

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS



FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA DE FÍSICA

MAESTRÍA EN FÍSICA

PROYECTO DE MAESTRÍA

“DESARROLLO DE UN MODELO DINÁMICO DE UN ROBOT BÍPEDO.”

NICOLAS BLADIMIR CASTRO LAGOS

ASESOR

FRANCISCO BARRALAGA

MASTER EN CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS, TEGUCIGALPA - HONDURAS

TEGUCIGALPA, HONDURAS 13 DE MARZO, 2022

Resumen

Una de las aplicaciones tecnológicas que ha tenido en los últimos tiempos un inmenso desarrollo es la robótica, misma que ha tenido un gran impacto en la industria, de tal forma que hoy es casi imposible no encontrar robots en las plantas de montaje y fabricación. A pesar de lo anterior hay una interesante área de aplicación que todavía está en desarrollo, esta es, la de robots que se desplazan de forma autónoma en extremidades a modo pernas o patas útiles. Este tipo de locomoción trata de emular en muchos aspectos al de los seres vivos que es muy eficiente para el desplazamiento en terrenos y áreas complejas, pero al mismo tiempo es muy complejo desde el punto de vista dinámico, tanto es así que representa un reto de modelado dinámico en ingeniería.

El objetivo de esta investigación es desarrollar un modelo dinámico aplicable, empleando principios de mecánica clásica y álgebra lineal, de tal manera que este modelo sea usado posteriormente para implementar un sistema de control que permita su implementación en un pequeño prototipo autónomo.

Este trabajo se desarrolla en dos etapas. En la primera etapa se hace un estudio de las propiedades geométricas del robot, analizando ligaduras, grados de libertad, distribuciones de densidad de partes, encontrando en el proceso todas las matrices de rotación que operan sobre cada apéndice, teniendo como resultado final de este proceso los vectores de posición de cada parte del cuerpo.

En la segunda etapa se desarrolla el modelo dinámico simplificado, haciendo uso de las ecuaciones de Euler Lagrange para este sistema mecánico, que claro está, debe estar sometido a fuerzas coercitivas no necesariamente conservativas, proporcionadas por motores.

Índice

1. Introducción	5
1.1. El tópico principal abordado.	5
1.2. Tipo de aporte que realiza.	5
1.3. Trabajos relacionados con la problemática.	5
1.4. Organización de la Tesis.	7
2. Planteamiento del Problema	8
3. Justificación	10
3.1. Justificación Principal	10
3.2. Necesidades Relacionadas	10
4. Objetivo de Este Trabajo	11
4.1. Objetivo General	11
4.2. Objetivos específicos	11
5. Fundamento Teórico	12
5.1. Cinemática de una cadena	12
5.1.1. Orientaciones de eslabones	12
5.1.2. Vectores de posición de cada junta	15
5.2. Dinámica de la cadena	17
5.3. Definición de Términos Utilizados	20
6. Metodología	23
6.1. Proceso Para la Obtención de Las Matrices de Rotación.	24
6.2. Proceso Para la Obtención de los Vectores de Posición.	29
6.2.1. Posiciones de las Coyunturas	29
6.2.2. Posiciones de los Eslabones.	33
6.3. Ecuaciones de Movimiento	36
6.3.1. Centro de masa del robot.	37
6.4. Ecuación del Péndulo Invertido.	38
6.5. Instrumentos y Métodos Utilizados	42

7. Resultados	43
7.1. Matrices de Rotación.	43
7.2. Vectores de Posición de las Coyunturas en el Sistema de la Pelvis. . . .	48
7.3. Vectores de Posición de Los Centros de Masa de los Eslabones, en el Sistema de la Pelvis.	51
7.4. Centro de Masa del Robot, en el Sistema de Referencia de la Pelvis. . .	54
7.5. Prueba numérica de los vectores de posición y de la función centro de masa del bípedo.	54
7.6. lagrangiana y Ecuaciones de Movimiento de Péndulo Invertido.	59
8. Conclusiones	62
8.1. Observación	63
A. Algoritmo escrito en Mathematica para el cálculo de las matrices de rotación, los vectores de posición de las coyunturas y del centro de masa.	63
Referencias	68

1. Introducción

1.1. El tópico principal abordado.

La cinemática, y el estudio dinámico de un cuerpo rígido, son en general problemas ampliamente estudiados y entendidos en física bajo la luz de la mecánica newtoniana y analítica. Concentrar el estudio en la cinemática o dinámica de un cuerpo bajo la mecánica clásica no parece ser algo que interese hoy, sin embargo, el desarrollo de mecanismos en el ámbito de la ingeniería siempre pone sobre la mesa algunas necesidades de aplicabilidad de este tronco de la ciencia. Es el caso, por ejemplo, de un sistema de cuerpos rígidos sobre el que se pretende tener algún tipo de control sobre su movimiento, o que proceda con autonomía mecánica. Esto nos lleva a desarrollar algún modelo matemático que permita conseguir el fin deseado. Un robot es un mecanismo en donde se presenta este problema. Analizar las variables cinemáticas de un conjunto de cuerpos unidos, de alguna forma y con cierto grado de libertad, y formular de alguna manera las ecuaciones de movimiento (aunque sea simplificadas) es un problema interesante y de utilidad en este campo. Y es este el tema abordado en este trabajo.

1.2. Tipo de aporte que realiza.

El presente trabajo no contempla un desarrollo teórico o conceptual novedoso, sino más bien, la aplicación de conceptos ya funcionales a la modelación del movimiento de un aparato. Se debe ver este trabajo, no como una investigación en robótica en sí, si no, como un modelo o algoritmo que puede tener aplicaciones en ese campo. Es entonces que el aporte que se realiza aquí radica en un aspecto práctico algorítmico, sin entrar en el diseño estructural, o de control o de análisis de materiales. Es el planteamiento de un método para el modelado de las posiciones de un conjunto de piezas móviles relacionadas en sus grados de libertad, además de un desarrollo de ecuaciones de movimiento, para un caso particular restringido.

1.3. Trabajos relacionados con la problemática.

Aunque se puede encontrar reseñas de intereses de aparatos parecidos a un robot desde la antigüedad (en Grecia y China), y más reciente en la edad media y contem-

poránea, con algunos autómatas, es el conocimiento de los principios newtonianos lo que permite modelar de forma analítica un aparato tal (además de los modelos y métodos de control avanzado, de las técnicas en análisis numérico del siglo 20, del desarrollo de la electrónica moderna, de la algoritmia y más reciente el desarrollo de la inteligencia artificial). Los primeros trabajos que se encaminan a modelar las posiciones de un robot son de los años 50 del siglo pasado, con los investigadores Denavit y Hartenberg [1], en estos trabajos se establecen relaciones matriciales entre posiciones y orientaciones de las partes, luego en los años 70 y 80 se suman aportes a este procedimiento con los trabajos de Kahn y Roth [2], por un lado y Featherstone [3] por aparte, en donde toma el procedimiento de Denavit y lo modifican tomando en cuenta las distancias del manipulador al eslabón de referencia, estos fueron aplicados a diferentes casos en los años 80 y 90 por Shilling y Paul [4]. Otro método nuevo fue propuesto luego por Sheth and Uicker [5] en el que se trata la posición con dos sistemas de referencia, uno para el eslabón anterior y otro sistema del eslabón en cuestión, en este proceso se tiene que manejar un conjunto de dos matrices, una de la forma general y otra de enlace, la ventaja de este método con respecto al anterior es que no hay problemas de redundancia de posición en juntas que se separan en dos ramas, aunque es desventajoso ya que no minimiza el número de variables necesarias en el modelo matemático introduciendo ciertas ambigüedades. Para tratar esas ambigüedades Khalil y Kleinfinger [6], propusieron un método que trabaja en una nueva notación, este método es muy utilizado en robots manipuladores, y en aplicaciones de simulación computacional, por su óptimo enfoque a minimizar variables, se usó en modelado numérico universal [7]. Mas recientemente, en 2002, se desarrolló un método unificado, Thomas [8], en este se desarrolla una representación única de juntas esféricas. Cada método anterior es aplicable, en mayor o menor medida a cada caso, en este trabajo se realiza una formulación similar al método unificado, sin embargo, se trata de establecer un algoritmo para encontrar las rotaciones haciendo uso del grupo de rotaciones $SO(3)$ para cada grado de libertad rotacional en cada empalme, Taylor y Kriegman [9], siendo este el principal aporte la clarificación (algo que a mi parecer es faltante) en el cálculo o elección de las matrices de rotación correspondientes.

1.4. Organización de la Tesis.

Este documento se estructura en ocho capítulos, en el primero se plasma el problema abordado, en el segundo se enuncian algunas necesidades que de alguna forma dan justificación al trabajo. Luego se da paso al fundamento teórico, en esta sección se presentan los conceptos, definiciones y teorías que son pertinentes al tema, se presentan los términos que se usan en el análisis de los aparatos robotizados, como ser eslabón, junta etc. Y por otro lado se enuncia la teoría física involucrada en el análisis cinemático y dinámico, que es la base del desarrollo de esta rama de la ingeniería física. En el siguiente capítulo se plantean los objetivos específicos del trabajo, los cuales dan forma y contexto al objetivo general. A esto se sigue el capítulo dedicado a la metodología en donde se desarrollan a cabalidad y de forma clara los procesos seguidos para la obtención de las matrices de rotación, de las matrices de rotación de coyunturas y eslabones del aparato, de las ecuaciones del movimiento, se explica lo inviable de un caso general y de porque se realiza el caso aproximado como el presente. También se comparten los instrumentos y métodos utilizados en la consecución del proyecto. Se sigue el capítulo de los resultados, en este se enuncian, los resultados de los procesos que apuntaba el objetivo general, esto es los modelos que se buscan y el método que se desarrolla como aporte en forma tabulada y gráfica. El final se deja a las conclusiones, como no puede ser de otra forma.

2. Planteamiento del Problema

El desarrollo de un aparato tan complejo como un bípedo auto equilibrado implica la simbiosis de muchas áreas técnicas y científicas, tales como la mecánica, la electrónica, la programación y la teoría de control moderna por mencionar algunas. El presente trabajo solamente se enfoca en la parte cinemática y dinámica.

Se debe notar que, aunque un cuerpo bípedo (en general cualquier cuerpo con varias extremidades móviles) está compuesto de varios cuerpos sólidos que en conjunto no forman un cuerpo rígido, ya que cambia de forma. Primero llamando cadena al conjunto de cuerpos sólido-mínimos que conforman el robot, a los cuales, ya concatenados en sus grados de libertad, llamaremos eslabones. Un computador debe manejar en su memoria un conjunto de posiciones y orientaciones de los eslabones, además debe calcular las rotaciones y traslaciones que estos eslabones pueden, y deben hacer, para mover el robot de una determinada posición interna (a partir de un modelo de control) a otra en un determinado tiempo, y de esta manera permitir un movimiento total del aparato con respecto a su entorno. Lo anterior es una descripción de la **cinemática** del robot. Pero debe recordarse que cada eslabón posee una distribución de masa, así que un estudio de la cinemática no es suficiente, debemos hacer un análisis de las fuerzas y torques que deben ser aplicadas a los eslabones para realizar los movimientos ya mencionados en tiempos de reacción necesarios, esto es, necesitamos formular la **dinámica** de los eslabones. Para encontrar ecuaciones dinámicas podemos recurrir a la mecánica analítica, en este caso se hace de forma aproximada. Se procederá pues en base al planteamiento siguiente.

Se encuentran las matrices de orientación de cada eslabón, esto hace posible encontrar los vectores de posición del sistema en coordenadas generalizadas angulares, en un sistema de referencia propia del aparato, con esto y las distribuciones de masa de cada eslabón se encuentra el centro de masa, la subsecuente derivación de esto para encontrar las energías potencial y cinética, de esta manera con el lagrangiano se aplican las ecuaciones de Euler-Lagrange para un sistema no necesariamente conservativo. Obteniendo así las ecuaciones dinámicas del movimiento con respecto a las fuerzas generalizadas coercitivas (de forma aproximada).

En este punto tenemos las ecuaciones de las fuerzas generalizadas en función de

las velocidades, aceleraciones y distribuciones de masas, esto permitiría en una etapa posterior a este trabajo, desarrollar el control de los torques en tiempos necesarios y generar el movimiento requerido, para implementarlo.

El prototipo bípedo se compone de 9 eslabones abierto con 8 grados de libertad interna (a los que cabría sumar tres, correspondiente a la posición en su entorno tridimensional), esto corresponde a una dinámica de $8+3$ ecuaciones diferenciales no lineales de segundo grado que dependen de θ y $\dot{\theta}$ de las orientaciones y rotaciones internas, y de $\vec{R}$ y $\dot{\vec{R}}$ de la posición y velocidad del centro de masa. Dada esta complejidad en la dinámica, se aproxima el movimiento de todo el aparato al de un péndulo invertido posicionado en el centro de masa de todo, que es a groso modo, como nos movemos los bípedos.

3. Justificación

3.1. Justificación Principal

Cuando observamos los avances modernos en cuestiones de ciencia básica y desarrollo en nuevas tecnologías es imposible no reconocer que estos son casi competencia de los países desarrollados. Una rama del desarrollo tecnológico que está presente en casi cualquier gran industria es la de aparatos autónomos programables o robots. En los países en vías de desarrollo es necesario comenzar a plantearnos incursionar en esta importante área del conocimiento técnico, específicamente Honduras es un país en donde esta área se encuentra virgen. Es así como se justifica comenzar a establecer una línea de investigación para satisfacer de alguna manera la carencia, desde el punto de vista de la academia.

3.2. Necesidades Relacionadas

1. La incursión de los expertos en física en ámbitos en donde los modelos y las teorías de esta ciencia son preponderantes.
2. Abrir la ciencia física a la aplicación y fomentar la interdisciplinariedad en nuestro país.
3. Abrir el camino a nuevas experiencias de aplicación, con la finalidad de enriquecer los puntos de vista y las oportunidades laborales de nuevos estudiantes e investigadores.

4. Objetivo de Este Trabajo

4.1. Objetivo General

Construir la cinemática completa de un robot bípedo de 7 eslabones y 8 grados de libertad internos. Junto con las ecuaciones dinámicas aproximadas a un péndulo invertido, con masa ubicado en el centro de masa del aparato.

4.2. Objetivos específicos

1. Construir las matrices correspondientes a cada rotación, en función del ángulo de rotación correspondiente.
2. Construir los vectores de posición de cada eslabón, como función de los ángulos de rotación.
3. Construir las ecuaciones de movimiento aproximadas por péndulo invertido.

5. Fundamento Teórico

Nos apoyamos en tres grandes áreas de saber para llevar a buen término un trabajo de esta índole. El robot es un sistema mecánico, y como tal es necesario como primer paso desarrollar un modelo mecánico que sustente todo el estudio teórico subsecuente. Este modelo conlleva el desarrollo de su cinemática la cual implica encontrar las relaciones que tienen las posiciones relativas del sistema con otras partes del mismo y con su entorno. Implica por otra parte el desarrollo de un modelo dinámico que exprese las relaciones de fuerzas, velocidades y posiciones ya que es sobre los torques de motores que se tiene el control.

5.1. Cinemática de una cadena

La cinemática estudia las relaciones entre las variables que caracterizan el movimiento sin importar las causas del mismo, en casos de partículas puntuales es relativamente sencillo una descripción del sistema mediante relaciones y el cálculo. Para el caso de cadenas que en realidad son conjuntos de cuerpos rígidos concatenados, estas relaciones las tenemos que generalizar acudiendo también al álgebra lineal ya que interesan sus posiciones y orientaciones relativas a un sistema de referencia.

Supongamos que tenemos un sistema de n eslabones rígidos concatenados por sus extremos, y queremos establecer las relaciones de posición y orientación de los eslabones en relación de un sistema de referencia cero y entre ellos.

5.1.1. Orientaciones de eslabones

Primero la posición del i -ésimo eslabón la caracterizaremos mediante los vectores de posición r_i de las coyunturas de enlace entre los eslabones i -ésimo e $i + 1$ -ésimo. Tomando como centro del sistema de referencia un eslabón llamado G.

