

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA

MAESTRÍA EN FÍSICA



**Medida del comportamiento de la constante dieléctrica
para bajas densidades de CO_2 por medio de levitación
eléctrica y comparación con la relación de
Clausius-Mossotti.**

TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MASTER EN FÍSICA

PRESENTADA POR:

LUCIO DAVID VILLANUEVA CASTILLO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA

MAESTRÍA EN FÍSICA

TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MASTER EN FÍSICA

TÍTULO:

**Medida del comportamiento de la constante dieléctrica
para bajas densidades de CO_2 por medio de levitación
eléctrica y comparación con la relación de
Clausius-Mossotti.**

PRESENTADA POR:

LUCIO DAVID VILLANUEVA CASTILLO

ASESOR:

M. SC. ALEJANDRO GALO ROLDÁN

FECHA: 7 DE ABRIL DE 2021

Agradecimiento

En primer lugar, agradezco a Dios por darme la oportunidad de poder concluir con una etapa más de mi vida, y la oportunidad de poder realizar este trabajo de la mejor forma posible.

Quisiera brindar mi más profundo agradecimiento al profesor Alejandro Galo Roldán M.Sc. de la Escuela de Física de la Universidad Nacional Autónoma de Honduras ya que gracias a sus enseñanzas, apoyo constante y aceptación para el desarrollo de esta tesis, ha sido posible su finalización bajo su dirección.

A mi esposa Karina Fuentes por su comprensión y apoyo en todo este proceso, a mi madre Bertha Castillo y hermano Nelson Villanueva por su gran ayuda incondicional, sin su ayuda hubiese sido totalmente imposible la finalización de este trabajo.

Finalmente agradezco a mis compañeras de trabajo Lic. Javier Martínez, Lic. Rene Hernández y Lic. Luis Zapata que me colaboraron en las mediciones iniciales y a todas las personas que me ayudaron y apoyaron en mi ámbito laboral y ámbito académico.

Índice

1. Capítulo I: El problema de investigación	6
1.1. Planteamiento del problema	6
1.1.1. Introducción	6
1.1.2. Justificación del proyecto	8
1.1.3. Limitaciones de la investigación	9
1.2. Objetivos	10
1.2.1. Objetivo General	10
1.2.2. Objetivos Especificos	10
2. Capítulo II: Marco Teórico	11
2.1. Antecedentes, contexto general o marco histórico	11
2.1.1. Ley de Coulomb	11
2.1.2. Capacitor	12
2.1.3. Dieléctricos	12
2.1.4. Tipos de dieléctrico utilizados en condensadores	12
2.2. Teoría de los dieléctricos	15
2.2.1. Susceptibilidad eléctrica y permitividad	15
2.2.2. Mecanismo de polarización eléctrica.	15
2.2.3. Ecuaciones de Maxwell en el vacío	16
2.2.4. Ecuaciones de Maxwell en su forma general	17
2.2.5. Teoría del campo eléctrico local.	17
2.2.6. Polarización y constante dieléctrica	23
2.2.7. Relación de Clausius-Mossotti para la permitividad dieléctrica.	24
2.2.8. Teoría de Debye para dieléctricos polares.	25
2.2.9. Teoría de Onsager	26
2.2.10. Pérdida dieléctrica, permitividad dieléctrica compleja y ecuaciones de Maxwell.	27
2.2.11. Clasificación de los materiales dieléctricos.	28
2.2.12. La ley del gas ideal	29
3. Capítulo III: Metodología de Investigación	31
3.1. Levitación Eléctrica	31
3.2. Tipo y Diseño de la Investigación	34
3.3. Variables de Análisis	35
4. Resultados del experimento	37
4.1. Mediciones	37
5. Analisis de resultados	39
5.1. Cálculos realizados	39
5.1.1. Regresiones lineales y gráficas realizadas	39
5.1.2. Estimación del número de moléculas de CO_2	43
5.1.3. Cuadro de resultados	44
5.1.4. Relación entre la constante dieléctrica y la concentración de moléculas de CO_2	45
5.1.5. Comparación de los resultados obtenidos con la relación de Clausius- Mossotti	46
5.2. Conclusiones	47
5.3. Recomendaciones	48

Referencias	49
6. Anexos	51
6.1. Anexo 1. Determinar la presión atmosférica en el laboratorio con el método Dumas	51
6.2. Anexo 2. Lineas de comando utilizadas para generar los gráficos.	54
6.3. Anexo 3. Imagenes del experimento	61
6.4. Anexo 4. Codigo en Mathematica para resolver ecuación (25)	62

