();
    context.beginPath();
    context.moveTo(this.centerX, 0);
    context.lineTo(this.centerX, this.canvas.height);
    context.strokeStyle = this.axisColor;
    context.lineWidth = 0.5;
```

```
context.stroke();

// draw tick marks
var yPosIncrement = this.unitsPerTick * this.unitY;
var yPos, unit;
context.font = this.font;
context.textAlign = 'right';
context.textBaseline = 'middle';

// draw top tick marks
yPos = this.centerY - yPosIncrement;
unit = this.unitsPerTick;
while(yPos > 0) {
context.moveTo(this.centerX - this.tickSize / 2,
               yPos);
context.lineTo(this.centerX + this.tickSize / 2,
               yPos);
context.stroke();
// context.fillText(unit, this.centerX -
                   this.tickSize / 2 - 3, yPos);
unit += this.unitsPerTick;
yPos = Math.round(yPos - yPosIncrement);
}

context.fillText("F(N)", this.centerX+25,
                this.canvas.height-5); //etiqueta eje y

// draw bottom tick marks
yPos = this.centerY + yPosIncrement;
unit = -1 * this.unitsPerTick;
while(yPos < this.canvas.height) {
```

```
context.moveTo(this.centerX - this.tickSize / 2,
               yPos);
context.lineTo(this.centerX + this.tickSize / 2,
              yPos);
context.stroke();
//context.fillText(unit, this.centerX -
                  this.tickSize / 2 - 3, yPos);
unit -= this.unitsPerTick;
yPos = Math.round(yPos + yPosIncrement);
}
context.restore();
};
```

```
Graph.prototype.drawEquation = function(equation,
                                       color, thickness) {
    var context = this.context;
    context.save();
//    context.save();
    this.transformContext();

    context.beginPath();
    context.moveTo(this.minX, equation(this.minX));

    for(var x = this.minX + this.iteration; x <=
          this.maxX; x += this.iteration) {
context.lineTo(x, equation(x));//para el grafico
                hiperbola
    }

    context.restore();
    context.lineJoin = 'round';
```

```
    context.lineWidth = thickness;
    context.strokeStyle = color;
    context.stroke();
    context.restore();
};

Graph.prototype.drawPoint = function(point, color) {
    var context = this.context;
    context.save();
    this.transformContext();

    context.beginPath();
    // context.arc(point.x, point.y, 1, 0, 2*Math.PI);
    context.fillStyle = color;
    context.fillRect(point.x, point.y, 2, 0.02);
        //tamaño del punto

    context.restore();
    context.strokeStyle = color;
    context.fill();
    context.stroke();
    context.restore();
};

Graph.prototype.transformContext = function() {
    var context = this.context;

    // move context to center of canvas
    this.context.translate(this.centerX, this.centerY);

    /*
```

```
* stretch grid to fit the canvas window, and
* invert the y scale so that that increments
* as you move upwards
*/
context.scale(this.scaleX, -this.scaleY);
};

function graficar() {
  var separacion = document.getElementById
    ("separacion_placas").value;
  var area = document.getElementById
    ("area_placas").value;
  var f1 = new FuerzaCasimir(area,separacion);
  var f = Math.abs(f1.fuerza());
  var puntoX = log10(separacion);
  var puntoY = -1e-9*Math.pow((480*f)/
    (f1.pi*f1.h*f1.c*f1.A_mts2),0.25);

  // Crea una nueva instancia de la clase Graph
  var myGraph = new Graph({
  canvasId: 'miCanvas',
  minX: -1,
  minY: 0,
  maxX: 100,      //ejes ajuste
  maxY: 0.75,
  unitsPerTick: 2    //salto
  });