Ahora las relaciones de orientación entre dos eslabones las podemos conseguir recurriendo a las rotaciones que se deben hacer desde el primer eslabón hasta llegar a la orientación del segundo. Para ello tenemos que encontrar las matrices de rotación que

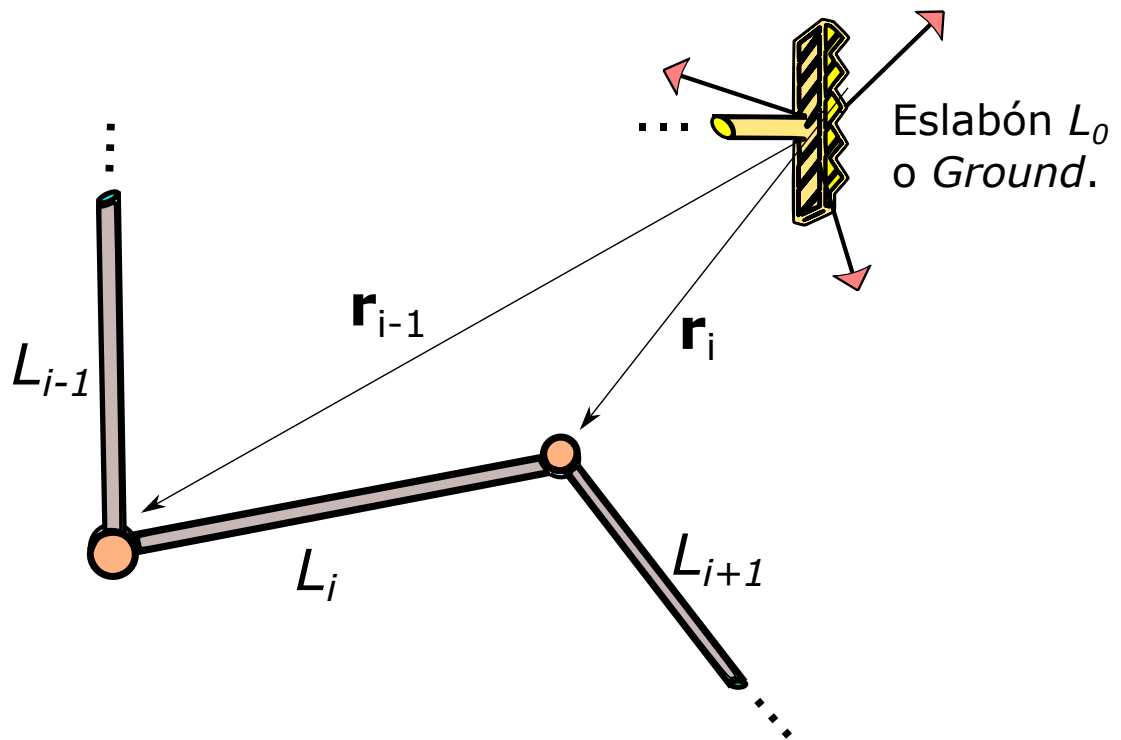


Figura 1: porción de una cadena, con eslabones L_i , L_{i-1} y L_{i+1} . En esta se ve los vectores de posición de los finales de eslabón r_{i-1} y r_i que representan la posición de los eslabones L_{i-1} y L_i .

han de aplicarse al vector de posición de primer eslabón para estar orientado con el segundo. Si llamamos L_i al i -ésimo vector de posición de un eslabón que está conectado con el eslabón L_{i-1} en su extremo inicial y con el eslabón L_{i+1} en su extremo final, entonces llamaremos $R_{i-1,i}$ a la matriz de rotación que lleva al eslabón L_{i-1} a la misma orientación de L_i , y a $R_{i,i+1}$ a la matriz de rotación de L_i a L_{i+1} . Y así sucesivamente. Una vez que obtenemos todas las matrices de rotación relativas de un eslabón hacia su eslabón subsecuente, tenemos caracterizado todo el sistema, ya que una rotación de un eslabón cualquiera hacia uno siguiente (no necesariamente seguidos) se obtiene multiplicando las matrices de rotación entre eslabones que se quieren orientar. Por ejemplo, para rotar el eslabón L_n hasta estar igual al eslabón L_5 se haría multiplicando por izquierda de $R_{2,3}$ por $R_{3,4}$ por $R_{4,5}$, y a esta matriz la llamaremos $R_{2,5}$. Así entonces:

$$R_{2,5} = R_{4,5}R_{3,4}R_{2,3}. \quad (1)$$

De tal manera que la orientación del eslabón L_5 , relativa a L_2 queda así:

$$L_5 = R_{4,5}R_{3,4}R_{2,3}L_2 = R_{2,5}L_2. \quad (2)$$

Caracterizar por completo un estado de posición de una cadena (robot) implica la utilización combinada de los dos procedimientos anteriores, esto es, establecer las posiciones de las coyunturas en relación de la base G, y al mismo tiempo vamos encontrando las matrices de rotación que establecen las orientaciones relativas.

Matriz de rotación. $SO(3)$ ya dijimos que es necesario establecer la posición y orientación de los eslabones. En caso de la posición está claro, pero la orientación está definida en base a matrices de rotación que se aplican de un eslabón para orientar uno siguiente. Así que necesitamos obtener estas matrices.

Para lo anterior nos basaremos en el artículo de Taylor y Kriegman [9], en donde se establece que dado un vector unitario $\hat{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y} + u_z\hat{z}$ que parte del origen, la matriz de rotación R , alrededor de este vector unitario es:

$$R = \begin{pmatrix} (1 - \cos(\theta))u_x^2 + \cos(\theta) & (1 - \cos(\theta))u_xu_y - \sin(\theta)u_z & \sin(\theta)u_y + (1 - \cos(\theta))u_xu_z \\ (1 - \cos(\theta))u_xu_y + \sin(\theta)u_z & (1 - \cos(\theta))u_y^2 + \cos(\theta) & (1 - \cos(\theta))u_yu_z - \sin(\theta)u_x \\ (1 - \cos(\theta))u_xu_z - \sin(\theta)u_y & \sin(\theta)u_x + (1 - \cos(\theta))u_yu_z & (1 - \cos(\theta))u_z^2 + \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Donde θ es el ángulo que rota el objeto rígido alrededor de $\vec{u}$. Al aplicar este resultado a los eslabones de un robot tenemos que mover estos hacia el origen antes ya que $\vec{u}$ parte del origen, ver figura 2.

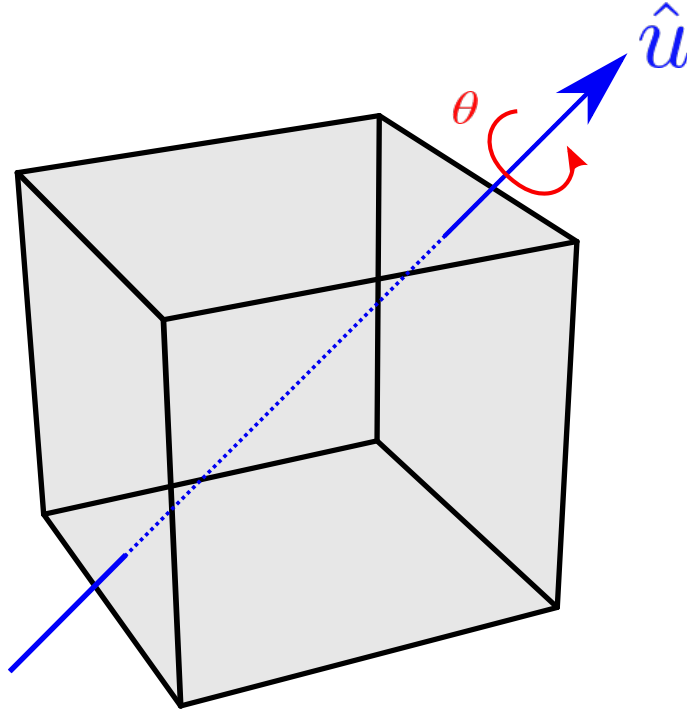


Figura 2: Vector unitario $\hat{u}$, el cual establece la dirección alrededor del cual gira el cuerpo un ángulo θ .

Ahora ya tenemos completamente establecido un método para caracterizar las orientaciones de cada uno de los eslabones de un robot que son cuerpos rígidos.

5.1.2. Vectores de posición de cada junta

Las orientaciones relativas de cada eslabón en base a la ecuación (3) están en un sistema de referencia propio al eslabon que rota, de tal forma que no tenemos la posición

de este en referencia a L_0 . Para ello necesitamos desplazar cada eslabon al sistema de referencia común. Para esto realizamos los pasos siguientes.

1. Se selecciona el eslabón G o L_0 y el origen de los ejes coordenados del sistema de referencia S se colocan en este eslabón. Lo anterior establece posición y orientación de L_0 en el sistema S .
2. Se coloca L_1 en su orientación de inicio, esta orientación es una extensión de L_0 en dirección del eslabón L_1 .
3. Se desplaza momentáneamente el origen de coordenadas a la coyuntura entre L_0 y L_1 .
4. Se escoge la dirección de rotación que hará el eslabón L_1 en relación a L_0 . Esto permite tomar el vector unitario $\vec{u}$ a conveniencia.
5. Con $\vec{u}$ ya establecido se encuentra la matriz de rotación R alrededor de este, multiplicandola por L_1 . El vector de orientación de L_1 debe partir su rotación de su posición $\theta = 0$, la cual se escoge a conveniencia del movimiento del robot.
6. Por último, de vuelve a desplazar el origen de coordenadas a G . Esto es mediante una simple suma vectorial.

Cada uno de los paso anteriores se vuelve a repetir para cada uno de los eslabones L_i y para cada coyuntura. De tal forma que el vector de posición de la coyuntura i -ésima entre los eslabones i -ésimo y el $(i+1)$ -ésimo es:

$$\vec{r}_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i) = R_i R_{i-1} \dots R_1 \vec{r}_i(0, 0, 0) + \vec{r}_{i-1}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{i-1}). \quad (4)$$

La figura 3 muestra este vector de posición.

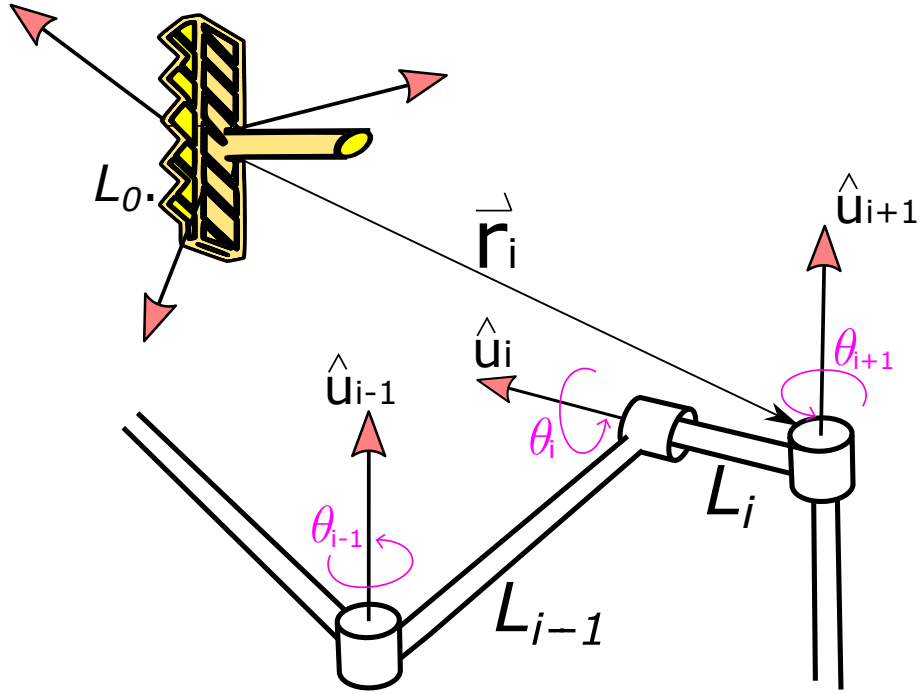


Figura 3: Vector de posición de la unión entre los eslabones i -ésimo y el $(i+1)$ -ésimo. Este depende de los ángulos que rota cada eslabón anterior.

5.2. Dinámica de la cadena

Las ecuaciones 4 nos otorgan el conjunto de las relaciones de posiciones de las articulaciones del aparato, esto nos permite tener un control posicional del mismo, pero es imposible hacer estimaciones de estabilidad ¹ solo con estas ecuaciones, por lo que hay que obtener las relaciones dinámicas entre las mismas variables angulares anteriores. Aunque conocemos las posiciones de las coyunturas, el problema de la dinámica de una cadena pasa por conocer la posición de la masa de cada eslabón, más específicamente de su centro de masa, ya que cada eslabón es en un cuerpo rígido. De tal forma que la posición de un eslabón se toma como la posición de su centro de masa. Esto desde luego se tiene que encontrar experimentalmente en cada caso.

¹Poder controlar un aparato de este tipo pasa por un análisis serio de las regiones estabilidad en las configuraciones de posición y velocidad de cada eslabón, en el trabajo presente no se tiene por objetivo el control, pero si dejar listo su estudio

Cuando se conoce el centro de masa de cada eslabón, se puede encontrar su posición en el sistema de L_0 mediante el proceso descrito por la ecuación 5, con la única diferencia que el vector de posición inicial es el centro de masa ya descrito, en el sistema de referencia propio al eslabón, ver figura 4. De tal forma que estos vectores quedan de la siguiente forma, la cual es en esencia idéntica a la ecuación 4, con el cambio ya mencionado.

$$\vec{r}_{CMi}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i) = R_i R_{i-1} \dots R_1 \vec{r}_i(0, 0, 0) + \vec{r}_{cm(i-1)}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{i-1}). \quad (5)$$

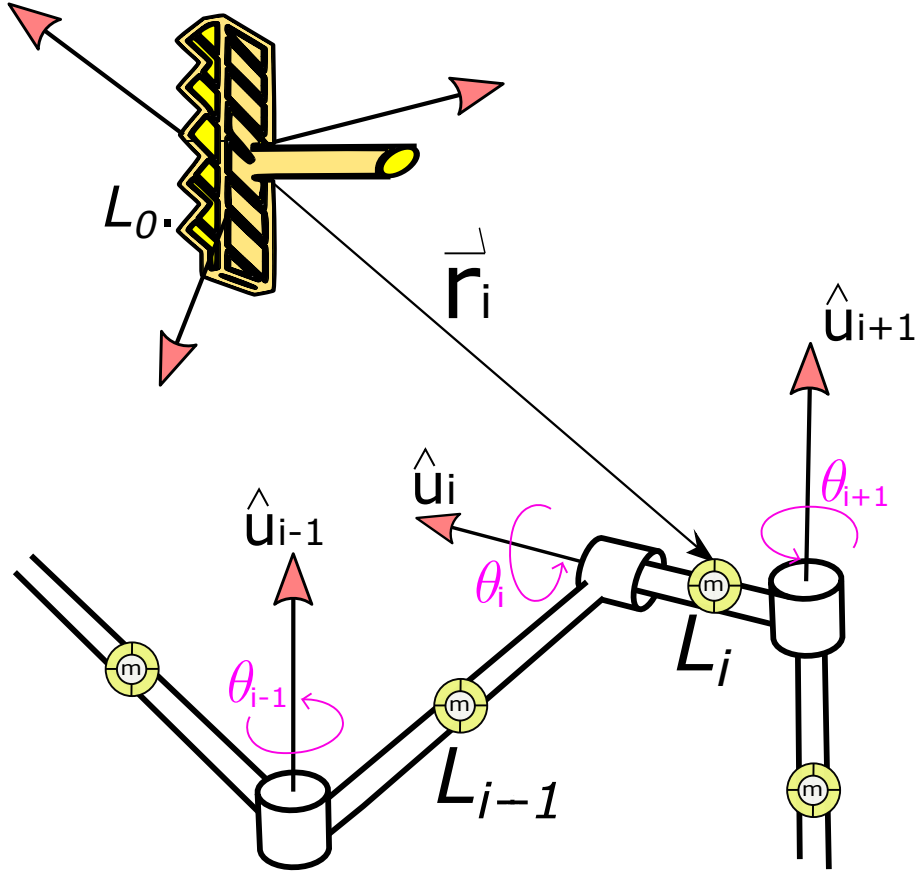


Figura 4: Vector de posición de la unión entre los eslabones i -ésimo y el $(i+1)$ -ésimo. Este depende de los ángulos que rota cada eslabón anterior.

Se supone, claro está, que el aparato debe interactuar en un entorno, de tal forma que conocer las posiciones de los eslabones en un sistema de referencia propio es incompleto. Debemos por lo tanto encontrar las posiciones en el sistema de referencia de su entorno,

el cual esta inmóvil, un suelo plano por lo general. Si en el sistema S del entorno se llama $\vec{R}$ al vector de posición de L_o , y $\vec{R}_i$, entonces la posición del i -ésimo eslabón es la siguiente.

$$\vec{R}_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \vec{R}) = \vec{R} + \vec{r}_i, \quad (6)$$

$$\vec{R}_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \vec{R}) = \vec{R} + R_i R_{i-1} \dots R_1 \vec{r}_i(0, 0, 0) + \vec{r}_{cm(i-1)}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{i-1}). \quad (7)$$

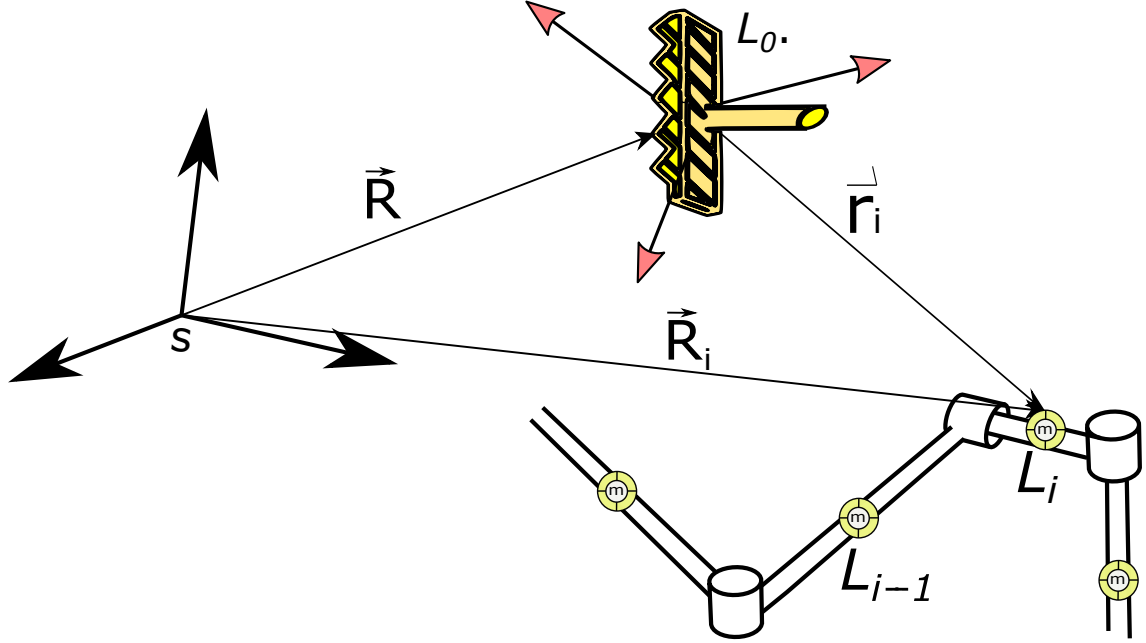


Figura 5: Vector de posición del eslabón i , $\vec{R}_i$.