Índice de figuras

1.	Lineas de campo eléctrico en un capacitor de placas paralelas, [14]	12
2.	Influencia de un dieléctrico en un capacitor, [14]	13
3.	Esfera que contiene en su interior una distribución de carga,[20]	19
4.	Vector posición \mathbf{x} campo y vector posición \mathbf{x}' fuente	20
5.	Cálculo de la contribución de las moléculas cercanas al campo interno en el caso de una red cúbica simple	22
6.	Campo Eléctrico de un capacitor de placas paralelas	31
7.	Diseño experimental.	34
8.	Diseño experimental, camara de vacío.	35
9.	Regresión lineal de las mediciones realizadas a -27 inch de Hg	39
10.	Regresión lineal de las mediciones realizadas a -20 inch de Hg	40
11.	Regresión lineal de las mediciones realizadas a -15 inch de Hg	41
12.	Regresión lineal de las mediciones realizadas a -10 inch de Hg	41
13.	Regresión lineal de las mediciones realizadas a -5 inch de Hg	42
14.	Regresión lineal de las mediciones realizadas a -0 inch de Hg	42
15.	Relación entre constante dieléctrica y la cantidad de moléculas de CO_2	45
16.	Comparación de los resultados obtenidos con la relación de Clausius-Mossotti	46
17.	Diseño experimental, para obtener la presión atmosférica en el laboratorio.	52
18.	Montaje experimental.	61
19.	Dispositivos utilizados	63

Índice de cuadros

1.	Valores constantes a utilizar	32
2.	Permitividad relativa de diferentes sustancias	33
3.	Primera Medición a una presión de -27 in Hg	37
4.	Segunda medición a una presión de -20 in Hg	37
5.	Tercera medición a una presión de -15 in Hg	37
6.	Cuarta medición a una presión de -10 in Hg	38
7.	Quinta medición a una presión de -5 in Hg	38
8.	Sexta medición a una presión de 0 in Hg , presión atmosférica	38
9.	Tabla de resultados	44
10.	Relación entre la constante dieléctrica y la concentración de moléculas de CO_2 .	45
11.	Algunas mediciones para determinar la presión atmosférica por el método de Dumas	52

1. Capítulo I: El problema de investigación

1.1. Planteamiento del problema

1.1.1. Introducción

Con el fin de entender el comportamiento dieléctrico de las sustancias, se tiene que ir fundamentalmente a los antecedentes conceptuales de las teorías que describen el dieléctrico.

Por ejemplo, el estado de agregación de las moléculas en un sólido o fluido depende del tipo de enlace químico, la geometría de la molécula, el efecto entre las interacciones de las moléculas atómicas, la naturaleza de los complejos, etc. Las cargas eléctricas de las moléculas en el vecindario están involucradas en el proceso de interacciones moleculares. La disposición espacial de los átomos y moléculas con carga eléctrica en el sistema se ve perturbada por la influencia de las condiciones físicas. Estos hechos sobre la base de ciertas teorías, describen los estados de agregación; como propiedades de las sustancias que existen en estado físico[1].

De la misma manera, la mayoría de las propiedades dieléctricas se describen en términos de la permitividad dieléctrica y los momentos dipolares moleculares de las sustancias en campos locales y no locales. La permitividad dieléctrica, a menudo llamada la constante dieléctrica, es una cantidad cuantitativamente medible.

El momento dipolar molecular medido a partir de la constante dieléctrica del material depende de la interacción de un átomo o molécula con su vecino y, por lo tanto, proporciona información valiosa sobre la estructura molecular. La constante dieléctrica depende de cuán polarizable sea un material y la frecuencia del campo aplicado. La caída de la polarizabilidad se relaciona con la disminución de la constante dieléctrica y la aparición de la absorción de energía eléctrica que constituye la dispersión dieléctrica en el material.

Los materiales aislantes eléctricos, que se opondrán al flujo de corriente en un circuito eléctrico, se han utilizado desde el comienzo de la ciencia y la tecnología de los fenómenos eléctricos. Los dieléctricos son materiales aislantes que exhiben la propiedad de polarización eléctrica; de este modo modifican la función dieléctrica de un vacío. El primer condensador fue construido por Cunaeus y Musschenbroek en 1745, que fue conocido como la Botella de Leyden [2]. Pero no hubo estudios sobre las propiedades de los materiales aislantes hasta 1837 cuando Michael Faraday publicó las primeras mediciones numéricas de estos materiales, a las que llamó dieléctricos [3]. Faraday encontró que la capacidad de un condensador dependía de la naturaleza del material que separa la superficie conductora. Este descubrimiento alentó estudios empíricos adicionales de materiales aislantes, dirigidos a maximizar la cantidad de carga que puede ser almacenada por un capacitor. A lo largo de la mayor parte del siglo XIX, los científicos que buscan materiales aislantes para las aplicaciones se volvieron cada vez más preocupadas por el mecanismo físico detallado que gobierna el comportamiento de estos materiales. En contraste con el aspecto del aislamiento, los fenómenos dieléctricos se han vuelto más generales y fundamentales, ya que se originan a partir de la polarización dieléctrica.