  myGraph.drawEquation(function(x) {
```

```

return (-1/Math.pow(1.1,x));
  } ,"#00f" , .4);
  myGraph.drawPoint({x: puntoX, y: puntoY}, '#f00');
};
</script>
</head>
<body onload="calcular()">
  <div id="lienzo">
    <header id="encabezado">
      <div id="bandaTitulo">
        <h1 onclick="verOcultar();">Efecto Casimir</h1>
      </div>
      <div style="display: none;" id="descripcion">
        <p>Esta simulación permite estudiar la fuerza debido al
        vacío que actúa sobre un par de placas conductoras, separadas
        una pequeña distancia en comparación
        con las dimensiones de las placas.</br></br>
        La separación entre las placas se puede ajustar ubicando el
        cursor sobre una de las placas, haciendo clic y manteniendo
        pulsado el botón del ratón mientras este se mueve.</br></br>
        Debe ingresar un valor para el área de las placas para
        observar la fuerza de atracción entre ellas. También puede
        observar la fuerza por unidad de área o presión sobre
        las placas.</p></div>
      </header>
      <section id="panelIzquierdo">
        <div id="simulacion">
          <div class="subtitulo"><h2>Simulación</h2></div>
          <div class="recuadro">
            <table >
              <tr>
                <td height="80px">

```

```

<th bgcolor = "#232528" width="10px"></th>
<th>
    <input type="range" min="1" max="10000" step="0.1"
    name="distancia_barra" value="10" onchange=
    "ajustarDistanciaEnTexto()" id="distancia_barra">
</th>
</td>
</table>
</div>
</div>
<div>
    <section id ="contenido1">
        <div id="contenido">
            <div class="subtitulo"><h2>Modelado</h2></div>
            <div class="recuadro">
                <h3>Ecuaci3n:</h3>
                <p>F = - (h&sdot;c&sdot;&pi;)/
                (480&sdot;r<sup>4</sup>) </p>
                <h3>Constantes:</h3>
                <p>h = 6.62606896E-34 j&sdot;s</p>
                <p>c = 3.0E8 m/s</p>
                <h3>Variables:</h3>
                <table class="caja">
                    <tr>
                        <th>
                            <label for="area_placas">Area: </label>
                        </th>
                        <th>
                            <input type="number" class="number"
                            name="area_placas"
                            min="0.1" max="10000" step="0.01" value="1.0"

```

```
        onchange="calcular()"
        id="area_placas">cm<sup>2</sup>
    </th>
</tr>
<tr>
    <th>
        <label for="separacion_placas">Separación:
        </label>
    </th>
    <th>
        <input type="number" class="number"
        name="separacion_placas"
        min="1" max="10000" step="0.1"
        value="10" onchange=
        "ajustarDistanciaEnBarra()"
        id="separacion_placas">nm
    </th>
</tr>
</table>
<h3>Resultados:</h3>
<table class="caja">
<tr>
    <th>
        <label for="fuerza_placas">Fuerza: </label>
    </th>
    <th>
        <input type="text" class="text" name=
        "fuerza_placas"
        value="0" id="fuerza_placas" readonly>N
    </th>
</tr>
</table>
```

```
<tr>
  <th>
    <label for="fuerza_por_area">Fuerza/Area: </label>
  </th>
  <th>
    <input type="text" class="text"
      name="fuerza_por_area"
      value="0" id="fuerza_por_area" readonly>Pa
  </th>
</tr>
</table>
<h3>Donde:</h3>
<p>F: Fuerza</p>
<p>h: Constante de Plank</p>
<p>c: Velocidad de la luz</p>
<p>A: Area de cada placa</p>
<p>r: Separaci3n entre placas</p>
</div>
</div>
</section>
<aside id="grafico1" >
  <div id="grafico">
    <div class="subtitulo"><h2>Gr3fico</h2></div>
    <div class="recuadro">
      <canvas id="miCanvas" style="background:#fff; height:48%;
        width:100%;">Su navegador no soporta Canvas.</canvas>
    </div>
  </div>
</aside>
</div>
</section>
```

```
<aside id="panelDerecho">
  <div heigh="20%">
    <div class="subtitulo"><h2>Tabla</h2></div>
    <div class= "recuadro">
      <p>Seleccione un rango de separación para calcular
      valores.</p>
      <table class="caja">
        <tr>
          <th>
            <label for="r_inicial">Inicio:</label>
          </th>
          <th>
            <input type="number" class="number"
            name="r_inicial" min="1"
            max="10000" step="0.1" value="1" id=
            "r_inicial">nm
          </th>
        </tr>
        <tr>
          <th>
            <label for="r_final">Fin:</label>
          </th>
          <th>
            <input type="number" class="number"
            name="r_final" min="1"
            max="10000" step="0.1" value="100"
            id="r_final">nm
          </th>
        </tr>
        <tr>
          <th>
```