Con los vectores de posición en S , cada uno en función de las coordenadas generalizadas $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, x, y, z$ se procede a aplicar las ecuaciones de Euler Lagrange.

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (8)$$

Donde Q_i son las fuerzas generalizadas, no necesariamente conservativas. en el momento de la implementación de un prototipo estas en general son las que generan el movimiento deseado, y por lo general son proporcionadas por motores o actuadores.

Se debe comprender que a diferencia de un sistema conservativo ², en donde las ecuaciones del movimiento tienen como resultado las trayectorias del movimiento, en el caso de un robot, los movimientos son ya conocidos, dado que los controla un usuario o son automatizados para un fin. De tal forma que una vez teniendo las ecuaciones el proceso consiste en invertir el sistema de ecuaciones para encontrar las fuerzas necesarias para realizar el movimiento deseado. Esto último no será hecho aquí, porque no es nuestra finalidad el control.

5.3. Definición de Términos Utilizados

Nombre de variables Establecemos ahora los nombres que le damos a las distancias de eslabones y coyunturas, para ser utilizados como la notación en los cálculos subsecuentes.

Eslabones y sus distancias. Los eslabones que conforman la cadena tienen distancias constantes; alto, largo y ancho, ya que son cuerpos rígidos. Pero el único de estos que nos interesa es la longitud, dado que es esta la que nos permite describir el vector de posición. Los eslabones y sus respectivas distancias tendrán los siguientes nombres:

P. Pelvis. Longitud desde el centro de referencia hasta la cadera derecha o izquierda.

Al eslabón pelvis derecho le llamamos Pd , y al izquierdo Pi .

M. Muslo. Longitud desde la cadera hasta la rodilla. Al eslabón muslo derecho le llamamos Md y al izquierdo Mi

L. Leg. Longitud desde la rodilla hasta el tobillo. Al eslabón Leg derecho lo llamamos Ld , y al izquierdo Li .

F. Falange. Longitud desde el tobillo hasta la punta del dedo. Al eslabón falange derecho lo llamamos Fd , y al izquierdo Fi .

²Donde las fuerzas generalizadas son resultado del negativo del gradiente de potenciales $F = -\nabla U$

Coyunturas. Las coyunturas unen los eslabones y sirven para establecer los vectores de posición de estos, como ya se mencionó anteriormente. Los nombres que le daremos son:

- C. Cadera. Coyuntura entre los eslabones pelvis y el muslo. A la cadera derecha le llamamos Cd , a la izquierda Ci .
- R. Rodilla. Coyuntura entre los eslabones muslo y leg. A la rodilla derecha le llamamos Rd , y a la izquierda Ri .
- T. Tobillo. Coyuntura entre los eslabones leg y falange. Al tobillo derecho le llamamos Td , y al izquierdo Ti .
- D. Dedo. Final del eslabón falange. Al dedo derecho le llamamos Dd , y al izquierdo Di .

Vectores de posición. Como ya se dejó evidenciado (ver 4) los vectores de posición de los eslabones y coyunturas coinciden, ya que de los eslabones, la posición que nos importa es la de sus extremos, o sea la de su coyuntura posterior. Es así que estos vectores de posición en que necesitamos son:

$\vec{r}_{Cd}$ Vector de posición de Cd .

$\vec{r}_{Ci}$ Vector de posición de Ci .

$\vec{r}_{Rd}$ Vector de posición de Rd .

$\vec{r}_{Ri}$ Vector de posición de Ri .

$\vec{r}_{Td}$ Vector de posición de Td .

$\vec{r}_{Ti}$ Vector de posición de Ti .

$\vec{r}_{Dd}$ Vector de posición de Dd .

$\vec{r}_{Di}$ Vector de posición de Di .

La información anterior se muestra en la figura 6 y 12.

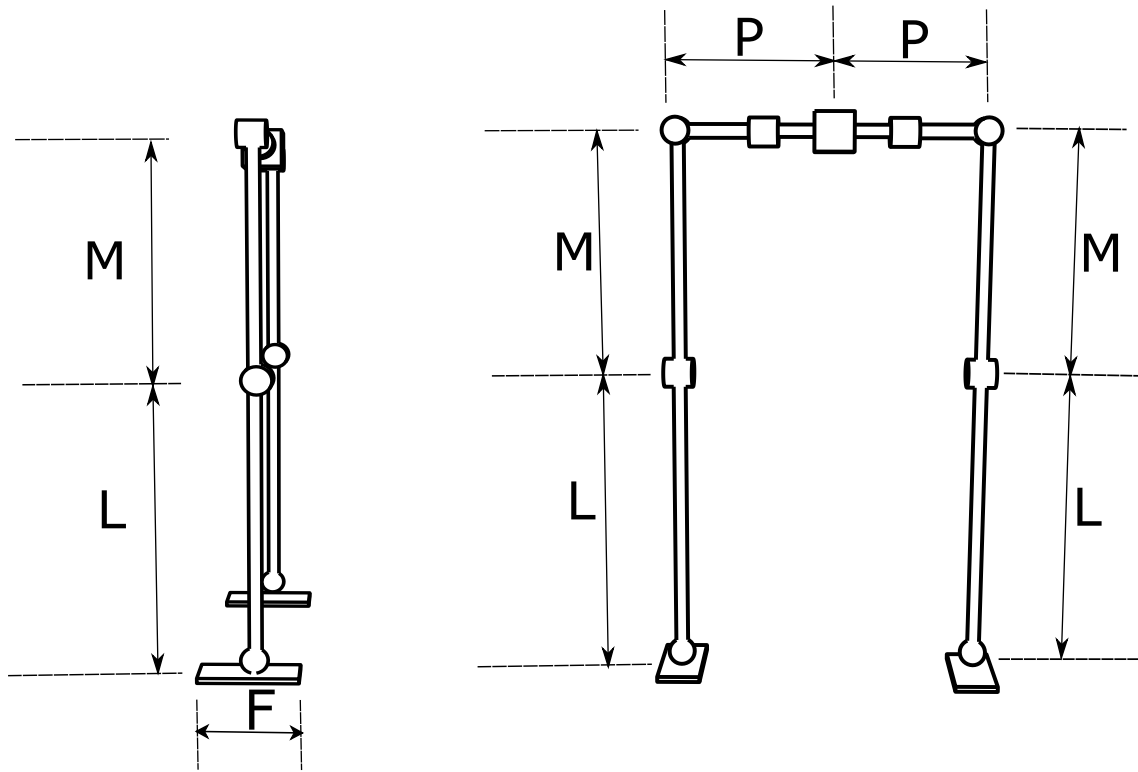


Figura 6: Distancias de los eslabones. Vista lado derecho y vista frontal.

6. Metodología

Ahora aplicaremos las técnicas descritas en el apartado anterior para describir el estado de posición del robot bípedo en cuestión. Iniciamos describiendo la cadena que analizamos la cual consta de nueve eslabones y ocho coyunturas. Internamente posee ocho grados de libertad, al que se le debe añadir tres grados adicionales que corresponden al movimiento relativo del robot con relación al suelo.

Se toma como eslabón L_0 al que corresponde con la cadera, de tal manera que existe simetría sagital con respecto al plano zy , la línea de la cadera se corresponde con el eje x , de tal manera que el lado derecho del robot a las x positivas, el lado izquierdo a las x negativas, la marcha hacia adelante del robot corresponde a las y positivas y el movimiento hacia arriba y abajo se da en el eje z . En la figura 7, un esquema general del robot en estudio.

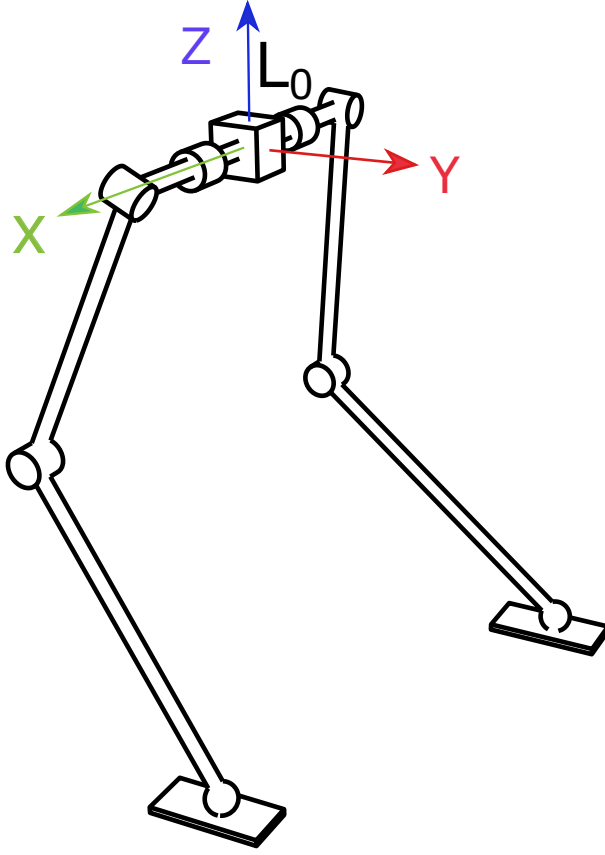


Figura 7: Prototipo de robot bípedo. L_0 es el muslo M , el centro de coordenadas esta en el cubo.

6.1. Proceso Para la Obtención de Las Matrices de Rotación.

Así que para obtener las matrices de rotación se comienza con la posición $r_0 = 0$ para el eslabón de la pelvis P . Tomando la orientación de este sistema de referencia con el eje x a lo largo de la longitud de la pelvis, como se muestra en la figura 7. y procedemos de la siguiente manera.

1. El muslo derecho M_d debe rotar un ángulo θ_1 alrededor del vector unitario $\hat{u}_1 = \hat{x}$ (se escoge según uno desee este movimiento). Se construye la matriz aplicando lo anterior a la ecuación 3 alrededor de $\hat{u}_1$, obteniendo $R_1 = R(\theta_1)$. Ver figura 8
2. Teniendo la matriz R_1 , esta nos sirve para encontrar el vector unitario $\hat{u}_2$ alrede-

dor de cual gira también el muslo derecho M_d (según uno desee este movimiento), esto es, $\hat{u}_2 = R_1 \hat{u}_2(\theta_2 = 0)$. Se aplica la ecuación 3, rotando un ángulo θ_2 alrededor de $\hat{u}_2$, obteniendo $R_2 = R(\theta_1, \theta_2)$. Ver figura 8

3. Teniendo las matrices R_1 y R_2 , estas nos sirven para encontrar el vector unitario $\hat{u}_3$ alrededor de cual gira el eslabón pierna derecha L_d (según se desee el movimiento), esto es, $\hat{u}_2 = R_2 \hat{u}_2(\theta_3 = 0)$. Se aplica esto a la ecuación 3, rotando un ángulo θ_3 , alrededor de $\hat{u}_2$, obteniendo $R_3 = R(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$.
4. Teniendo la matriz R_3 , esta nos sirve para encontrar el vector unitario $\hat{u}_4$ alrededor de cual gira el eslabón falange derecho F_d (esto a escogencia nuestra), esto es, $\hat{u}_4 = R_3 \hat{u}_4(\theta_4 = 0)$. Se aplica lo anterior a la ecuación 3 alrededor de $\hat{u}_4$, obteniendo $R_4 = R(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$.
5. El muslo izquierdo M_i debe rotar un ángulo θ_5 alrededor del vector unitario $\hat{u}_5 = \hat{x}$ (se escoge según se desee este movimiento). Se construye la matriz aplicando lo anterior a la ecuación 3 alrededor de $\hat{u}_5$, obteniendo $R_5 = R(\theta_5)$.
6. Teniendo la matriz R_5 , podemos encontrar el vector unitario $\hat{u}_6$ alrededor de cual gira también el muslo izquierdo M_i (según uno desee este movimiento), esto es, $\hat{u}_6 = R_5 \hat{u}_6(\theta_6 = 0)$. Se aplica la ecuación 3, rotando un ángulo θ_6 alrededor de $\hat{u}_6$, obteniendo $R_6 = R(\theta_5, \theta_6)$.
7. Teniendo la matriz R_6 , nos sirve para encontrar el vector unitario $\hat{u}_7$ alrededor de cual gira el eslabón pierna derecha L_i (según se desee el movimiento), esto es, $\hat{u}_7 = R_6 \hat{u}_7(\theta_7 = 0)$. Se aplica esto a la ecuación 3, rotando un ángulo θ_7 , alrededor de $\hat{u}_7$, obteniendo $R_7 = R(\theta_5, \theta_6, \theta_7)$.
8. Teniendo la matriz R_7 , podemos encontrar el vector unitario $\hat{u}_8$ alrededor de cual gira el eslabón falange izquierdo F_i (esto a escogencia nuestra), esto es,

$\hat{u}_8 = R_7 \hat{u}_8(\theta_8 = 0)$. Se aplica lo anterior a la ecuación 3 alrededor de $\hat{u}_8$, obteniendo $R_8 = R(\theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)$.

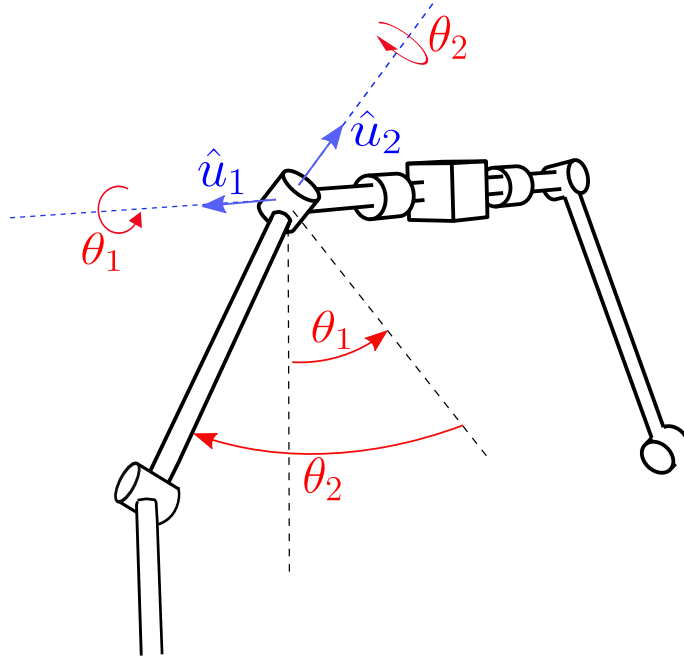


Figura 8: Vectores initarios $\hat{u}_1$ y $\hat{u}_2$, aredond de los cuales gira Md . Las líneas punteadas en azul marcan los ejes de rotación, las líneas punteadas negras marzan las posiciones iniciales donde los ángulos valen cero.

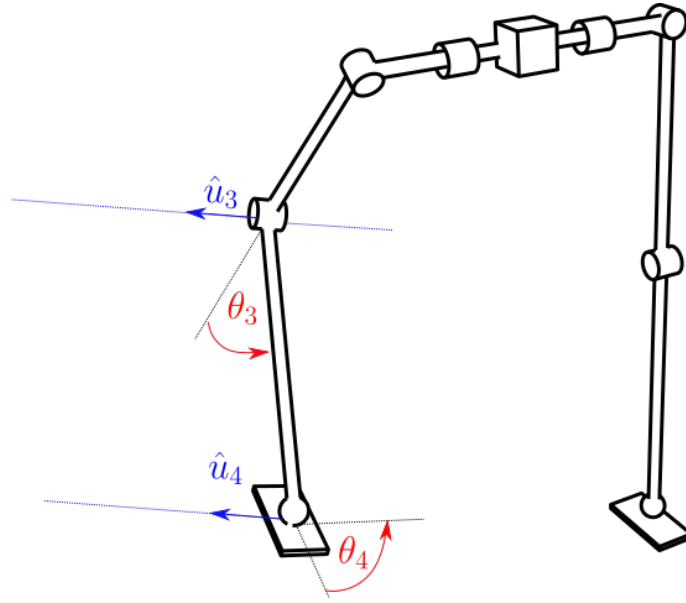


Figura 9: Vectores initalios $\hat{u}_3$ y $\hat{u}_4$, aredeor de los cuales giran Ld y Fd respectivamente. Las líneas punteadas en azul marcan los ejes de rotación, las líneas punteadas negras marzan las posiciones iniciais donde los ángulos valen cero.