Mossotti [4, 5] y Clausius [6] realizaron una investigación sistemática sobre las propiedades dieléctricas de los materiales. Pretendieron y lograron correlacionar la capacidad inductiva específica, una característica macroscópica del aislante introducido por Faraday, que ahora se denomina como la constante dieléctrica, con la estructura microscópica del material.

La constante dieléctrica del dióxido de carbono (CO_2) se ha medido en un amplio rango

de temperaturas y densidades. Se ha encontrado que la función de Clausius-Mosotti, aunque independiente de la temperatura aumenta lentamente a medida que aumenta la densidad a presiones altas [7].

El propósito del presente trabajo es describir en términos comparativos, la forma en que la constante dieléctrica varía con densidades relativamente bajas del dióxido de carbono (CO_2). Aunque no existen muchos trabajos a bajas concentraciones, se pretende determinar el comportamiento de la constante dieléctrica del dióxido de carbono.

El método que se seleccionó para medir la constante dieléctrica del medio, comienza determinando la constante dieléctrica del vacío por medio de un capacitor de placas paralelas mediante levitación generada por una diferencia de potencial y posteriormente agregando un dieléctrico (CO_2) en el cual se pueda cambiar y controlar su concentración para realizar diferentes medidas, los valores de la permitividad variaran ya que al existir materia de por medio esta influye en las propiedades del capacitor.

Se ha seleccionado este método con la intención de que sirva de referencia a experimentos de laboratorios que tengan como objetivos; determinar la permitividad del vacío, al ser la levitación eléctrica de una hoja de un conductor (aluminio) muy interesante para el alumno porque se puede controlar la levitación y además; este experimento es visible.

Posteriormente, se compara los resultados obtenidos con la relación de Clausius-Mossotti.

1.1.2. Justificación del proyecto

Los materiales dieléctricos poseen como característica básica, una constante dieléctrica, que varía según las propiedades del material. Al variar la concentración por ejemplo de un dieléctrico como el dióxido de carbono y medir la constante en mención para cada concentración se puede encontrar la relación bien definida. Una gráfica de permitividad eléctrica relativa de un material dieléctrico versus densidad de dicho material permite observar y predecir el comportamiento de un campo eléctrico o alguna propiedad electromagnética en los materiales dieléctricos, aprovechando este conocimiento para fabricar dispositivos electrónicos más eficientes y también en la transferencia de información por medio de ondas electromagnéticas.

La ampliación de los dispositivos de semiconductores de óxido de metal (MOS) para aplicaciones de integración a gran escala (ULSI) ha supuesto una carga cada vez mayor para el rendimiento de los dieléctricos de compuerta [8]. La durabilidad se ha convertido en un problema a medida que el grosor dieléctrico disminuye, lo que conduce a una búsqueda de dieléctricos con mejores propiedades que el dieléctrico convencional de óxido de silicio (SiO_2). El transistor de efecto de campo de metal - aislante - semiconductor basado en arseniuro de galio ($GaAs$) todavía no está disponible en gran medida, debido a la falta de un material dieléctrico adecuado para la capa de aislamiento [9]. Una opción para esta aplicación podría ser un dieléctrico gaseoso como por ejemplo el dióxido de carbono (CO_2), por este motivo y muchos otros más, es importante conocer muy bien sus propiedades.

La constante dieléctrica es una constante física que describe cómo un campo eléctrico afecta y es afectado por un medio por ejemplo el dióxido de carbono que es objeto de nuestro estudio. La permitividad está determinada por la tendencia de un material a polarizarse ante la aplicación de un campo eléctrico y de esa forma anular parcialmente el campo interno del material. La intención del estudio es ver como la concentración de un material dieléctrico afecta el campo eléctrico entre un capacitor, observar que tipo de comportamiento presenta y con esto poder predecir comportamientos límites y así contribuir con una mejor comprensión acerca de funcionamiento de algunos sensores y la forma en que el medio afecta las telecomunicaciones al interferir la transmisión de ondas electromagnéticas por el espacio.

En la teoría electromagnética la permitividad se presenta en cualquier área siendo de mucho interés en materiales para la fabricación de dispositivos electrónicos como ser transistores, condensadores, transformadores, sensores, etc., también es muy importante en la fabricación de energía eléctrica y en la transmisión de información por medio de ondas electromagnéticas como, por ejemplo, la señal de radio AM y FM, señales de celular, cable satelital, fibra óptica, etc.[10]

La teoría de los dieléctricos sigue siendo un área muy activa para la investigación. Comprender el comportamiento de los materiales dieléctricos con las variaciones de campo, temperatura, frecuencia y densidad es de particular importancia para la electrónica actual. La electrónica moderna exige materiales con propiedades bien definidas y adaptadas a aplicaciones particulares.