```

        <label for="r_intervalo">Intervalo:</label>
    </th>
    <th>
        <input type="number" class="number"
            name="r_intervalo"
            min="0.1" step="0.1" value="0.1"
            id="r_intervalo">nm
    </th>
</tr>
</table>
<p><input type="button" class="button" value="Generar"
onclick="generar_tabla()">
<input type="button" class="button" value="Limpiar"
onclick="limpiar_tabla()"></p>
</div>
</div>
<div style="height: 84%;">
    <div style="height: 5%;">
        <table id="tituloTabla">
            <thead>
                <th>F (N)</th>
                <th>F/A (Pa)</th>
                <th>r (nm)</th>
            </thead>
        </table>
    </div>
<div style="height: inherit;overflow:auto;">
    <table class="zebra" id="tabla">
        <tbody id="tblBody">
        </tbody>
    </table>

```

```
        </div>
    </div>
</aside>
<footer id="piePagina">
    <p>Copyleft 2014</p>
</footer>
</div>
</body>
</html>
```

# Bibliografía

- [1] Contreras Reyes, Ana María. **Efectos de la dispersión espacial en las Fuerzas de Casimir** Dic 2003
- [2] W. Luis Mochán, C. Villareal, and R. Esquivel-Sirvent. **On casimir forces for media with arbitrary dielectric properties.** page 339.
- [3] Consuelo Belloch (2002), **Las Tecnologías de la Información y Comunicación en el aprendizaje**, Tecnología, **72**, pp 1–2.
- [4] Yolanda Soler Pellicer, Mateo Gerónimo Lezcano Brito (2009), **Consideraciones sobre la tecnología educativa en el proceso de enseñanza-aprendizaje**, Tecnología, **72**, pp 1–2.
- [5] Gabriel De la Torre Solarte, Elsa Narváez (2006), **Pensamiento Universitario. Propuesta Educativa**, Educación, **72**, pp 40–50.
- [6] Claudia Alejandra Mazzitelli, Miriam Aparicio (2006), **El abordaje del conocimiento cotidiano desde la teoría de las representaciones sociales**, Educación, **72**, pp 1–9.
- [7] Daniel Gil Perez (2007), **Tres paradigmas básicos de la enseñanza de las ciencias**, Educación, **72**, pp 1–9.
- [8] Emilio Elizalde, (2009), **El efecto Casimir**, Investigación y Ciencia, **72**, pp 1–10.
- [9] Raymond A. Serway, Clement Moses, Curt Moyer, (2006), **Física Moderna**, Física, **72**, pp 212–220.

- [10] Olmo Nave, (2005), **HyperPhysics**, Física Cuántica, **72**, pp 1–3.
- [11] Merriam Webster, (2009), **A new laser texturing technique for high performance magnetic disk drives**, Tecnología **72**, pp 1.
- [12] Armando Martínez Téllez, (2009), **La Mecánica Cuántica**, Física Cuántica **72**, pp 1.
- [13] H.B.G. Casimir. *On the attraction between two perfectly conducting plates*. Proc. Kon. Wet, 51:793-795, 1948
- [14] Alfredo Bennun, Néstor Ledesma. *Conjetura de contribución de la energía de punto cero a la termodinámica de la Expansión del universo*.
- [15] Octavio Miramontes, Karen Volke. **Fronteras de la Física en el Siglo XXI**, pp 2–7.
- [16] Carlos Arturo Jiménez Orjuela **Regularización de funciones Automórficas de Variedades con Geometría Especial de Kahler**, Numerische Mathematics, pp 6–24.
- [17] D.V. Sivujin **Problemas de física geneal, optica**, pp 120.
- [18] Rodrigo Ferrer P., Herbert Massmann L., Jaime Roessler B., Jose Rogan C. *MECANICA CUANTICA I*, pp 11.
- [19] Asaf Szulc **The Casimir Effect**, pp 1–3.
- [20] Carlos Villareal (2013), **Fuerzas de Casimir**, **72**, pp 2–12.
- [21] Karin Rébora (2005), **Energías de Casimir en medios dieléctricos, Aplicaciones**, Numerische Mathematics, **72**, pp 5–10.
- [22] Landau, Lifshitz (1981), **Teoría Clásica de los Campos**, Física Teórica, **72**, pp 162–180.
- [23] Juan Sacerdoti (2002), **Funciones Eulerianas**, Análisis Matemático, **72**, pp 12–18.

- [24] David Anderson (2001), **A Review of the Abel-Plana Formula**, Numerische Mathematics, **72**, pp 1–4.
- [25] Kuat Yessenov, Victor Kac (2005), **Seminar in Algebra and Number Theory, Euler-Maclaurin Formula**, Numerische Mathematics, **72**, pp 1–4.
- [26] Jorge Sánchez, (2003), **Manual de Referencia JavaScript**, Informática, **72**, pp 2–4.