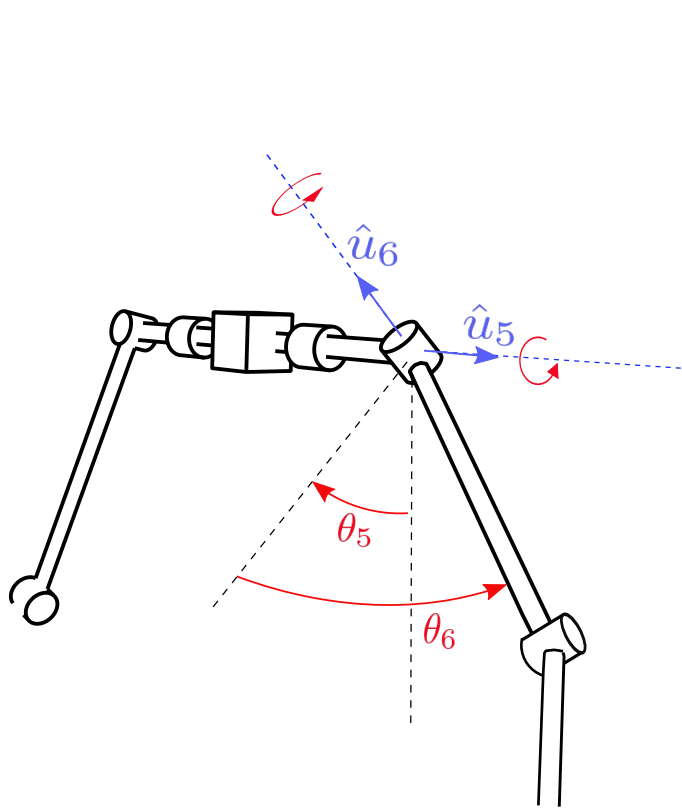


Figura 10: Vectores initaros $\hat{u}_5$ y $\hat{u}_6$, alrededor de los cuales gira Mi . Las líneas punteadas en azul marcan los ejes de rotación, las líneas punteadas negras marzan las posiciones iniciales donde los ángulos valen cero.

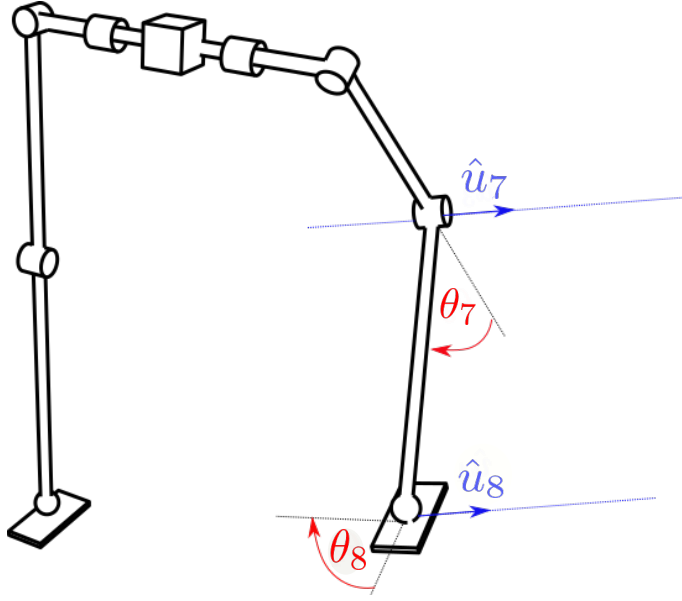


Figura 11: Vectores initarios $\hat{u}_7$ y $\hat{u}_8$, alrededor de los cuales giran Li y Fi respectivamente. Las líneas punteadas en azul marcan los ejes de rotación, las líneas punteadas negras marzan las posiciones iniciales donde los ángulos valen cero.

6.2. Proceso Para la Obtención de los Vectores de Posición.

Aunque desde el punto de vista dinámico lo importantes son los vectores de posición de los centros de masa de cada eslabón, resulta que el sistema no es solo el conjunto de masas puntuales, es también un conjunto de eslabones que son cuerpos con forma, por lo que tenemos que establecer tanto las posiciones de las coyunturas como de los centros de masa de cada eslabón.

6.2.1. Posiciones de las Coyunturas

Conocer las matrices de rotación nos permite calcular las posiciones usando el proceso iterativo que describe la ecuación 5 para el i -esimo vector. Esto es un proceso secuencia al igual que el anterior.

1. Primero se encuentra se encuentra $\vec{r}_{Cd}$ y $\vec{r}_{Ci}$, correspondientes a las posiciones de la cadera derecha e izquierda respectivamente. Dado que la posición central de la

pelvis es la posición cero, las posiciones de Cd y Ci son constantes este sistema.

$$\vec{r}_{Cd} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

y

$$\vec{r}_{Ci} = \begin{pmatrix} -P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

2. Las posiciones $\vec{r}_{Rd}$ y $\vec{r}_{Ri}$ correspondientes a las coyunturas Rd y Ri son segundas en el proceso de cálculo y que tenemos las posiciones anteriores a estos, calculadas en el paso anterior.

$$\vec{r}_{Rd} = R_2 R_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M \end{pmatrix} + \vec{r}_{Cd}, \quad (11)$$

y

$$\vec{r}_{Ri} = R_6 R_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M \end{pmatrix} + \vec{r}_{Ci}. \quad (12)$$

3. Ya con los vectores anteriores, podemos encontrar las posiciones $\vec{r}_{Td}$ y $\vec{r}_{Ti}$, de las coyunturas Td y Ti respectivamente.

$$\vec{r}_{Td} = R_3 R_2 R_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -L \end{pmatrix} + \vec{r}_{Rd}, \quad (13)$$

y

$$\vec{r}_{Ti} = R_7 R_6 R_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -L \end{pmatrix} + \vec{r}_{Ri}. \quad (14)$$

4. Por último, se obtienen $\vec{r}_{Dd}$ y $\vec{r}_{Di}$, de la punta de los dedos Dd y Di .

$$\vec{r}_{Dd} = R_4 R_3 R_2 R_1 \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{r}_{Td}, \quad (15)$$

y

$$\vec{r}_{Di} = R_8 R_7 R_6 R_5 \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{r}_{Ti}. \quad (16)$$

Cada vector de posición de las coyunturas se ven en la imagen 12.

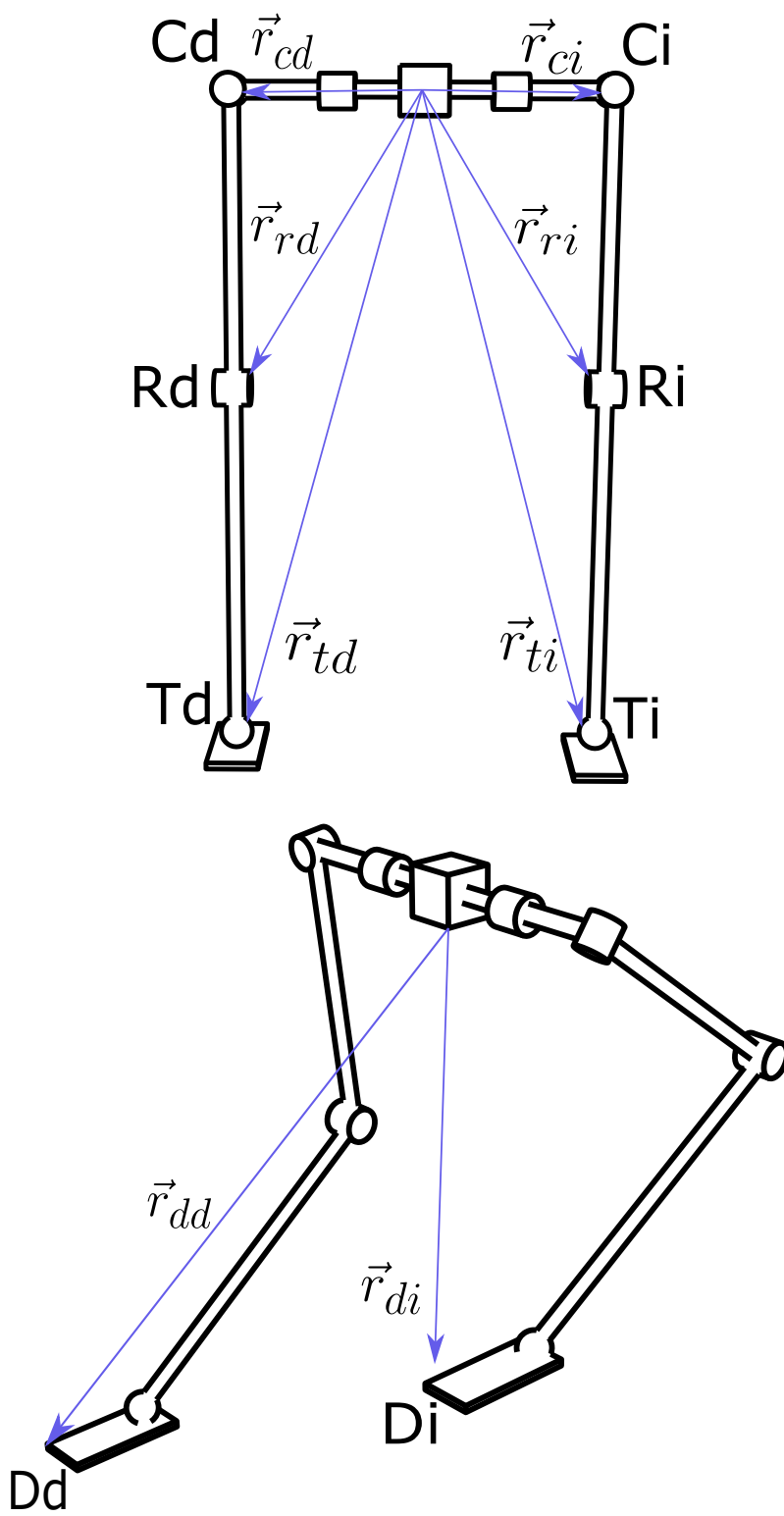


Figura 12: Coyunturas y sus respectivos vectores de posición en color azul.

6.2.2. Posiciones de los Eslabones.

El proceso para los vectores de posición de los centros de masa de cada eslabón es el mismo descrito para las coyunturas, que de hecho son necesarios, pero con la diferencia que debemos conocer el centro de masa de cada eslabón y referenciar la posición a estos.

1. La posición de la pelvis es cero en su mismo sistema de referencia.

$$\vec{r}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

2. La posición de los muslos derecho e izquierdo, $\vec{r}_{Md}$ y $\vec{r}_{Mi}$, deben ser obtenidos a partir de las posiciones de $\vec{r}_{Cd}$ y $\vec{r}_{Ci}$ ya que se desprenden de estas y tomando en cuenta su centro de masa.

$$\vec{r}_{Md} = R_2 R_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m \end{pmatrix} + \vec{r}_{Cd}, \quad (18)$$

y

$$\vec{r}_{Mi} = R_6 R_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m \end{pmatrix} + \vec{r}_{Ci}. \quad (19)$$

3. Las posiciones de las piernas derechas e izquierda $\vec{r}_{Ld}$ y $\vec{r}_{Li}$ son obtenidas a partir de las posiciones de $\vec{r}_{Ri}$ y $\vec{r}_{Rd}$ ya que se desprenden de estas y tomando en cuenta su centro de masa de Li y Ld .

$$\vec{r}_{Ld} = R_3 R_2 R_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} + \vec{r}_{Rd}, \quad (20)$$

y

$$\vec{r}_{Li} = R_7 R_6 R_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} + \vec{r}_{Ri}. \quad (21)$$

4. Y por último los vectores de los eslabones pies $\vec{r}_{Fd}$ y $\vec{r}_{Fi}$ que se desprenden de las articulaciones Ti y Td , las posiciones de las masas de estos se calcularían.

$$\vec{r}_{Fd} = R_4 R_3 R_2 R_1 \begin{pmatrix} 0 \\ f \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{r}_{Td}, \quad (22)$$

y

$$\vec{r}_{Fi} = R_8 R_7 R_6 R_5 \begin{pmatrix} 0 \\ f \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{r}_{Ti}. \quad (23)$$

La figura 13 muestra las posiciones de las masas.

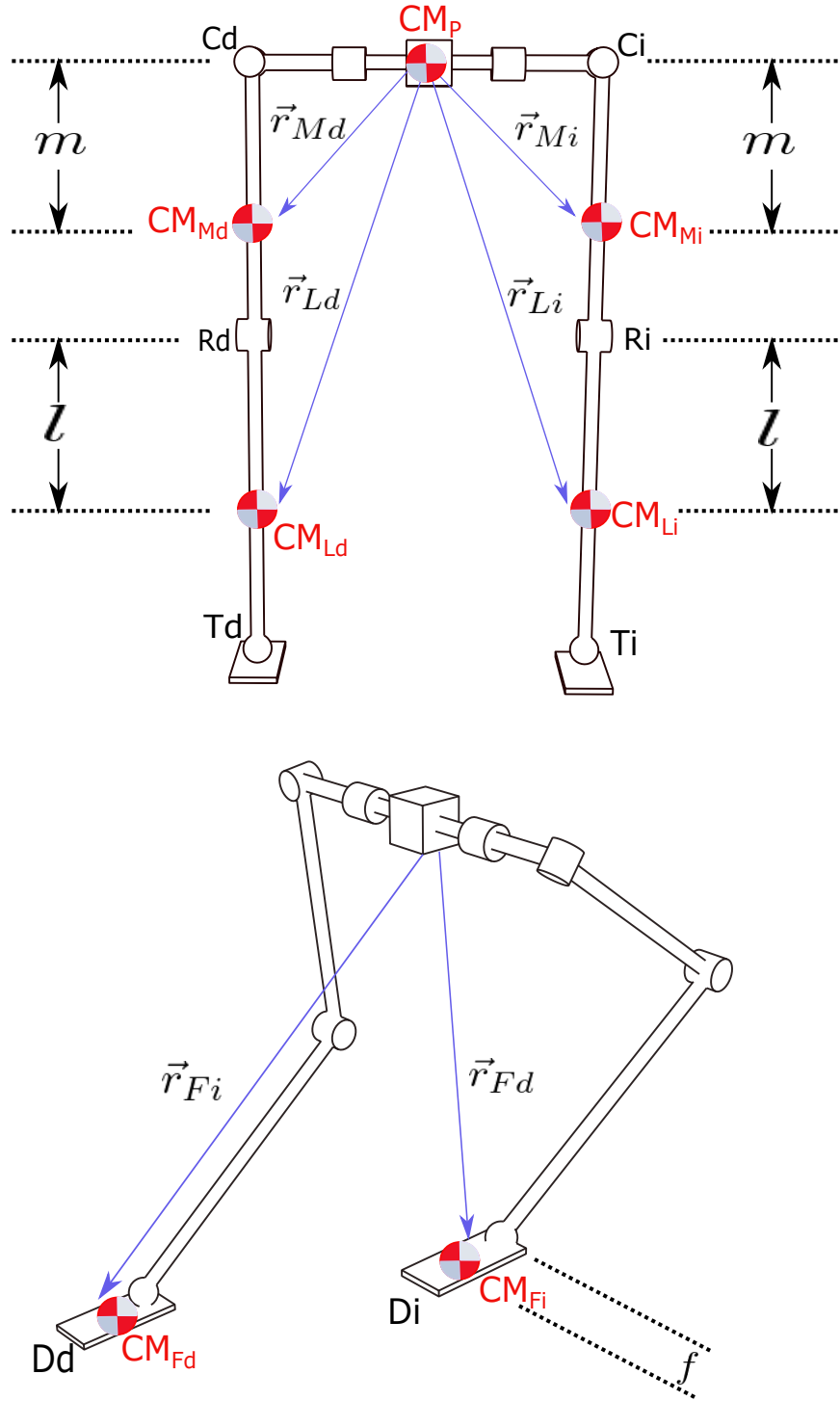


Figura 13: Centros de masa de los eslabones, y sus respectivos vectores de posición en color azul. Las distancias m , l y f de los centros de masa son medidos experimentalmente en cada eslabón.

6.3. Ecuaciones de Movimiento

El aparato debe moverse en un entorno, el cual se toma como un suelo plano por simplicidad. Los vectores de posición deben referirse a este sistema externo S . Llamaremos $\vec{R}_i$ a esas posiciones en el sistema, de tal forma que las posiciones en S son los vectores de posición ya encontrados en L_0 son desplazados. Si el vector de posición del centro de masa del aparato en S es R entonces la posición del i -ésimo eslabón es.

$$\vec{R}_i = \vec{R}(x, y, z) + \vec{r}_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i). \quad (24)$$

Así que la energía cinética del i -ésimo eslabón es.

$$T_i = \frac{1}{2} M_i \left(\frac{dR_i}{dt} \right)^2. \quad (25)$$

Y su energía potencial.

$$V_i = M_i g z_i. \quad (26)$$

La lagrangiana del aparato.

$$L = T - V = \sum_i \left(\frac{1}{2} M_i \left(\frac{d\vec{R}_i}{dt} \right)^2 - M_i g z_i \right). \quad (27)$$

Introducimos esta forma en las ecuaciones de Euler Lagrange.

Debe entenderse que esta forma de lagrangiana general anterior es muy intrincada, ya que los vectores de posiciones son multiplicaciones consecutivas de matrices tridimensionales de funciones de ángulos, de tal forma que derivar esas productorias matriciales, para encontrar las velocidades generalizadas, y poder realizar un desarrollo analítico completo requeriría un enorme poder de cálculo computacional. De Estudiar algún método analítico o numérico aplicable en ese caso general se deja como un problema a resolver en un trabajo futuro.

Por lo anterior, es que se realiza casi siempre un desarrollo aproximado que es aplicable para determinadas condiciones del aparato y su geometría. Esta aproximación es la de un péndulo invertido en tres dimensiones con masa ubicada en el centro de masa del robot, Arthur D. Kuo [10]. Esto significa que los cuerpos bípedos se mueven

casi como un péndulo invertido que está constantemente buscando las condiciones de equilibrio para desplazarse.