En Honduras no se conocen investigaciones que se hayan realizado de este tipo, siendo una investigación pionera en esta rama del electromagnetismo en el país. Representa una oportunidad y a la vez, un claro ejemplo de que si se pueden hacer investigaciones de estas características que pensábamos difíciles de realizar.

1.1.3. Limitaciones de la investigación

Esta investigación es de carácter experimental, se trabaja a presiones bajas alrededor de $8.8 \times 10^3 Pa$ unas 0.0869 Atmosferas que es la presión mínima que nos ofrece el equipo con que se cuenta, la cámara de vacío posee un volumen pequeño, por lo tanto, la capacidad de manipulación disminuye, además, mantener estable la presión baja un lapso de tiempo adecuado es muy complicado con el equipo que se cuenta, por este motivo se debe tomar en cuenta un margen de error considerable, además, la fuente de alimentación de alto voltaje utilizada no es tan precisa como se requiere.

Para obtener mejores resultados se necesita una mejor cámara de vacío y una bomba con una mejor capacidad para tener un mayor vacío y mantener la presión estable por un lapso de tiempo mayor, por otra parte, se necesita una fuente de alimentación de alto voltaje de mayor capacidad que con la que se contaba y con una precisión mayor.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

Determinar el comportamiento de la constante dieléctrica del dióxido de carbono a densidades relativamente bajas manteniendo la temperatura constante y compararlo con la función de Clausius-Mossotti.

1.2.2. Objetivos Especificos

1. Encontrar el valor de la constante dieléctrica en el vacío y compararlo con el valor internacionalmente aceptado.
2. Obtener datos experimentales sobre la constante dieléctrica a bajas densidades de dióxido de carbono.
3. Identificar la relación entre la constante dieléctrica y la concentración de un material dieléctrico como ser el dióxido de carbono.
4. Construir una gráfica que permita observar el comportamiento de la constante dieléctrica y la concentración de dióxido de carbono a bajas densidades.
5. Comparar el comportamiento de la constante dieléctrica del dióxido de carbono a densidades bajas con la función de Clausius-Mossotti.

2. Capítulo II: Marco Teórico

2.1. Antecedentes, contexto general o marco histórico

2.1.1. Ley de Coulomb

El físico francés Charles Coulomb investigó en la década de 1780 la relación cuantitativa de las fuerzas eléctricas entre objetos cargados. La ley que lleva su nombre la demostró usando una balanza de torsión, que él mismo inventó, identificando cómo varía la fuerza eléctrica en función de la magnitud de las cargas y de la distancia entre ellas [11,12].

Esta ley estableció nuevos principios eléctricos, y así mismo, se formuló tras efectuar algunos experimentos que se resumen a continuación.

Para demostrar esta ley se usan pequeñas esferas con distintas cargas de las que no se conocía la carga exactamente, sino la relación de las cargas y se pensó acertadamente que, si una esfera conductora cargada se pone en contacto con una idéntica sin carga, compartirían la carga por igual, por la simetría, con esto se tenía la manera para producir cargas iguales, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, etc., respecto a la carga original. Manteniendo constante la separación entre las cargas, se observó que, si la carga en una esfera se duplicaba, la fuerza se duplicaba; y si la carga en ambas esferas se duplicaba, la fuerza aumentaba a cuatro veces su valor original. Si variaba la distancia entre las cargas, se encontró que la fuerza disminuía con el cuadrado referido a la distancia entre ellas, esto es, si se duplicaba la distancia, la fuerza bajaba a la cuarta parte en su valor original.

Los postulados de la Ley de Coulomb indican que la fuerza eléctrica entre dos partículas cargadas estacionarias es [11]:

- inversamente proporcional al cuadrado aplicado a la separación r entre las partículas y está dirigida a lo largo en la línea que las une.
- proporcional al producto en las cargas q_1 y q_2 .
- atractiva si las cargas tienen signo opuesto y repulsiva si las cargas tienen igual signo.

La ley de Coulomb se expresa en forma de ecuación como:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (1)$$

Donde ϵ_0 es la constante conocida como permitividad en el espacio libre o vacío y su valor es $8.8541878128 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$. [13]

La relación que existe entre la fuerza eléctrica de Coulomb y el campo eléctrico es:

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{E}}{q_2} \quad (2)$$

Donde q_2 es una carga de prueba para medir la intensidad del campo eléctrico, por lo tanto, el campo eléctrico queda como:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \hat{r} \quad (3)$$

Donde \mathbf{E} se mide en el espacio vacío.