- [27] Miguel Angel Alvarez, (2000), **D. Javascript a fondo**, Retrieved from <http://www.desarrolloweb.com/javascript/>, Informática, **72**, pp 1–3.
- [28] Javier Eguíluz Pérez , (2009), **D. Introducción a JavaScript**, Informática, **140**, pp 5–15.
- [29] J. W. Barrett and J. F. Blowey (1995), **An error bound for the finite element approximation of the Cahn-Hilliard equation with logarithmic free energy**, Numerische Mathematics, **72**, pp 1–20.
- [30] J. W. Barrett and J. F. Blowey (1997), **Finite element approximation of a model for phase separation of a multi-component alloy with non-smooth free energy**, Numerische Mathematics, **77**, pp 1–34.
- [31] J. W. Barrett and J. F. Blowey (1999a), **An improve error bound for finite element approximation of a model for phase separation of a multi-component alloy**, IMA J. Numer. Anal. **19**, pp 147-168.
- [32] P. G. Ciarlet (1978), **The Finite Element Method for Elliptic Problems**, North-Holland.
- [33] J. L. Lions (1969), **Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites**, Dunod.
- [34] J. L. Lions (1969), **Angel Franco Garcia Fisica con el ordenador**, url = <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisic>

# Apéndice A

## Apéndice

### A.1. Funciones espectrales

Toda onda se puede someter a descomposición espectral, es decir se puede representar como la superposición de ondas monocromáticas de diferentes frecuencias.

El carácter de estos desarrollos varía según el carácter de la dependencia del campo con relación al tiempo. [22]

Una primera clase está constituida por aquellos casos en que el desarrollo contiene frecuencias que forman una sucesión discreta. El más simple de este tipo se presenta en la descomposición de un campo puramente periódico. Se trata del desarrollo ordinario en serie de Fourier, este contiene las frecuencias que son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{A.1.1})$$

Donde  $T$  es el periodo del campo. Se escribe el desarrollo en la forma:

$$f = \text{Re} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_0 n t} \right] \quad (\text{A.1.2})$$

Donde  $f$  es una frecuencia cualquiera de las magnitudes que describen el campo. Las magnitudes de  $f_n$  se definen en función de  $f$  por las integrales:

$$f_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_0 n t} \quad (\text{A.1.3})$$

Dado que  $f(t)$  se supone real, es evidente que

$$f_{-n} = f_{-n}^* \quad (\text{A.1.4})$$

En casos más complicados, el desarrollo puede contener múltiplos enteros de diferentes frecuencias fundamentales inconmensurables. Cuando la suma en A.1.2 se eleva al cuadrado y se determina luego el valor medio respecto del tiempo, los productos de términos que corresponden a frecuencias diferentes se anulan, ya que contienen factores oscilantes. Quedan solo los términos de la forma  $f_n f_{-n} = |f_n|^2$ . Así, el valor medio del cuadrado del campo, es decir, la intensidad media de la onda, es la suma de las intensidades de sus componentes monocromáticas.

$$f^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 \quad (\text{A.1.5})$$

Otra clase de desarrollo corresponde a los campos que se pueden representar a través de una integral de Fourier con una sucesión continua de frecuencias diferentes. Para que esto sea posible, la función  $f(t)$  debe satisfacer determinadas condiciones, generalmente, se consideran funciones que se anulan para  $t = \pm\infty$ . Una representación de este tipo es de la forma

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (\text{A.1.6})$$

Donde las componentes de Fourier se determinan a partir de la función  $f(t)$  por las integrales

$$f_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (\text{A.1.7})$$

Las componentes que difieren en el signo de  $\omega$  satisfacen la ecuación

$$f_{-\omega} = f_{\omega}^* \quad (\text{A.1.8})$$

Se expresa la intensidad total de la onda, es decir, la integral de  $f^2$  extendida a todo valor del tiempo, en función de la intensidad de las componentes de Fourier.