6.3.1. Centro de masa del robot.

Dado que conocemos las posiciones del centro de masa de cada eslabón el centro de masa de todo el aparato se calcula.

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^7 m_i \vec{R}_i}{\sum_{i=1}^7 m_i} = \frac{\sum_{i=1}^7 m_i \vec{R}_i}{M}. \quad (28)$$

Donde M es la masa total del aparato, y m_i la masa de cada eslabón.

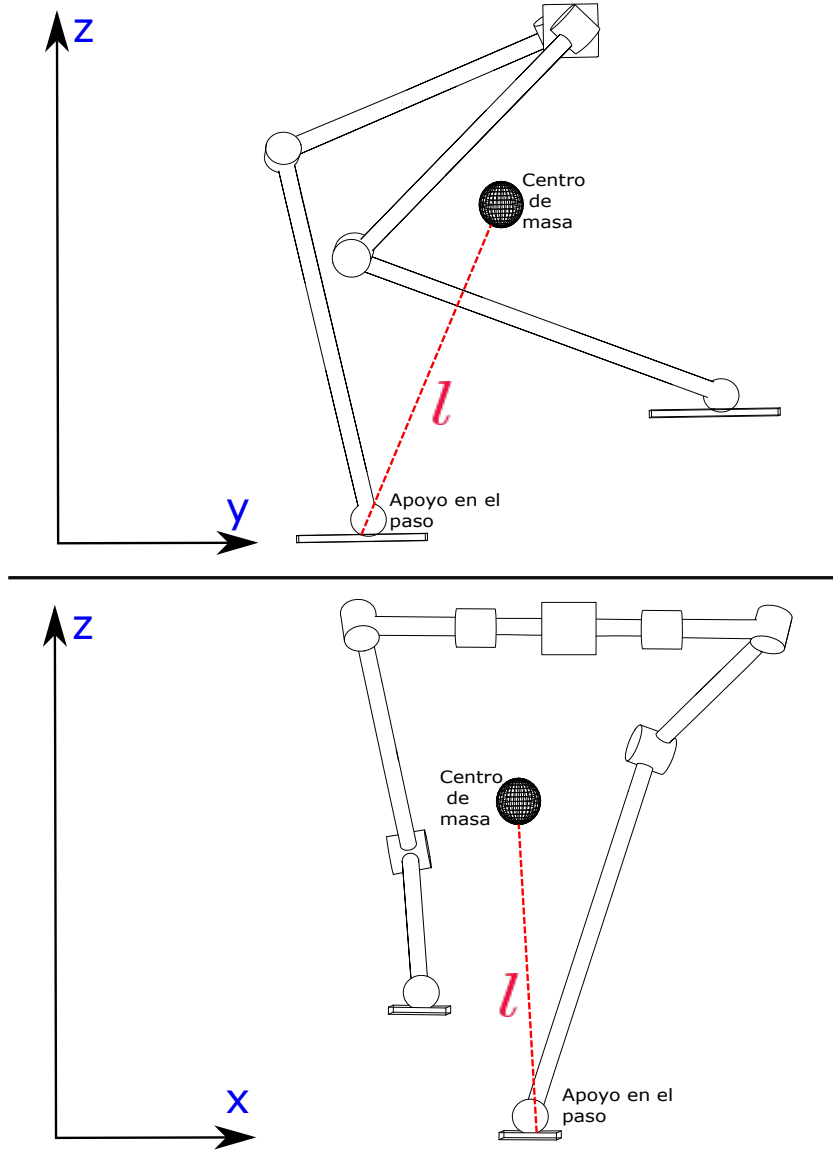


Figura 14: Centros de masa del robot

6.4. Ecuación del Péndulo Invertido.

La posición de centro de masa en su propio sistema de referencia S_0 es.

$$\vec{r}_0 = l \sin \alpha \cos \phi \hat{x} + l \sin \alpha \sin \phi \hat{y} + l \cos \alpha \hat{z}. \quad (29)$$

Mientras que la posición de la base del péndulo en el sistema de referencia del suelo S es.

$$\vec{r}_A = x_A \hat{x} + y_A \hat{y}. \quad (30)$$

Donde l es la distancia entre el pie de apoyo y el centro de masa.

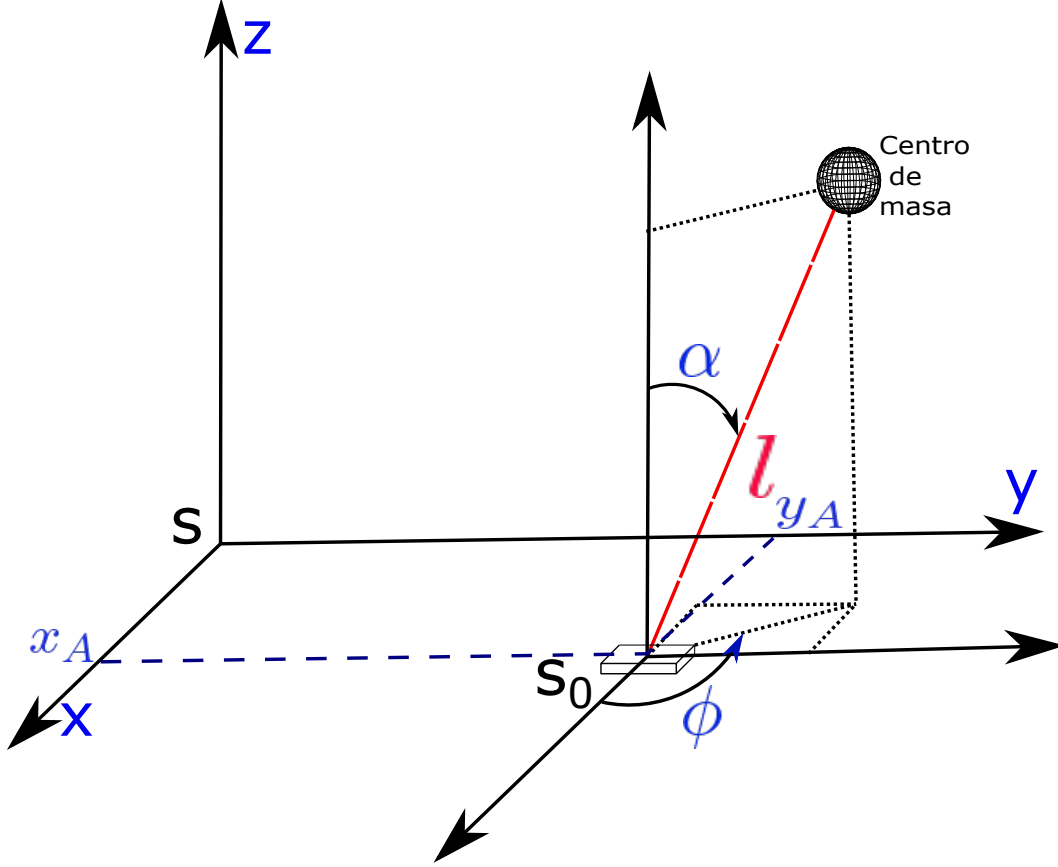


Figura 15: Centros de masa del robot

Así que la posición del centro de masa en el sistema del suelo es la suma de los anteriores dos.

$$\vec{R} = \vec{r}_0 + \vec{r}_A \quad (31)$$

$$\vec{R} = (x_A + l \sin \alpha \cos \phi) \hat{x} + (y_A + l \sin \alpha \sin \phi) \hat{y} + l \cos \alpha \hat{z}. \quad (32)$$

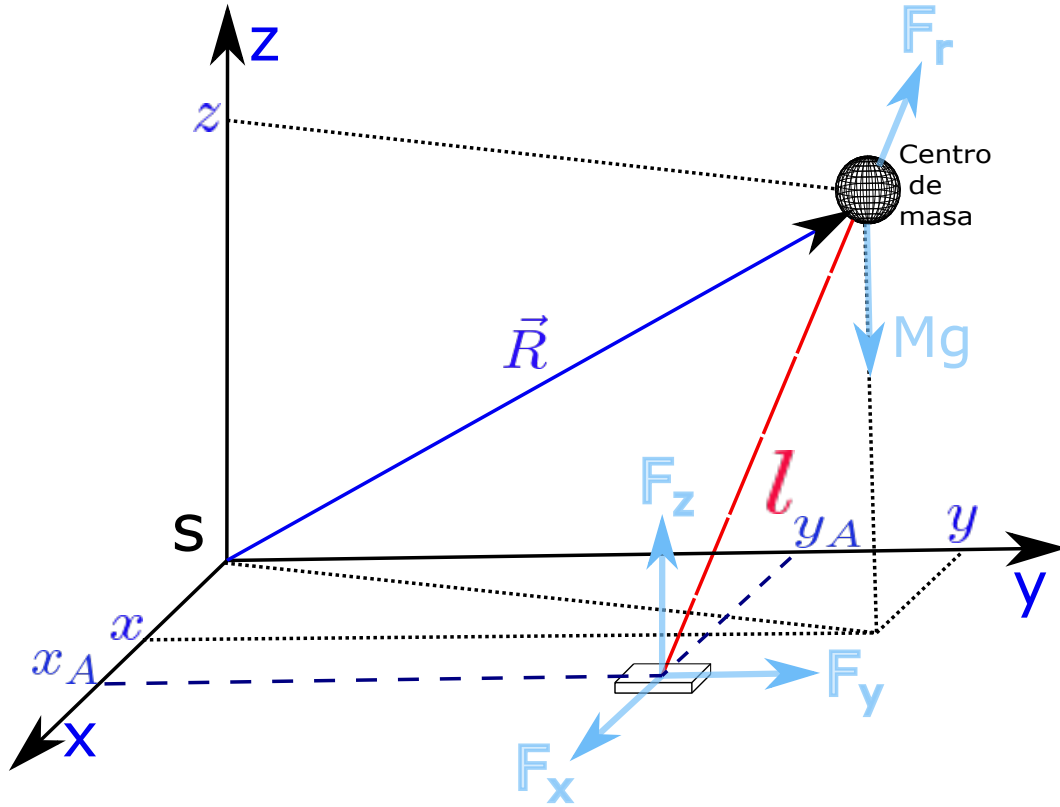


Figura 16: Centros de masa del robot

El vector de velocidad vendría dado por.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt}((x_A + l \sin \alpha \cos \phi)\hat{x} + (y_A + l \sin \alpha \sin \phi)\hat{y} + l \cos \alpha \hat{z}). \quad (33)$$

La energía potencial es.

$$Mgl \cos \alpha. \quad (34)$$

La lagrangiana se obtendría de la siguiente forma.

$$L = T - V, \quad (35)$$

$$L = \frac{1}{2}M(\vec{v})^2 - Mgy, \quad (36)$$

$$L = \frac{1}{2}M \left(\frac{d}{dt} ((x_A + l \sin \alpha \cos \phi)\hat{x} + (y_A + l \sin \alpha \sin \phi)\hat{y} + l \cos \alpha \hat{z}) \right)^2 - Mgl \cos \alpha. \quad (37)$$

Debe notarse que todas las variables anteriores, son coordenadas generalizadas de movimiento, y por lo tanto, son funciones del tiempo t , esto es.

$$\begin{aligned} x_A &= x_A(t), \\ y_A &= y_A(t), \\ \alpha &= \alpha(t), \\ \phi &= \phi(t), \\ l &= l(t). \end{aligned}$$

Debemos introducir ahora la lagrangiana en las ecuaciones de Euler Lagrange.

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (38)$$

Siendo Q_i las fuerzas externas a las que está siendo sometido el péndulo, y que mantendrán forzado al mismo en un constante equilibrio inestable.

Estas fuerzas están siendo aplicadas por los motores en primeras instancias, las cuales se ven reflejadas en última instancia, en interacciones de fuerzas con el suelo, y en dirección radial al péndulo ³; $\vec{F}_x$ y $\vec{F}_y$ y $\vec{F}_l$.

Las ecuaciones se encuentran para cada coordenada generalizada.

Ecuación de x_A :

$$F_x = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_A} - \frac{\partial L}{\partial x_A}, \quad (39)$$

³La fuerza que se encuentra en dirección radial $\vec{F}_l$ tiene descomposición en componentes x,y y z

Ecuación de y_A :

$$F_y = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_A} - \frac{\partial L}{\partial y_A}, \quad (40)$$

Ecuación de α :

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha}, \quad (41)$$

Ecuación de ϕ :

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi}, \quad (42)$$

Ecuación de l :

$$F_l = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{l}} - \frac{\partial L}{\partial l}. \quad (43)$$

6.5. Instrumentos y Métodos Utilizados

El desarrollo teórico y la modelación solamente hace uso de técnicas del álgebra lineal y el análisis matemático, es decir, se hace a mano. Pero una vez se tienen las ecuaciones y la algoritmia bien establecida se utiliza algún software de cálculo simbólico para hacer la derivación de las ecuaciones, a partir de los pasos descritos en las subsecciones anteriores. Como herramienta solamente se hace uso de una computadora, dotada de un procesador de 8 núcleos a un máximo de 4.6 GHz, y una RAM de 16 Gigabytes a 2600 MHz, de mi propiedad. Como herramientas de software, se hace uso del lenguaje de programación interpretado Wolfram [11], en el que se realizan las manipulaciones analíticas y algunas simulaciones para constatar la corrección en los modelos obtenidos. Y para realizar la imágenes se utilizaron los paquetes Blender [12] e Inkscape [13].

7. Resultados

En la sección anterior se ha dejado clara la algoritmia para conseguir el conjunto de las matrices y vectores deseados, además de planteados completamente la forma funcional de estos. De tal forma que al someter estos resultados preliminares al cómputo necesario obtuvimos los resultados expuestos en esta sección.

7.1. Matrices de Rotación.

Seguimos los pasos descritos en la sección 6.1 y la matriz 8 se obtienen los vectores unitarios alrededor de los cuales giran los eslabones, y con ellos las matrices de rotación.

De lo descrito en la ecuación 3, el vector unitario de rotación $\hat{u}_1$ y la matriz de rotación de muslo derecho R_1 .

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ 0 & \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix}. \quad (44)$$

De lo descrito en numeral 2, el vector unitario de rotación $\hat{u}_2$ y la matriz de rotación de muslo derecho R_2 .

$$R_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) & \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) & \cos^2(\theta_1)(1 - \cos(\theta_2)) + \cos(\theta_2) & \sin(\theta_1)\cos(\theta_1)(1 - \cos(\theta_2)) \\ -\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) & \sin(\theta_1)\cos(\theta_1)(1 - \cos(\theta_2)) & \sin^2(\theta_1)(1 - \cos(\theta_2)) + \cos(\theta_2) \end{pmatrix}. \quad (45)$$

De lo descrito en numeral 3, el vector unitario de rotación $\hat{u}_3$ y la matriz de rotación de muslo derecho R_3 es la matriz.

$$R_3 = \begin{pmatrix} R_3^1 & R_3^2 & R_3^3 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Donde los vectores R_3^1 , R_3^2 , R_3^3 son los vectores columna siguientes.

$$R_3^1 = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3)) + \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\cos(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3)) - \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\sin(\theta_3) \\ -\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\sin(\theta_3) - \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\cos(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3)) \end{pmatrix}. \quad (47)$$

$$R_3^2 = \begin{pmatrix} \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3)) + \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) \\ \sin^2(\theta_1) \sin^2(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3)) + \cos(\theta_3) \\ \cos(\theta_2) \sin(\theta_3) - \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) \sin^2(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3)) \end{pmatrix}. \quad (48)$$

$$R_3^3 = \begin{pmatrix} \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) - \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3)) \\ \sin(\theta_1)(-\cos(\theta_1)) \sin^2(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3)) - \cos(\theta_2) \sin(\theta_3) \\ \cos^2(\theta_1) \sin^2(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3)) + \cos(\theta_3) \end{pmatrix}. \quad (49)$$

De lo descrito en numeral 4, el vector unitario de rotación $\hat{u}_4$ y la matriz de rotación de muslo derecho R_4 .

$$R_4 = \begin{pmatrix} R_4^{11} & R_4^{12} & R_4^{13} \\ R_4^{21} & R_4^{22} & R_4^{23} \\ R_4^{31} & R_4^{32} & R_4^{33} \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Donde las componentes R_4^{ij} son los siguientes.

$$R_4^{11} = (1 - \cos(\theta_4)) (\cos^2(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3)) + \cos(\theta_3))^2 + \cos(\theta_4), \quad (51)$$

$$\begin{aligned} R_4^{12} = & (1 - \cos(\theta_4)) (\cos^2(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3)) + \cos(\theta_3)) (\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3)) \\ & - \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3)) - \sin(\theta_4)(-\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) - \\ & \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3))), \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} R_4^{13} = & (1 - \cos(\theta_4)) (\cos^2(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3)) + \cos(\theta_3)) (-\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) - \\ & \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3))) + \sin(\theta_4)(\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2)(1 - \\ & \cos(\theta_3)) - \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3)), \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned}
R_4^{21} = & (1 - \cos(\theta_4)) \left(\cos^2(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3)) + \cos(\theta_3) \right) (\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3)) - \\
& \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3)) + \sin(\theta_4)(-\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) - \\
& \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3))),
\end{aligned} \tag{54}$$

$$R_4^{22} = (1 - \cos(\theta_4))(\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3)) - \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3))^2 + \cos(\theta_4), \tag{55}$$

$$\begin{aligned}
R_4^{23} = & (1 - \cos(\theta_4))(\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3)) - \\
& \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3))(-\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) - \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3))) - \\
& \sin(\theta_4) \left(\cos^2(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3)) + \cos(\theta_3) \right),
\end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}
R_4^{31} = & (1 - \cos(\theta_4)) \left(\cos^2(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3)) + \cos(\theta_3) \right) (-\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) - \\
& \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3))) - \sin(\theta_4)(\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2)(1 - \\
& \cos(\theta_3)) - \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3)),
\end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned}
R_4^{32} = & (1 - \cos(\theta_4))(\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3)) - \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3))(- \\
& \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) - \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3))) + \\
& \sin(\theta_4) \left(\cos^2(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3)) + \cos(\theta_3) \right),
\end{aligned} \tag{58}$$

y

$$R_4^{33} = (1 - \cos(\theta_4))(-\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\sin(\theta_3) - \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\cos(\theta_2)(1 - \cos(\theta_3)))^2 + \cos(\theta_4). \quad (59)$$