Cuando existe un medio diferente al vacío por ejemplo aire, dióxido de carbono, etc. la expresión para el campo eléctrico queda

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1}{r^2} \hat{r} \quad (4)$$

Donde ϵ es la capacidad inductiva específica o permitividad absoluta del medio.

2.1.2. Capacitor

Un condensador eléctrico o capacitor, es un dispositivo que se le atribuye su invención a el físico holandés Pieter van Musschenbroek [2], y es un dispositivo utilizado en electricidad y electrónica, capaz de almacenar energía de manera pasiva sustentando un campo eléctrico. Está constituido por un par de superficies conductoras, generalmente en forma de láminas o placas, en situación de influencia total (de forma ideal, esto es, que todas las líneas de campo eléctrico que parten de una lámina van a parar a la otra) separadas por un material dieléctrico o el vacío. Las placas, sometidas a una diferencia de potencial, adquieren una determinada carga eléctrica, positiva en una de ellas y negativa en la otra, siendo nula la variación de carga total.

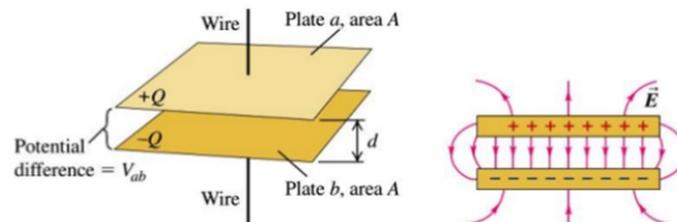


Figura 1: Líneas de campo eléctrico en un capacitor de placas paralelas, [14]

2.1.3. Dieléctricos

Un dieléctrico es un material con una baja conductividad eléctrica ($\sigma \ll 1$); es decir, un aislante, el cual tiene la capacidad de formar dipolos eléctricos en su interior bajo la acción de un campo eléctrico externo. De esta manera, todos los materiales dieléctricos son aislantes, pero no todos los materiales aislantes son dieléctricos.

Algunos ejemplos de este tipo de materiales son el vidrio, la cerámica, la goma, la mica, la cera, el papel, la madera seca, la porcelana, algunas grasas para uso industrial y electrónico y la baquelita. En cuanto a los gases se utilizan como dieléctricos sobre todo el aire, el nitrógeno, dióxido de carbono y el hexafluoruro de azufre.[15]

2.1.4. Tipos de dieléctrico utilizados en condensadores

En la actualidad existe una amplia gama de condensadores que utilizan distintos tipos de materiales dieléctricos entre las placas, la utilidad y selección de estos condensadores depende de la actividad que vaya a realizar, frecuencia de trabajo, capacitancia requerida, tamaño del capacitor, etc. Dentro de los más comunes se mencionan los siguientes¹:

¹Tomado de [Wikipedia.org/wiki/Condensador_eléctrico](https://es.wikipedia.org/wiki/Condensador_eléctrico)

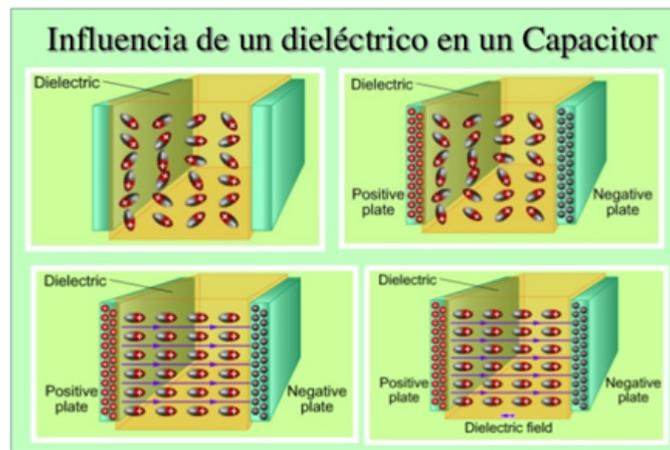


Figura 2: Influencia de un dieléctrico en un capacitor, [14]