Teniendo en cuenta A.1.6 y

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ f \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \right] dt \\ \int_{-\infty}^{\infty} f^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} f_{-\omega} d\omega = 2 \int_0^{\infty} |f_{\omega}|^2 \frac{d\omega}{2\pi} \end{aligned} \quad (\text{A.1.9})$$

En matemáticas y en física, la Densidad Espectral de una señal es una función matemática que nos da información acerca de cómo está distribuida la potencia o la energía, según el caso, de dicha señal sobre las distintas frecuencias de las que está formada, es decir, su espectro.

La definición matemática de la Densidad Espectral es diferente dependiendo de si se trata de señales definidas en energía, en cuyo caso hablamos de Densidad Espectral de Energía, o en potencia, en cuyo caso hablamos de Densidad Espectral de Potencia. [22]

## A.2. Función Gamma

La función Gamma está definida como:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0 = \quad (\text{A.2.1})$$

Al igual que con otras funciones, la definición no solo tiene sentido para  $\alpha$  real mayor que cero, sino también para números complejos, y es dentro de este marco que su estudio se vuelve más claro. En este caso la definición tiene sentido para cualquier complejo con parte real positiva pues, tomando el valor principal de  $t^{z-1}$ , la integral es convergente. [23]

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\text{A.2.2})$$

La función  $\gamma$  es considerada la generalización a los complejos de la función factorial, pues

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (\text{A.2.3})$$

Para darnos cuenta de la validez de esta última relación primero observemos que  $\Gamma(1) = 1$

$$\Gamma(1) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^k e^{-t} dt = \lim_{[k \rightarrow +\infty} [e^0 - e^{-k}] = 1 \quad (\text{A.2.4})$$

Además

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\text{A.2.5})$$

Debido a que

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1+1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt \quad (\text{A.2.6})$$

Se hace una integración por partes en donde  $u = t^z$  y  $dv = e^{-t}dt$  por lo que

$$\int_0^\infty e^{-t}t^z dt = \left[ -e^{-t}t^z + z \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1} dt \right]_0^\infty = z\Gamma(z) \quad (\text{A.2.7})$$

Matemáticamente la función gamma extiende el concepto de factorial a los números complejos, haciendo excepción a los enteros negativos y al cero. Así la función gamma es aplicada al conocimiento científico, como por ejemplo a distribuciones de probabilidad que tiene aplicación en modelos de estadística, fiabilidad, estudios de poblaciones normales los métodos probabilísticos de los problemas de fallas en procesos industriales. [23]

### A.3. Fórmula de Abel-Plana

La formula de Abel Plana es una formula descubierta independientemente por Niels Henrik Abel, un matemático Noruego, y Geovanni Antonio Amedeo Plana, un astrónomo y matemático Italiano. En esta formula se puede expresar una serie en función de ciertas integrales [24], es decir:

$$\sum_{n=0}^\infty f(n) = \int_0^\infty f(x)dx + \frac{1}{2}f(0) + i \int_0^\infty \frac{f(iy) - f(-iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy \quad (\text{A.3.1})$$

Esta fórmula es válida para funciones  $f(z)$  en la región  $Re(z) \geq 0$  del plano complejo que satisfagan una condición de crecimiento adecuado en una región determinada.

La formula de Abel-Plana se puede representar de diferentes formas, si toma la siguiente identidad

$$\cot(\pm\pi it) \pm i = \frac{\mp 2i}{e^{2\pi t} - 1} \quad (\text{A.3.2})$$

Entonces la expresión A.3.1 adopta la siguiente forma

$$\sum_{n=0}^\infty f(n) - \int_0^\infty f(x)dx = \frac{f(0)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^\infty [f(iy) - f(-iy)][\cot(\pi it) + i] dy \quad (\text{A.3.3})$$