De lo descrito en numeral 5, el vector unitario de rotación $\hat{u}_5$ y la matriz de rotación de muslo derecho R_5 .

$$R_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_5) & -\sin(\theta_5) \\ 0 & \sin(\theta_5) & \cos(\theta_5) \end{pmatrix}. \quad (60)$$

De lo descrito en numeral 6, el vector unitario de rotación $\hat{u}_6$ y la matriz de rotación de muslo derecho R_6 .

$$R_6 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_6) & -\sin(\theta_5)\sin(\theta_6) & \cos(\theta_5)\sin(\theta_6) \\ \sin(\theta_5)\sin(\theta_6) & \cos^2(\theta_5)(1 - \cos(\theta_6)) + \cos(\theta_6) & \sin(\theta_5)\cos(\theta_5)(1 - \cos(\theta_6)) \\ -\cos(\theta_5)\sin(\theta_6) & \sin(\theta_5)\cos(\theta_5)(1 - \cos(\theta_6)) & \sin^2(\theta_5)(1 - \cos(\theta_6)) + \cos(\theta_6) \end{pmatrix}. \quad (61)$$

De lo descrito en numeral 7, el vector unitario de rotación $\hat{u}_7$ y la matriz de rotación de muslo derecho R_7 .

$$R_7 = \begin{pmatrix} R_7^1 & R_7^2 & R_7^3 \end{pmatrix}. \quad (62)$$

Donde los vectores R_7^1 , R_7^2 , R_7^3 son los vectores columna siguientes.

$$R_7^1 = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7)) + \cos(\theta_7) \\ \sin(\theta_5)\sin(\theta_6)\cos(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7)) - \cos(\theta_5)\sin(\theta_6)\sin(\theta_7) \\ -\sin(\theta_5)\sin(\theta_6)\sin(\theta_7) - \cos(\theta_5)\sin(\theta_6)\cos(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7)) \end{pmatrix}, \quad (63)$$

$$R_7^2 = \begin{pmatrix} \sin(\theta_5)\sin(\theta_6)\cos(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7)) + \cos(\theta_5)\sin(\theta_6)\sin(\theta_7) \\ \sin^2(\theta_5)\sin^2(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7)) + \cos(\theta_7) \\ \cos(\theta_6)\sin(\theta_7) - \sin(\theta_5)\cos(\theta_5)\sin^2(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7)) \end{pmatrix}, \quad (64)$$

y

$$R_7^3 = \begin{pmatrix} \sin(\theta_5) \sin(\theta_6) \sin(\theta_7) - \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) \cos(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7)) \\ \sin(\theta_5)(-\cos(\theta_5)) \sin^2(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7)) - \cos(\theta_6) \sin(\theta_7) \\ \cos^2(\theta_5) \sin^2(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7)) + \cos(\theta_7) \end{pmatrix}. \quad (65)$$

De lo descrito en numeral 8, el vector unitario de rotación $\hat{u}_8$ y la matriz de rotación de muslo derecho R_8 .

$$R_8 = \begin{pmatrix} R_8^{11} & R_8^{12} & R_8^{13} \\ R_8^{21} & R_8^{22} & R_8^{23} \\ R_8^{31} & R_8^{32} & R_8^{33} \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Donde las componentes R_8^{ij} son los siguientes.

$$R_8^{11} = (1 - \cos(\theta_8)) (\cos^2(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7)) + \cos(\theta_7))^2 + \cos(\theta_8), \quad (67)$$

$$\begin{aligned} R_8^{12} = & (1 - \cos(\theta_8)) (\cos^2(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7)) + \cos(\theta_7)) (\sin(\theta_5) \sin(\theta_6) \cos(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7)) \\ & - \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) \sin(\theta_7)) - \sin(\theta_8)(-\sin(\theta_5) \sin(\theta_6) \sin(\theta_7) - \\ & \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) \cos(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7))), \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} R_8^{13} = & (1 - \cos(\theta_8)) (\cos^2(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7)) + \cos(\theta_7)) (-\sin(\theta_5) \sin(\theta_6) \sin(\theta_7) - \\ & \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) \cos(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7))) + \sin(\theta_8)(\sin(\theta_5) \sin(\theta_6) \cos(\theta_6)(1 - \\ & \cos(\theta_7)) - \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) \sin(\theta_7)), \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} R_8^{21} = & (1 - \cos(\theta_8)) (\cos^2(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7)) + \cos(\theta_7)) (\sin(\theta_5) \sin(\theta_6) \cos(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7)) - \\ & \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) \sin(\theta_7)) + \sin(\theta_8)(-\sin(\theta_5) \sin(\theta_6) \sin(\theta_7) - \\ & \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) \cos(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7))), \end{aligned} \quad (70)$$

$$R_8^{22} = (1 - \cos(\theta_8))(\sin(\theta_5) \sin(\theta_6) \cos(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7)) - \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) \sin(\theta_7))^2 + \cos(\theta_8), \quad (71)$$

$$R_8^{23} = (1 - \cos(\theta_8))(\sin(\theta_5) \sin(\theta_6) \cos(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7)) - \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) \sin(\theta_7))(-\sin(\theta_5) \sin(\theta_6) \sin(\theta_7) - \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) \cos(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7))) - \sin(\theta_8) (\cos^2(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7)) + \cos(\theta_7)), \quad (72)$$

$$R_8^{31} = (1 - \cos(\theta_8)) (\cos^2(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7)) + \cos(\theta_7)) (-\sin(\theta_5) \sin(\theta_6) \sin(\theta_7) - \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) \cos(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7))) - \sin(\theta_8)(\sin(\theta_5) \sin(\theta_6) \cos(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7)) - \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) \sin(\theta_7)), \quad (73)$$

$$R_8^{32} = (1 - \cos(\theta_8))(\sin(\theta_5) \sin(\theta_6) \cos(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7)) - \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) \sin(\theta_7))(-\sin(\theta_5) \sin(\theta_6) \sin(\theta_7) - \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) \cos(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7))) + \sin(\theta_8) (\cos^2(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7)) + \cos(\theta_7)), \quad (74)$$

y

$$R_8^{33} = (1 - \cos(\theta_8))(-\sin(\theta_5) \sin(\theta_6) \sin(\theta_7) - \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) \cos(\theta_6)(1 - \cos(\theta_7)))^2 + \cos(\theta_8). \quad (75)$$

7.2. Vectores de Posición de las Coyunturas en el Sistema de la Pelvis.

Como ya se dijo en las ecuaciones 9 y 10, los vectores de posición de las caderas derecha e izquierda son.

$$\vec{r}_{Cd} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (76)$$

y

$$\vec{r}_{Ci} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (77)$$

Aplicando las ecuaciones dadas por 11 y 12, y tomando la forma de las matrices obtenidas en las ecuaciones 44, 45, 60 y 61, los vectores de posición de las rodillas derecha e izquierda son.

$$\vec{r}_{Rd} = \begin{pmatrix} 1 - 2 \sin(\theta_2) \\ 2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \\ -2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \end{pmatrix}, \quad (78)$$

y

$$\vec{r}_{Ri} = \begin{pmatrix} -2 \sin(\theta_6) - 1 \\ 2 \sin(\theta_5) \cos(\theta_6) \\ -2 \cos(\theta_5) \cos(\theta_6) \end{pmatrix}. \quad (79)$$

Aplicando las ecuaciones dadas por 13 y 14, y tomando la forma de las matrices obtenidas en las ecuaciones de la matrices 44, 45, 46, 60, 61 y 62, además del vector de las rodillas, se obtienen los vectores de posición de los tobillos derecho e izquierdo son.

$$\vec{r}_{Td} = \begin{pmatrix} 1 - 2 \sin(\theta_2)(\cos(\theta_3) + 1) \\ 2(\sin(\theta_1) \cos(\theta_2)(\cos(\theta_3) + 1) + \cos(\theta_1) \sin(\theta_3)) \\ 2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_3) - 2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2)(\cos(\theta_3) + 1) \end{pmatrix}, \quad (80)$$

y

$$\vec{r}_{Ti} = \begin{pmatrix} -2 \sin(\theta_6)(\cos(\theta_7) + 1) - 1 \\ 2(\sin(\theta_5) \cos(\theta_6)(\cos(\theta_7) + 1) + \cos(\theta_5) \sin(\theta_7)) \\ 2 \sin(\theta_5) \sin(\theta_7) - 2 \cos(\theta_5) \cos(\theta_6)(\cos(\theta_7) + 1) \end{pmatrix}. \quad (81)$$

Aplicando las ecuaciones dadas por los vectores dados por las ecuaciones 15 y 16, y tomando las formas de las matrices ya obtenidas en 44, 45, 46, 66 60, 61, 62 y ??, además de los vectores de los tobillo, se calcula que los vectores de posición de los dedos derecho e izquierdo son.

$$\vec{r}_{Dd} = \begin{pmatrix} Ddx \\ Ddy \\ Ddz \end{pmatrix}. \quad (82)$$

Donde:

$$Ddx = \sin(\theta_2)(\cos(\theta_3)(0.5 \cos(\theta_2) \sin(\theta_4) - 2) - 0.5 \cos(\theta_2) \sin(\theta_4) + 0.5 \sin(\theta_3) \cos(\theta_4) - 2) + 1, \quad (83)$$

$$Ddy = \cos(\theta_1)(\sin(\theta_3)(2 - 0.5 \cos(\theta_2) \sin(\theta_4)) + 0.5 \cos(\theta_3) \cos(\theta_4)) + \sin(\theta_1)(\cos(\theta_2)(\cos(\theta_3)(2 - 0.5 \cos(\theta_2) \sin(\theta_4)) - 0.5 \sin(\theta_3) \cos(\theta_4) + 2) + (0.25 \cos(2\theta_2) - 0.25) \sin(\theta_4)), \quad (84)$$

y

$$Ddz = \cos(\theta_1)(\sin(\theta_4)(0.25 - 0.25 \cos(2\theta_2)) + \cos(\theta_2)(\cos(\theta_3)(0.5 \cos(\theta_2) \sin(\theta_4) - 2) + 0.5 \sin(\theta_3) \cos(\theta_4) - 2)) + \sin(\theta_1)(\sin(\theta_3)(2 - 0.5 \cos(\theta_2) \sin(\theta_4)) + 0.5 \cos(\theta_3) \cos(\theta_4)). \quad (85)$$

$$\vec{r}_{Di} = \begin{pmatrix} Dix \\ Diy \\ Diz \end{pmatrix}. \quad (86)$$

Donde:

$$Dix = \sin(\theta_6)(\cos(\theta_7)(0.5 \cos(\theta_6) \sin(\theta_8) - 2) - 0.5 \cos(\theta_6) \sin(\theta_8) + 0.5 \sin(\theta_7) \cos(\theta_8) - 2) - 1, \quad (87)$$

$$Diy = \cos(\theta_5)(\sin(\theta_7)(2 - 0.5 \cos(\theta_6) \sin(\theta_8)) + 0.5 \cos(\theta_7) \cos(\theta_8)) + \sin(\theta_5)(\cos(\theta_6)(\cos(\theta_7)(2 - 0.5 \cos(\theta_6) \sin(\theta_8)) - 0.5 \sin(\theta_7) \cos(\theta_8) + 2) + (0.25 \cos(2\theta_6) - 0.25) \sin(\theta_8)), \quad (88)$$

$$Diz = \cos(\theta_5)(\sin(\theta_8)(0.25 - 0.25 \cos(2\theta_6)) + \cos(\theta_6)(\cos(\theta_7)(0.5 \cos(\theta_6) \sin(\theta_8) - 2) + 0.5 \sin(\theta_7) \cos(\theta_8) - 2)) + \sin(\theta_5)(\sin(\theta_7)(2 - 0.5 \cos(\theta_6) \sin(\theta_8)) + 0.5 \cos(\theta_7) \cos(\theta_8)). \quad (89)$$

7.3. Vectores de Posición de Los Centros de Masa de los Eslabones, en el Sistema de la Pelvis.

Como se estableció en el marco metodológico, tener los vectores de posición de las coyunturas es necesario para obtener los vectores de los centros de masa de cada eslabón. Tomando los valores de la masa de cada eslabón para fines de cálculo $P = 1$, $M = 2$, $L = 2$, $F = 1/2$.

Ya que es el sistema de referencia de la pelvis, ésta tiene vector de posición cero.

$$\vec{r}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (90)$$

Aplicando las ecuaciones de las caderas dadas por 18 y 19, tomando las formas de las matrices obtenidas en 44 y 45, 60 y 61, y los vectores de posición de las caderas derecha e izquierda 9 y 10, se tiene que los muslos derecho e izquierdo son.

$$\vec{r}_{Md} = \begin{pmatrix} 1 - \sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \\ -\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \end{pmatrix}, \quad (91)$$

y

$$\vec{r}_{Mi} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta_6) - 1 \\ \sin(\theta_5) \cos(\theta_6) \\ -\cos(\theta_5) \cos(\theta_6) \end{pmatrix}. \quad (92)$$

Aplicando las ecuaciones de las rodillas dadas por 11 y 12, tomando la forma de las matrices obtenidas en 44, 45, 46, 60, 61, 62 se tiene que las posiciones de las piernas derecha e izquierda son.

$$\vec{r}_{Ld} = \begin{pmatrix} 1 - \sin(\theta_2)(\cos(\theta_3) + 2) \\ \sin(\theta_1) \cos(\theta_2)(\cos(\theta_3) + 2) + \cos(\theta_1) \sin(\theta_3) \\ \sin(\theta_1) \sin(\theta_3) - \cos(\theta_1) \cos(\theta_2)(\cos(\theta_3) + 2) \end{pmatrix}, \quad (93)$$

y

$$\vec{r}_{Li} = \begin{pmatrix} \sin(\theta_6)(-(\cos(\theta_7) + 2)) - 1 \\ \sin(\theta_5) \cos(\theta_6)(\cos(\theta_7) + 2) + \cos(\theta_5) \sin(\theta_7) \\ \sin(\theta_5) \sin(\theta_7) - \cos(\theta_5) \cos(\theta_6)(\cos(\theta_7) + 2) \end{pmatrix}. \quad (94)$$

Aplicando las ecuaciones de los tobillos dadas por 13 y 14, tomando la forma de las matrices obtenidas en 44, 45, 46, 66, 60, 61, 62, ?? se tiene que las posiciones de los pies derecho e izquierdo son.

$$\vec{r}_{Fd} = \begin{pmatrix} Fdx \\ Fdy \\ Fdz \end{pmatrix}, \quad (95)$$

Donde:

$$Fdx = \sin(\theta_2)(\cos(\theta_3)(0.25 \cos(\theta_2) \sin(\theta_4) - 2) - 0.25 \cos(\theta_2) \sin(\theta_4) + 0.25 \sin(\theta_3) \cos(\theta_4) - 2) + 1, \quad (96)$$

$$Fdy = \cos(\theta_1)(\sin(\theta_3)(2-0.25\cos(\theta_2)\sin(\theta_4))+0.25\cos(\theta_3)\cos(\theta_4))+\sin(\theta_1)(\cos(\theta_2)(\cos(\theta_3)(2-0.25\cos(\theta_2)\sin(\theta_4)) - 0.25\sin(\theta_3)\cos(\theta_4) + 2) + (0.125\cos(2\theta_2) - 0.125)\sin(\theta_4)), \quad (97)$$

$$Fdz = \cos(\theta_1)(\sin(\theta_4)(0.125 - 0.125\cos(2\theta_2)) + \cos(\theta_2)(\cos(\theta_3)(0.25\cos(\theta_2)\sin(\theta_4) - 2.) + 0.25\sin(\theta_3)\cos(\theta_4) - 2.)) + \sin(\theta_1)(\sin(\theta_3)(2-0.25\cos(\theta_2)\sin(\theta_4)) + 0.25\cos(\theta_3)\cos(\theta_4)). \quad (98)$$

y.

$$\vec{r}_{Fi} = \begin{pmatrix} Fix \\ Fiy \\ Fiz \end{pmatrix}, \quad (99)$$

Donde:

$$Fix = \sin(\theta_6)(\cos(\theta_7)(0.25\cos(\theta_6)\sin(\theta_8)-2)-0.25\cos(\theta_6)\sin(\theta_8)+0.25\sin(\theta_7)\cos(\theta_8)-2)-1, \quad (100)$$

$$Fiy = \cos(\theta_5)(\sin(\theta_7)(2-0.25\cos(\theta_6)\sin(\theta_8))+0.25\cos(\theta_7)\cos(\theta_8))+\sin(\theta_5)(\cos(\theta_6)(\cos(\theta_7)(2-0.25\cos(\theta_6)\sin(\theta_8)) - 0.25\sin(\theta_7)\cos(\theta_8) + 2) + (0.125\cos(2\theta_6) - 0.12)\sin(\theta_8)), \quad (101)$$

$$Fiz = \cos(\theta_5)(\sin(\theta_8)(0.125 - 0.125\cos(2\theta_6)) + \cos(\theta_6)(\cos(\theta_7)(0.25\cos(\theta_6)\sin(\theta_8) - 2.) + 0.25\sin(\theta_7)\cos(\theta_8) - 2.)) + \sin(\theta_5)(\sin(\theta_7)(2-0.25\cos(\theta_6)\sin(\theta_8)) + 0.25\cos(\theta_7)\cos(\theta_8)). \quad (102)$$

7.4. Centro de Masa del Robot, en el Sistema de Referencia de la Pelvis.

Como ya hemos calculado los vectores de los centros de masa de cada eslabón, el cálculo del centro de masa de todo el aparato es calculable. Se hace uso de la ecuación 28, tomando para su cálculo las ecuaciones 90, 91, 92, 93, 94, 95 y 99.

$$\vec{r}_{CM} = \begin{pmatrix} x_{CM} \\ y_{CM} \\ z_{CM} \end{pmatrix}. \quad (103)$$

Donde las funciones x_{CM} , y_{CM} y z_{CM} corresponden a las componentes x , y y z del centro de masa (en el sistema de L_0). Se omite su expresión directa dada su extensión. Aunque se puede solicitar al autor si se requiriese.