- **Condensadores de aire:** Son condensadores construidos generalmente de placas paralelas, con aire como dieléctrico y encapsulados en vidrio. Como la permitividad eléctrica relativa es aproximadamente la unidad, sólo permite valores de capacitancia pequeños. Se utilizó en radio y radar, pues carecen de pérdidas y polarización en el dieléctrico, funcionando bien a grandes frecuencias.
- **Condensadores de mica:** Las propiedades de la mica la hacen adecuada para utilizarla como dieléctricos de condensadores, por ejemplo: bajas pérdidas, exfoliación en láminas finas, soporta altas temperaturas y no se degrada por oxidación o con la humedad. Sobre una cara de la lámina de mica se deposita aluminio, que forma una armadura. Se apilan varias de estas láminas, soldando los extremos alternativamente a cada uno de los terminales. Estos condensadores funcionan bien en frecuencias elevadas y soportan tensiones muy altas, pero son caros y se ven gradualmente sustituidos por otros tipos.
- **Condensadores de papel:** Para estos condensadores el dieléctrico es papel parafinado, baquelizado o son sometido a algún otro tratamiento que reduce su higroscopia y aumenta el aislamiento. Se construyen apilando dos cintas de papel, una de aluminio, otras dos de papel y otra de aluminio y se enrollan en espiral. Las cintas de aluminio constituyen las dos armaduras, que se conectan a las terminales. Se utilizan dos cintas de papel para evitar los poros que pueden presentar. Un ejemplo de estos capacitores son los denominados Condensadores autorregenerables; los cuales tienen aplicaciones en ambientes industriales y la armadura se realiza depositando aluminio sobre el papel. Ante una situación de sobrecarga que supere la rigidez dieléctrica del dieléctrico, el papel se rompe en algún punto, produciéndose un cortocircuito entre las armaduras, pero este corto provoca una alta densidad de corriente por las armaduras en la zona de la rotura. Esta corriente funde la fina capa de aluminio que rodea al cortocircuito, restableciendo el aislamiento entre las armaduras.
- **Condensadores electrolíticos:** Es un tipo de condensador que tiene como su primera armadura un electrolito y este actúa como un cátodo. Con la tensión adecuada, el electrolito deposita una capa aislante (la cual es en general una capa muy fina de óxido de aluminio) sobre la segunda armadura (ánodo), consiguiendo así capacidades muy elevadas. Son inadecuados para funcionar con corriente alterna. La polarización inversa

destruye el óxido, produciendo un cortocircuito entre el electrolito y la cuba², aumentando la temperatura, y por tanto, arde o estalla el condensador consecuentemente. Existen varios tipos, según su segunda armadura y electrolito empleados:

- **Condensadores de aluminio:** Es el tipo normal. La armadura es de aluminio y el electrolito una disolución de ácido bórico. Funciona bien a bajas frecuencias, pero a medias y altas frecuencias presenta pérdidas significativas. Se emplea en fuentes de alimentación y equipos de audio. Muy utilizado en fuentes de alimentación conmutadas.
 - **Condensadores de tántalo (tántalos):** Es otro condensador electrolítico, pero emplea tántalo en lugar de aluminio. Consigue corrientes de pérdidas bajas, mucho menores que en los condensadores de aluminio. Su relación capacidad/volumen es mucho mejor que el de aluminio.
 - **Condensadores bipolares (para corriente alterna):** Están formados por dos condensadores electrolíticos en serie inversa, utilizados en caso de que la corriente pueda invertirse. Son inservibles para altas frecuencias.
- **Condensadores de poliéster o Mylar:** Formados por láminas delgadas de poliéster sobre las que se deposita aluminio, que forma las armaduras. Se apilan estas láminas y se conectan por los extremos. Del mismo modo, también se encuentran condensadores de policarbonato y polipropileno.
 - **Condensadores de poliestireno:** Son condensadores conocidos comúnmente como Styroflex³, es otro tipo de condensadores de plástico, muy utilizado en radio, por disponer de coeficiente de temperatura inverso a las bobinas de sintonía, logrando de este modo estabilidad en los circuitos resonantes.
 - **Condensadores cerámicos:** Es un condensador muy utilizado que utiliza cerámicas de varios tipos para formar el dieléctrico. Existen diferentes tipos formados por una sola lámina de dieléctrico, pero también los hay formados por láminas apiladas. Dependiendo del tipo, funcionan a distintas frecuencias, llegando hasta las microondas.
 - **Condensadores síncronos:** Estrictamente hablando no es un condensador, sino es, un motor síncrono que se comporta como un condensador.
 - **Dieléctrico variable.** Este tipo de condensador tiene una armadura móvil que gira en torno a un eje, permitiendo que se introduzca más o menos dentro de la otra. El perfil de la armadura suele ser tal que la variación de capacidad es proporcional al logaritmo del ángulo que gira el eje.
 - **Condensadores de ajuste.** Son tipos especiales de condensadores variables. Las armaduras son semicirculares, pudiendo girar una de ellas en torno al centro, variando así la capacidad. Otro tipo se basa en acercar las armaduras, mediante un tornillo que las aprieta.

²Recipiente que se emplea para contener un electrolito, solución o sal fundida, que al pasar una corriente eléctrica se descompone en sustancias más sencillas.