Uno de los métodos más eficientes para obtener los valores esperados de vacío para los fenómenos físicos como el efecto Casimir se basa en el uso de la fórmula de sumatorias de Abel-Plana. Esto permite derivar las cantidades regularizadas de

forma independiente utilizando funciones de corte para representarlas en forma convergente. Sin embargo, las aplicaciones de la fórmula Abel-Plana en forma habitual está restringido por geometrías simples cuando los modos propios tienen una simple dependencia números cuánticos. Basándose en esta generalización, las fórmulas se han obtenido de varios tipos de serie sobre los ceros de algunas combinaciones de funciones de Bessel. Se ha demostrado que estos resultados se generalizan los casos especiales existentes en la literatura. Además, las fórmulas se han utilizado para resumir series que surgen en geometrías esféricas y cilíndricas del efecto Casimir. [24]

## A.4. Fórmula de Euler-Maclaurin

La fórmula de de Euler-Maclaurin es una importante herramienta de análisis numérico. En pocas palabras, nos da una estimación de la suma  $\sum_{i=0}^n f(i)$  a través de la integral  $\int_0^n f(t)dt$  con un término de error dado por una integral que consiste en los números de Bernoulli. En la forma más general, se puede escribir como:

$$\sum_{n=a}^b f(n) = \int_a^b f(t)dt + \frac{1}{2}(f(b) + f(a)) + \sum_{i=2}^k \frac{b_i}{i!} \left( f^{(i-1)}(b) - f^{(i-1)}(a) \right) - \int_a^b \frac{B_k(1-t)}{k!} f^{(k)}(t)dt \quad (\text{A.4.1})$$

Donde  $a$  y  $b$  son números reales con diferencia  $b - a$  como un número entero positivo,  $B_k$  y  $b_i$  son los polinomios y números de Bernoulli, respectivamente, y  $k$  es un entero positivo. La condición que imponemos a la función real  $f$  es que debe tener derivada  $k$  continua.

Esta fórmula fue descubierta de forma independiente y casi simultáneamente por Euler y Maclaurin en la primera mitad del siglo *XVIII*. Sin embargo, ninguno de ellos obtuvo el término más esencial:

$$R_k = \int_a^b \frac{B_k(1-t)}{k!} f^{(k)}(t)dt \quad (\text{A.4.2})$$

Ambos utilizaron el método iterativo de obtención de números de Bernoulli  $b_i$ , pero el enfoque de Maclaurin se basaba principalmente en la estructura geométrica,

mientras que Euler usó las ideas puramente analíticos. El término mostrado en A.4.2 se introdujo más tarde por Poisson. [25]

Si  $f(x)$  y todas sus derivadas tienden a cero cuando  $x \rightarrow \infty$ , la fórmula A.4.1 se puede simplificar:

$$\sum_{n=a}^b f(n) = \int_a^\infty f(t)dt + \frac{1}{2}f(a) - \sum_{i=2}^k \frac{b_i}{i!} f^{(i-1)}(a) - \int_a^\infty \frac{B_k(1-t)}{k!} f^{(k)}(t)dt \quad (\text{A.4.3})$$

Los números de Bernoulli se definen por la siguiente serie de potencias:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n x^n}{n!} \quad (\text{A.4.4})$$

$$b_n = \left. \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{x}{e^x - 1} \right) \right|_{x=0} \quad (\text{A.4.5})$$

Los primeros números de Bernoulli son los siguientes:

$$b_0 = 1, \quad b_1 = -\frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{1}{6}, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = -\frac{1}{30}, \quad b_5 = 0, \quad b_6 = \frac{1}{42} \quad (\text{A.4.6})$$

Note que Los términos impares son 0 excepto el primero  $b_1 = -1/2$

Ahora

$$\sum_{k=1}^{n-1} f_k = \int_0^n f(k)dk - \frac{1}{2}[f(0) + f(n)] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)] \quad (\text{A.4.7})$$

Que puede ser expandida:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} f_k &= \int_0^n f(k)dk - \frac{1}{2}[f(0) + f(n)] + \frac{1}{12} [f^{(1)}(n) - f^{(1)}(0)] \\ &\quad - \frac{1}{720} [f^{(3)}(n) - f^{(3)}(0)] + \frac{1}{30240} [f^{(5)}(n) - f^{(5)}(0)] \dots \end{aligned} \quad (\text{A.4.8})$$

Como vemos la fórmula de Euler-Maclaurin relaciona a integrales con series. Esta fórmula puede ser usada para aproximar integrales por sumas finitas o, de forma inversa, para evaluar series (finitas o infinitas) resolviendo integrales. También es utilizada para el análisis de errores en integraciones numéricas, los métodos de extrapolación se basan en esta fórmula. [25]