7.5. Prueba numérica de los vectores de posición y de la función centro de masa del bípedo.

Con los vectores de posición, las matrices y la posición de centro de masa bien definidas se realizó una simulación en Wolfram de los movimientos relativos del bípedo, para constatar la validez de resultados obtenidos en las ecuaciones 76 a 103, algunas imágenes de dicha corrida se presentan a continuación.

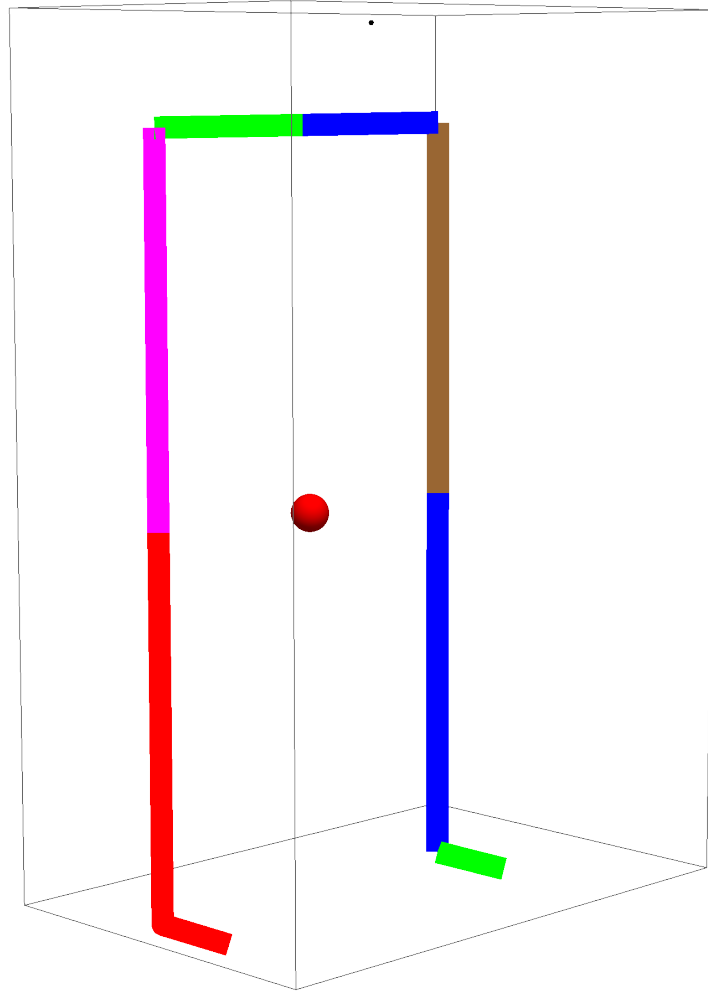
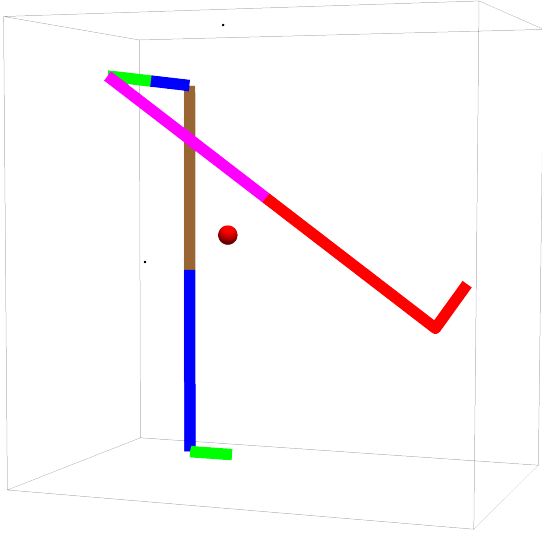
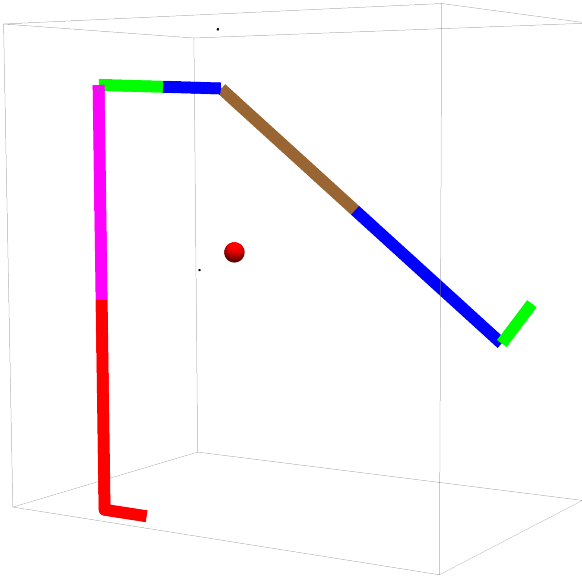


Figura 17: Simulación numérica del bípedo en Wolfram. En esta se ponen a prueba los resultados anteriores. Se muestran **cada eslabón** de diferente color para visualizar de forma adecuada como afecta el movimiento de cada eslabón, cada cambio de ángulo. Se muestra el **centro de masa** en una esfera roja.

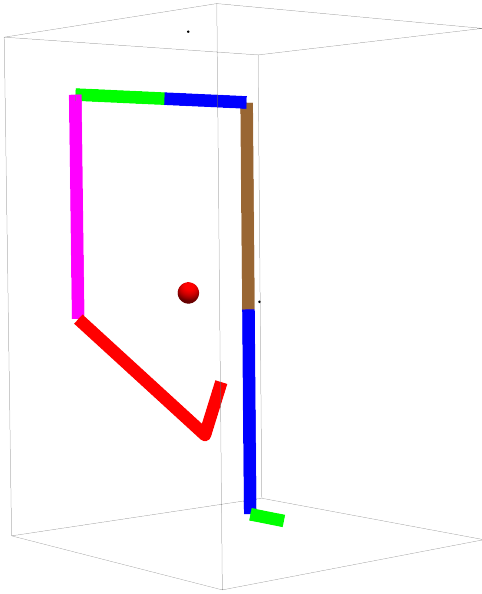


(a) Angulo θ_1 , a un ángulo de un radian. Este ángulo afecta a los eslabones Md, Ld, Fd y las articulaciones Rd, Td y Dd. .

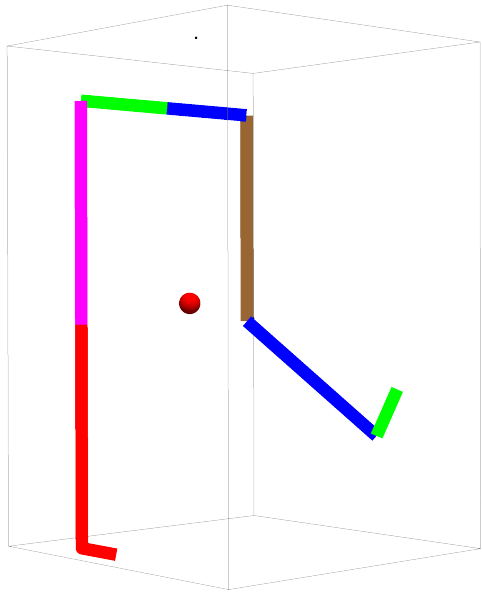


(b) Angulo θ_5 , a un ángulo de un radian. Este ángulo afecta a los eslabones Mi, Li, Fi y las articulaciones Ri, Ti y Di.

Figura 18: Los ángulos θ_1 afecta a toda la parte derecha del aparato, mientras que θ_5 a las de la izquierda. Nótese como se ve afectado el centro de masa.

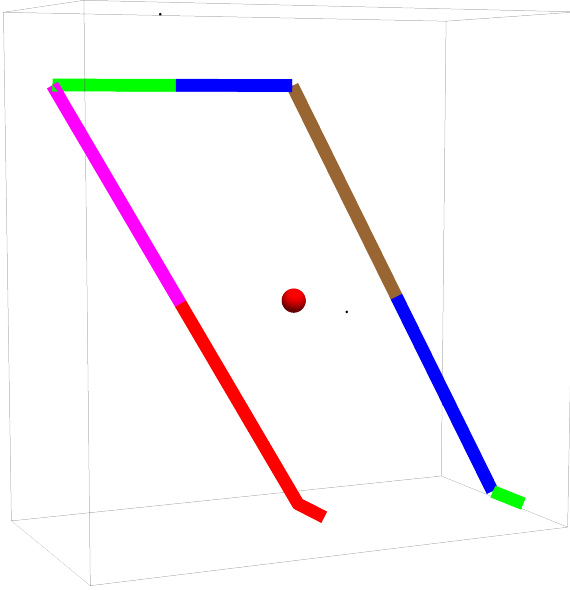


(a) Ángulo θ_3 , a un ángulo de un radian. Este ángulo afecta a los eslabones Ld, Fd y las articulaciones Td y Dd.

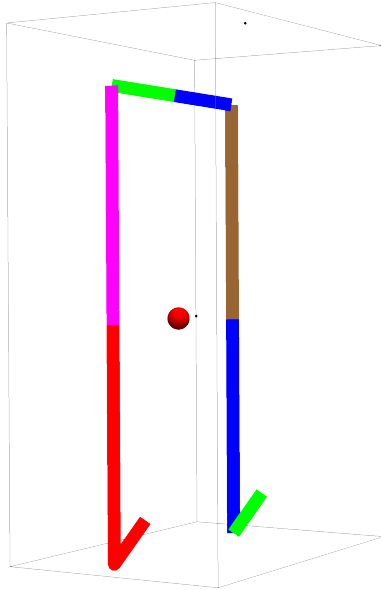


(b) Ángulo θ_7 , a un ángulo de un radian. Este ángulo afecta a los eslabones Li, Fi y las articulaciones Ti y Di.

Figura 19: Los ángulos θ_3 y θ_7 no afectan a los muslos como era de esperar.



(a) Ángulos θ_2 y θ_6 a un 0.5 radian, estos afectan a M, L y F derechos e izquierdos respectivamente.



(b) Ángulos θ_4 y θ_8 a un radian, estos solo afectan a Fd, Dd, Fi y Di.

Figura 20: Los ángulos θ_2 y θ_6 también afectan todo el lado derecho e izquierdo respectivamente del aparato. Los θ_4 y θ_8 solo afectan los pies. En cada caso el centro de masa se desplaza de forma esperada.

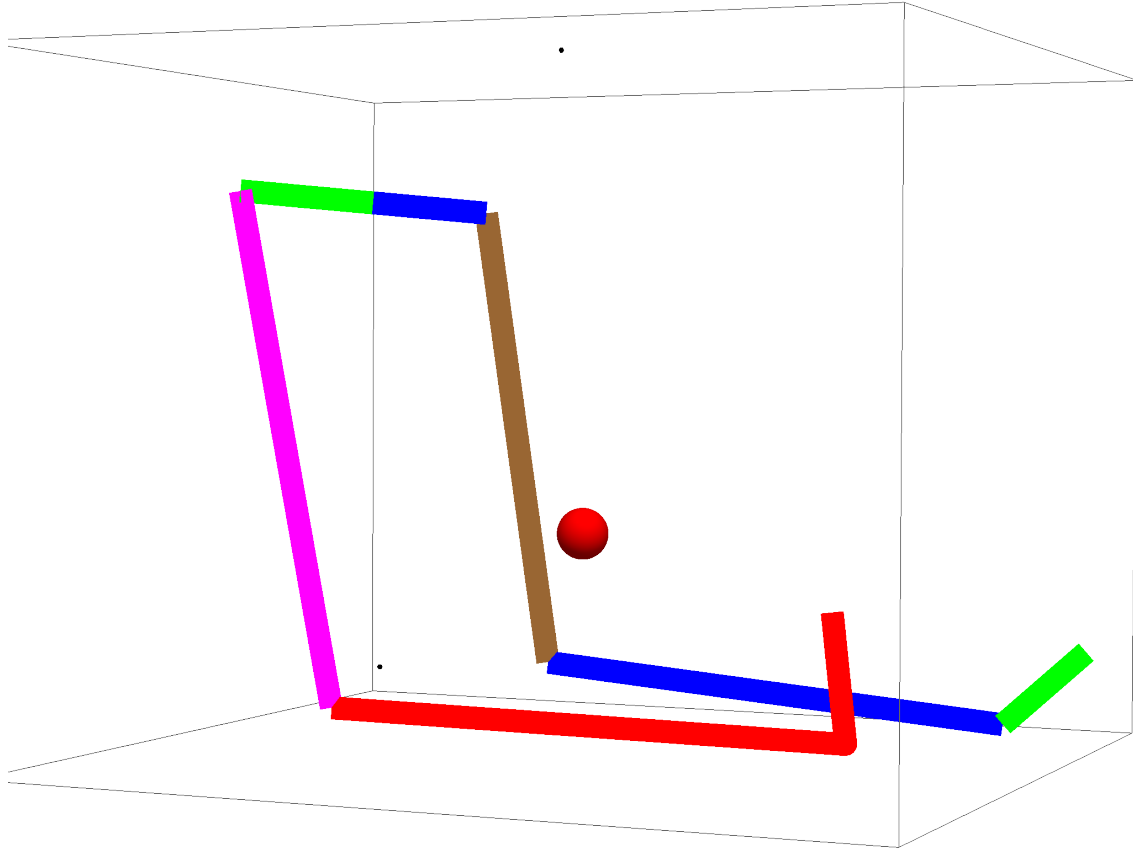


Figura 21: Aquí se muestra todos los ángulos a un valor a discreción, nótese como el centro de masa se desplaza en función de esta deformación.

7.6. lagrangiana y Ecuaciones de Movimiento de Péndulo Invertido.

El vector de posición en el sistema del suelo ya lo teníamos.