³Marca registrada de Siemens

2.2. Teoría de los dieléctricos

En esta sección se presenta una breve descripción de la interpretación atómica de las propiedades de los materiales dieléctricos, sobre la base de la teoría clásica (No se considera tópicos de mecánica cuántica en este trabajo⁴). Esta sección se ocupa esencialmente de la constante dieléctrica estática, la dependencia de la constante dieléctrica y las pérdidas dieléctricas.

2.2.1. Susceptibilidad eléctrica y permitividad

Aunque Cunaeus y Musschenbroek desarrollaron el primer capacitor, fue Michael Faraday [3] quien notó por primera vez que cuando un capacitor de valor C_0 bajo vacío se llena con un material dieléctrico, su capacidad de almacenamiento de carga (capacitancia) aumenta a un valor de C . La relación χ_e del aumento de capacitancia $\Delta C = C - C_0$ a su capacitancia inicial C_0 es,

$$\chi_e = \frac{C - C_0}{C_0} = \frac{\Delta C}{C_0} \quad (5)$$

Donde χ_e se llama la susceptibilidad eléctrica del material. La terminología más utilizada es la capacidad inductiva específica relativa, conocida también como permeabilidad magnética relativa o la constante dieléctrica en lugar de la susceptibilidad, la constante dieléctrica se define como la relación de la capacitancia C del capacitor lleno con un dieléctrico al valor C_0 del mismo capacitor en vacío.

$$\epsilon_r = \frac{C}{C_0} \quad (6)$$

De las ecuaciones anteriores, la relación entre la susceptibilidad eléctrica y la constante dieléctrica se da como:

$$\chi_e = \epsilon_r - 1 \quad (7)$$

Así, por definición, la susceptibilidad eléctrica y la constante dieléctrica son cantidades reales sin dimensiones. La constante dieléctrica es la medida de la medida en que la distribución de carga eléctrica en el material se puede distorsionar o polarizar mediante la aplicación de un campo eléctrico externo.

2.2.2. Mecanismo de polarización eléctrica.

En el nivel atómico, toda la materia consiste, en última instancia, en partículas cargadas positiva y negativamente, cuyas cargas se equilibran entre sí macroscópicamente en ausencia de un campo eléctrico, dando lugar a una neutralidad de carga global. Una vez que se aplica el campo eléctrico, los balances de carga se ven perturbados por los siguientes cuatro mecanismos básicos de polarización [16]:

- **Polarización electrónica:** Ocurre en átomos neutros cuando un campo eléctrico desplaza el núcleo con respecto a la carga negativa. Así, la polarización electrónica es un efecto de polarización inducida.
- **Polarización atómica / iónica:** se observa cuando diferentes átomos que comprenden una molécula comparten sus electrones de forma asimétrica y hacen que la nube de electrones se desplace hacia el átomo de unión más fuerte, los átomos adquieren cargas de polaridad opuesta y un campo externo que actúa sobre estas cargas netas. tiende a cambiar las posiciones de equilibrio de los propios átomos, lo que lleva a la polarización atómica.

⁴En este trabajo solo utilizamos modelos clásicos sencillos de las propiedades moleculares, un tratamiento adecuado tendría necesariamente que hacer uso de tópicos de mecánica cuántica, afortunadamente, las propiedades más sencillas de los materiales dieléctricos son asequibles a un análisis clásico.

- **Polarización dipolar / orientativa:** cuando se forma un enlace iónico entre dos moléculas por la transferencia de algunos electrones de valencia, se originará un momento dipolar permanente en ellos. Este momento dipolar permanente es igual al producto de las cargas de los electrones de valencia transferidos y la distancia interatómica entre ellos. En presencia de un campo eléctrico \mathbf{E} , las moléculas que llevan un momento dipolar permanente se orientarán para alinearse a lo largo de la dirección del campo eléctrico \mathbf{E} . Este proceso se denomina polarización dipolar u orientativa. Esto ocurre solo en materiales dipolares que poseen momentos dipolares permanentes.
- **Polarización de la carga espacial:** está presente en materiales dieléctricos que contienen portadores de carga que pueden migrar una cierta distancia a través de la mayor parte del material (a través de la difusión, la conducción iónica rápida o el salto, etc.) creando una distorsión de campo macroscópica. Tal distorsión le parece a un observador externo un aumento en la capacitancia de la muestra y puede ser indistinguible del aumento real de la permitividad dieléctrica. La polarización de la carga espacial es el único tipo de polarización eléctrica que se acompaña de un transporte de carga macroscópico (y en el caso de que los portadores de carga migratorios sean también iones un transporte de masa macroscópico). En general, las polarizaciones de carga espacial pueden agruparse en polarización de salto y polarización interfacial. En los materiales dieléctricos, las cargas localizadas (iones y vacantes, o electrones y agujeros) pueden saltar de un sitio a otro, lo que crea la polarización del salto. De manera similar, la separación de las cargas positivas y negativas móviles bajo un campo eléctrico puede producir una polarización interfacial.