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} l \sin(\alpha) \cos(\phi) + x \\ l \sin(\alpha) \sin(\phi) + y \\ l \cos(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (104)$$

Derivando R obtenemos la velocidad.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \left(\dot{l} \cos(\phi) - l \dot{\phi} \sin(\phi) \right) + l \dot{\alpha} \cos(\alpha) \cos(\phi) + \dot{x} \\ \sin(\phi) \left(\dot{l} \sin(\alpha) + l \dot{\alpha} \cos(\alpha) \right) + l \sin(\alpha) \dot{\phi} \cos(\phi) + \dot{y} \\ \dot{l} \cos(\alpha) - l \dot{\alpha} \sin(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (105)$$

De donde, si aplicamos la ecuación 37 encontramos que el lagrangiano es.

$$\begin{aligned} L = & \left(\frac{1}{2} M \right) (-2g \cos(\alpha)) + \left(\frac{1}{2} M \right) \left(\dot{l} \cos(\alpha) - l \dot{\alpha} \sin(\alpha) \right)^2 + \\ & \left(\frac{1}{2} M \right) \left(\sin(\alpha) \left(\dot{l} \cos(\phi) - l \dot{\phi} \sin(\phi) \right) + l \dot{\alpha} \cos(\alpha) \cos(\phi) + \dot{x} \right)^2 + \\ & \left(\frac{1}{2} M \right) \left(\sin(\phi) \left(\dot{l} \sin(\alpha) + l \dot{\alpha} \cos(\alpha) \right) + l \sin(\alpha) \dot{\phi} \cos(\phi) + \dot{y} \right)^2. \end{aligned} \quad (106)$$

Aplicando L a la ecuación 39, resulta que la ecuación de movimiento para x_A es.

$$\begin{aligned} M \cos(\alpha) \left(2\ddot{\alpha} \left(\dot{l} \cos(\phi) - l \dot{\phi} \sin(\phi) \right) + l \ddot{\alpha} \cos(\phi) \right) + \\ M \sin(\alpha) \left(\cos(\phi) \left(\ddot{l} - l \left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\phi}^2 \right) \right) - \sin(\phi) \left(2\dot{l}\dot{\phi} + l\ddot{\phi} \right) \right) + M\ddot{x} = F_x. \end{aligned} \quad (107)$$

Aplicando L a la ecuación 40, resulta que la ecuación de movimiento para y_A es.

$$\begin{aligned} M \sin(\phi) \left(\sin(\alpha) \left(\ddot{l} - l \left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\phi}^2 \right) \right) + \cos(\alpha) \left(2\dot{l}\dot{\alpha} + l\ddot{\alpha} \right) \right) + \\ M \cos(\phi) \left(2\dot{\phi} \left(\dot{l} \sin(\alpha) + l \dot{\alpha} \cos(\alpha) \right) + l \sin(\alpha) \ddot{\phi} \right) + M\ddot{y} = F_y. \end{aligned} \quad (108)$$

Aplicando L a la ecuación 41, resulta que la ecuación de movimiento para α es.

$$M \left(l \left(2\dot{l}\dot{\alpha} + l\ddot{\alpha} + \cos(\alpha) \left(-l \sin(\alpha) \dot{\phi}^2 + \ddot{x} \cos(\phi) + \ddot{y} \sin(\phi) \right) \right) - g \sin(\alpha) \right) = 0. \quad (109)$$

Aplicando L a la ecuación 42, resulta que la ecuación de movimiento para ϕ es.

$$Ml \sin(\alpha) \left(2\dot{\phi} \left(\dot{l} \sin(\alpha) + l\dot{\alpha} \cos(\alpha) \right) + l \sin(\alpha) \ddot{\phi} - \ddot{x} \sin(\phi) + \ddot{y} \cos(\phi) \right) = 0. \quad (110)$$

Aplicando L a la ecuación 43, resulta que la ecuación de movimiento para l es.

$$M \left(\ddot{l} - l \left(\dot{\alpha}^2 + \sin^2(\alpha) \dot{\phi}^2 \right) + \sin(\alpha) \left(\ddot{x} \cos(\phi) + \ddot{y} \sin(\phi) \right) \right) = F_l. \quad (111)$$

8. Conclusiones

1. Determinar las posiciones de los apéndices, relativas entre sí, de un aparato que tiene por objetivo el desplazamiento propio, es quizás la parte más importante para determinar todo el funcionamiento, dado que cambiar de forma es la manera en que un objeto mecánico interactúa con su entorno. Es en este sentido, que fue primordial en este trabajo dejar bien definidas, tanto las matrices de rotación interna como los vectores de posición de los apéndices, objetivo que se alcanzó a plenitud, como se planteó en la sección 7.3. Aunque las matrices y las posiciones se obtuvieron para el caso de un sistema bípedo, se puede decir con plena seguridad que, en el sentido de la cinemática interna, el aporte más valioso de este trabajo es el planteamiento del método para encontrar las matrices y vectores internos en el caso más general de enfrentar un sistema con mas apéndices. Nos referimos al descrito en la sección 6.1 y 6.2 junto con la representación del grupo de rotación dado en 8. Este método puede ser utilizado en la escritura de un programa, para desarrollar la cinemática en un robot cualquiera.
2. Con respecto a las ecuaciones de movimiento, es de notar que el planteamiento completo de un sistema para un aparato tan complejo mecánicamente puede ser muy difícil (no imposible) dado lo engorroso y exigente en poder de cómputo del proceso. Ya ni se hable de sus soluciones, que por lo general no tendrán una forma analítica. Dado esto, y por la necesidad de formular un estudio factible del control del aparato (que necesita de las ecuaciones de movimiento), es que se recurre a formular un sistema dinámico análogo mas simple, el cual para un aparato bípedo es un péndulo invertido. Así pues, el objetivo se alcanzó, como se evidencia en la sección 7.6.

8.1. Observación

Como todos los estudios en el mundo, los alcances de este trabajo están principalmente delimitados por la posibilidad de ser útiles en un trabajo posterior. Llevar a cabo una implementación práctica de un robot como el descrito aquí es quizás lo mas inmediato, pero además existe la posibilidad, como ya se mencionó en las conclusiones, de ser útil en el desarrollo de un programa para la cinemática, en un caso más general. Por otro lado, este trabajo se limitó a encontrar las ecuaciones de movimiento de un péndulo invertido, que es una aproximación, esto es importante tenerlo en cuenta a la hora que hacer un análisis numérico en el espacio fase para fines de control, dado que enterarse de cuales son las condiciones que permiten la aplicabilidad de un modelo aproximado conlleva a su correcta o incorrecta aplicación.

A. Algoritmo escrito en Mathematica para el cálculo de las matrices de rotación, los vectores de posición de las coyunturas y del centro de masa.

Se presenta en este apéndice el algoritmo descrito en la sección 6.1, en la sección 6.2.1 y en la sección 6.2.2, dando como resultados las matrices y vectores mostrados en las secciones 7.1, 7.2, 7.3 y 7.4.

El resultado de toda la cinemática se grafica en entorno de manipulación para constatar su validez.

Algoritmo para el cálculo de matrices y vectores de posición de aparato bípedo.

Grupo de las matrices de rotación; grupo especial ortogonal en tres dimensiones de variable real $SO(3)$. La función $SO3$ se alimenta de θ , que es el ángulo de rotación del cuerpo rígido, y $u=\{u_x, u_y, u_z\}$ que es el vector unitario que señala el eje de rotación usando regla de la mano derecha.

```
In[*]:= SO3[θ_, {ux_, uy_, uz_}] := { {Cos[θ] + ux^2 * (1 - Cos[θ]),  
                                     |coseno |coseno  
                                     ux * uy * (1 - Cos[θ]) - uz * Sin[θ], ux * uz * (1 - Cos[θ]) + uy * Sin[θ] },  
                                     |coseno |seno |coseno |seno  
 {ux * uy * (1 - Cos[θ]) + uz * Sin[θ], Cos[θ] + uy^2 * (1 - Cos[θ]),  
                                     |coseno |seno |coseno |coseno  
                                     uy * uz * (1 - Cos[θ]) - ux * Sin[θ] },  
                                     |coseno |seno  
 {ux * uz * (1 - Cos[θ]) - uy * Sin[θ], uy * uz * (1 - Cos[θ]) + ux * Sin[θ],  
                                     |coseno |seno |coseno |seno  
                                     Cos[θ] + uz^2 * (1 - Cos[θ]) } };
```

Condiciones iniciales de los vectores que señala los ejes de rotación, alrededor de los cuales se calculan las matrices de rotación de la parte derecha.

```
In[*]:= x[1] = {1, 0, 0};  
x[2] = {0, 1, 0};  
x[3] = {1, 0, 0};  
x[4] = {1, 0, 0};  
θ[1] = θ1;  
θ[2] = θ2;  
θ[3] = θ3;  
θ[4] = θ4;  
u[1] = x[1];
```

Ciclo FOR para el cálculo de las 4 matrices de rotación de las partes derechas, haciendo uso de $SO(3)$ y los vectores ejes de rotación iniciales.

```
In[*]:= For[i = 1, i ≤ 4, i++, R[θ1_, θ2_, θ3_, θ4_, i] = SO3[θ[i], u[i]]];  
|para cada  
u[i + 1] = R[θ1, θ2, θ3, θ4, i].x[i + 1];  
Print[MatrixForm[R[θ1, θ2, θ3, θ4, i]]]  
|escribe |forma de matriz
```

Condiciones iniciales de los vectores ejes de rotación, alrededor de los cuales se calculan las matrices de rotación de la parte izquierda.


```

In[ ]:= x[5] = {1, 0, 0};
        x[6] = {0, 1, 0};
        x[7] = {1, 0, 0};
        x[8] = {1, 0, 0};
        θ[5] = θ5;
        θ[6] = θ6;
        θ[7] = θ7;
        θ[8] = θ8;
        u[5] = x[5];

```

Ciclo FOR para el cálculo de las 4 matrices de rotación de las partes izquierdas, haciendo uso de SO(3) y los vectores ejes de rotación iniciales.

```

In[ ]:= For[i = 5, i ≤ 8, i++, R[θ5_, θ6_, θ7_, θ8_, i] = SO3[θ[i], u[i]];
        |para cada
        u[i + 1] = R[θ5, θ6, θ7, θ8, i].x[i + 1];
        Print[MatrixForm[R[θ5, θ6, θ7, θ8, i]]]
        |escribe [forma de matriz]

```

Valores constantes de las distancias de cada eslabón y el valor de la masa de los eslabones (estos en la práctica se encuentran de forma experimental).

```

In[ ]:= P = 1; M = 2; L = 2; F = 0.5;

```

```

In[ ]:= m = 1;

```

Posiciones iniciales de las caderas, las rodillas, los tobillos, y los dedos (estos en la práctica se encuentran de forma experimental).

```

In[ ]:= rCd0 = {P, 0, 0};
In[ ]:= rCi0 = {-P, 0, 0};
In[ ]:= rRd0 = {0, 0, -M};
In[ ]:= rRi0 = {0, 0, -M};
In[ ]:= rTd0 = {0, 0, -L};
In[ ]:= rTi0 = {0, 0, -L};
In[ ]:= rDd0 = {0, F, 0};
In[ ]:= rDi0 = {0, F, 0};

```

Vectores de posición de las coyunturas: cadera derecha e izquierda, rCd y rCi; rodillas derecha e izquierda rRd y rRi; tobillos derecho e izquierdo; rTd y rTi; de los dedos derecho e izquierdo rDd y rDi.

```

In[ ]:= rCd = rCd0;
In[ ]:= Print[MatrixForm[rCd]]
        |escribe [forma de matriz]
In[ ]:= rCi = rCi0;

```

```

In[ ]:= Print[MatrixForm[rCi]]
      |escribe |forma de matriz

In[ ]:= rRd[01_, 02_, 03_, 04_] := R[01, 02, 03, 04, 2].R[01, 02, 03, 04, 1].rRd0 + rCd;

In[ ]:= Print[MatrixForm[rRd[01, 02, 03, 04]]]
      |escribe |forma de matriz

In[ ]:= rRi[05_, 06_, 07_, 08_] := R[05, 06, 07, 08, 6].R[05, 06, 07, 08, 5].rRi0 + rCi;

In[ ]:= Print[MatrixForm[rRi[05, 06, 07, 08]]]
      |escribe |forma de matriz

In[ ]:= rTd[01_, 02_, 03_, 04_] := R[01, 02, 03, 04, 3].
      R[01, 02, 03, 04, 2].R[01, 02, 03, 04, 1].rTd0 + rRd[01, 02, 03, 04];

In[ ]:= Print[MatrixForm[rTd[01, 02, 03, 04]]]
      |escribe |forma de matriz

In[ ]:= rTi[05_, 06_, 07_, 08_] := R[05, 06, 07, 08, 7].
      R[05, 06, 07, 08, 6].R[05, 06, 07, 08, 5].rTi0 + rRi[05, 06, 07, 08];

In[ ]:= Print[MatrixForm[rTi[05, 06, 07, 08]]]
      |escribe |forma de matriz

In[ ]:= rDd[01_, 02_, 03_, 04_] := R[01, 02, 03, 04, 4].R[01, 02, 03, 04, 3].
      R[01, 02, 03, 04, 2].R[01, 02, 03, 04, 1].rDd0 + rTd[01, 02, 03, 04];

In[ ]:= Print[MatrixForm[rDd[01, 02, 03, 04]]]
      |escribe |forma de matriz

In[ ]:= rDi[05_, 06_, 07_, 08_] := R[05, 06, 07, 08, 8].R[05, 06, 07, 08, 7].
      R[05, 06, 07, 08, 6].R[05, 06, 07, 08, 5].rDi0 + rTi[05, 06, 07, 08];

In[ ]:= Print[MatrixForm[rDi[05, 06, 07, 08]]]
      |escribe |forma de matriz

```

Vectores de posición de los centros de masa de los eslabones; Pelvis rP, de los muslos derecho e izquierdo rMd y rMi, piernas derecha e izquierda rLd y rLi, de los pies derecho e izquierdo rFd y rFi.

```

In[ ]:= rP := {0, 0, 0};

In[ ]:= rMd[01_, 02_, 03_, 04_] := R[01, 02, 03, 04, 2].R[01, 02, 03, 04, 1].(1 / 2 rRd0) + rCd;

In[ ]:= rMi[05_, 06_, 07_, 08_] := R[05, 06, 07, 08, 6].R[05, 06, 07, 08, 5].(1 / 2 rRi0) + rCi;

In[ ]:= rLd[01_, 02_, 03_, 04_] := R[01, 02, 03, 04, 3].
      R[01, 02, 03, 04, 2].R[01, 02, 03, 04, 1].(1 / 2 rTd0) + rRd[01, 02, 03, 04];

In[ ]:= rLi[05_, 06_, 07_, 08_] := R[05, 06, 07, 08, 7].
      R[05, 06, 07, 08, 6].R[05, 06, 07, 08, 5].(1 / 2 rTi0) + rRi[05, 06, 07, 08];

In[ ]:= rFd[01_, 02_, 03_, 04_] := R[01, 02, 03, 04, 4].R[01, 02, 03, 04, 3].
      R[01, 02, 03, 04, 2].R[01, 02, 03, 04, 1].(1 / 2 rDd0) + rTd[01, 02, 03, 04];

In[ ]:= rFi[05_, 06_, 07_, 08_] := R[05, 06, 07, 08, 8].R[05, 06, 07, 08, 7].
      R[05, 06, 07, 08, 6].R[05, 06, 07, 08, 5].(1 / 2 rDi0) + rTi[05, 06, 07, 08];

```

Centro de masa de todo el aparato rCM.

```
In[ ]:= rCM[θ1_, θ2_, θ3_, θ4_, θ5_, θ6_, θ7_, θ8_] := (1 / (6 m))
  ((m) rP + (m) rMd[θ1, θ2, θ3, θ4] + (m) rMi[θ5, θ6, θ7, θ8] + (m) rLd[θ1, θ2, θ3, θ4] +
  (m) rLi[θ5, θ6, θ7, θ8] + (m / 2) rFd[θ1, θ2, θ3, θ4] + (m / 2) rFi[θ5, θ6, θ7, θ8])
```

Gráfica de todos los resultados anteriores, en el entorno de manipulación de los ángulos. El punto rojo es el centro de masa.

```
In[ ]:= Manipulate[
  Manipula
  Graphics3D[{
    gráfico 3D
    Point[{-2, -1, -2}],
    punto
    Point[{0.5, 1, 0.5}],
    punto
    {Thickness[0.02], Blue, Line[{0, 0, 0}, rCd]}},
    grosor azul línea
    {Thickness[0.02], Green, Line[{0, 0, 0}, rCi]}},
    grosor verde línea
    {Thickness[0.02], Magenta, Line[{rCd, rRd[θ1, θ2, 0, 0]}]},
    grosor magenta línea
    {Thickness[0.02], Brown, Line[{rCi, rRi[θ5, θ6, 0, 0]}]},
    grosor marrón línea
    {Thickness[0.02], Yellow, Line[{rRd[θ1, θ2, θ3, 0], rTd[θ1, θ2, θ3, 0]}]},
    grosor amarillo línea
    {Thickness[0.02], Black, Line[{rRi[θ5, θ6, θ7, 0], rTi[θ5, θ6, θ7, 0]}]},
    grosor negro línea
    {Thickness[0.02], Purple, Line[{rTd[θ1, θ2, θ3, 0], rDd[θ1, θ2, θ3, θ4]}]},
    grosor púrpura línea
    {Thickness[0.02], Orange, Line[{rTi[θ5, θ6, θ7, θ8], rDi[θ5, θ6, θ7, θ8]}]},
    grosor naranja línea
    {Thick, Red, Sphere[rCM[θ1, θ2, θ3, θ4, θ5, θ6, θ7, θ8], 0.1]},
    grueso rojo esfera
    PlotRange → {-4, 4}
    rango de representación
  ]}
  , {θ1, 0, Pi}, {θ2, 0, Pi}, {θ3, 0, Pi}, {θ4, 0, Pi},
    número pi número pi número pi número pi
  {θ5, 0, Pi}, {θ6, 0, Pi}, {θ7, 0, Pi}, {θ8, 0, Pi}
    número pi número pi número pi número pi
```

Referencias

- [1] Jacques Denavit and Richard S Hartenberg. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. 1955.
- [2] Michael Edwin Kahn and B Roth. The near-minimum-time control of open-loop articulated kinematic chains. 1971.
- [3] University of Edinburgh. Department of Artificial Intelligence and R Featherstone. *A program for simulating robot dynamics*. 1982.
- [4] Richard P Paul. *Robot manipulators: mathematics, programming, and control: the computer control of robot manipulators*. Richard Paul, 1981.
- [5] Pradip N Sheth and JJ Uicker Jr. A generalized symbolic notation for mechanisms. 1971.
- [6] Wisama Khalil and J Kleinfinger. A new geometric notation for open and closed-loop robots. In *Proceedings. 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 3, pages 1174–1179. IEEE, 1986.
- [7] Maxime Gautier and Wisama Khalil. Direct calculation of minimum set of inertial parameters of serial robots. *IEEE Transactions on robotics and Automation*, 6(3):368–373, 1990.
- [8] Ulrike Thomas, I Maciuszek, and Friedrich M Wahl. A unified notation for serial, parallel, and hybrid kinematic structures. In *Proceedings 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 02CH37292)*, volume 3, pages 2868–2873. IEEE, 2002.
- [9] Camillo J Taylor and David J Kriegman. Minimization on the lie group $so(3)$ and related manifolds. *Yale University*, 16(155):6, 1994.
- [10] Arthur D. Kuo. The six determinants of gait and the inverted pendulum analogy: A dynamic walking perspective. *Human Movement Science*, 26(4):617–656, 2007. European Workshop on Movement Science 2007.
- [11] Wolfram Research, Inc. Mathematica, Version 12.1. Champaign, IL, 2020.

- [12] Blender Online Community. *Blender - a 3D modelling and rendering package*. Blender Foundation, Stichting Blender Foundation, Amsterdam, 2021.
- [13] Inkscape Project. Inkscape, Version 1.1, 2021.