2.2.3. Ecuaciones de Maxwell en el vacío

Las ecuaciones que gobiernan los fenómenos electromagnéticos son las ecuaciones de Maxwell, que para fuentes en el vacío son [19]:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho / \epsilon_0 \\
 \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0 \mathbf{J} \\
 \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0
 \end{aligned} \tag{8}$$

En las ecuaciones de Maxwell se encuentra implícita la ecuación de continuidad que relaciona la densidad de carga y la densidad de corriente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

que se deduce de combinar la derivada temporal de la primera ecuación de las (8) con la divergencia de la segunda. También es esencial para considerar el movimiento de las partículas cargadas la ecuación de la fuerza, de Lorentz:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

que proporciona la fuerza que actúa sobre una carga puntual q en presencia de campos electromagnéticos.

Las ecuaciones de Maxwell contienen, además de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} y las fuentes ρ y \mathbf{J} , las constantes ϵ_0 y μ_0 cuyo valor en el vacío es $4\pi \times 10^{-7} \frac{N}{A^2}$, relacionadas a su vez, mediante

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

con un parametro c . Esta magnitud tiene las dimensiones de la velocidad y es la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío o comúnmente llamada velocidad de la luz en el vacío, este parámetro tiene el valor de [13]:

$$c = (299792456.2 \pm 1.1)m/s$$

2.2.4. Ecuaciones de Maxwell en su forma general

Se pueden escribir las ecuaciones de Maxwell de la manera siguiente y se suponen que son siempre válidas:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (9)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (11)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (12)$$

Donde \mathbf{D} es el vector desplazamiento eléctrico que se define por medio de \mathbf{E} y la polarización \mathbf{P} de la siguiente manera:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (13)$$

También, \mathbf{H} es la intensidad de campo magnético, que se define por medio de \mathbf{B} y la magnetización \mathbf{M} de la siguiente manera:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (14)$$

El contenido físico de las ecuaciones de Maxwell es [10]:

- La ecuación (9) resume la ley de Coulomb de la fuerza entre cargas más los efectos de la materia.
- La ecuación (10) representa la ley de Faraday de la inducción, que es también compatible con la ley de Coulomb para campos estáticos.
- La ecuación (11) es consecuencia de la ley de Ampere de la fuerza entre corrientes y también refleja el hecho de que no se sabe que existan cargas magnéticas libres.
- La ecuación (12) incluye la ley de Ampere para la fuerza entre corrientes más los efectos magnéticos de la materia, además de la conservación de la carga libre.

2.2.5. Teoría del campo eléctrico local.

Debido a que la carga no puede fluir libremente en los materiales aislantes, los campos eléctricos aplicados de varias intensidades pueden penetrar en sus interiores. Hay al menos tres contextos amplios en los que es importante saber cómo la estructura interna de un aislante, tanto electrónico como iónico, se reajusta cuando un campo eléctrico adicional se superpone en el campo eléctrico asociado con el potencial reticular periódico [18]:

- 1 Podemos colocar una muestra del aislante en un campo eléctrico estático como el existente entre el lugar de un condensador. Se pueden deducir muchas consecuencias importantes de la distorsión interna resultante si se conoce la constante dieléctrica estática ϵ del cristal, cuyo cálculo es, por lo tanto, un objetivo importante de cualquier teoría microscópica de los materiales aislantes (Nuestro objeto de estudio).

- 2 Podemos estar interesados en las propiedades ópticas del aislante, es decir, en su respuesta al campo eléctrico de AC asociado con radiación electromagnética. En este caso, la cantidad importante a calcular es la constante dieléctrica dependiente de la frecuencia $\epsilon(\omega)$, o, equivalentemente, el índice de refracción, $n = \sqrt{\epsilon}$.
- 3 En un cristal iónico, incluso en ausencia de campos aplicados externamente, puede haber fuerzas electrostáticas de largo alcance entre los iones además del potencial reticular periódico, cuando la red se deforma de su configuración de equilibrio (como, por ejemplo, en el curso de ejecutar un modelo normal). A menudo, estas fuerzas se abordan mejor considerando el campo eléctrico adicional que les confiere un valor, cuyas fuentes son intrínsecas al cristal.

Al tratar con cualquiera de estos fenómenos, la teoría de las ecuaciones macroscópicas de Maxwell en un medio es la herramienta más valiosa.

Para explorar la electrostática macroscópica, se requiere una teoría que relacione la densidad de polarización \mathbf{P} con el campo eléctrico macroscópico aplicado \mathbf{E} . Dado que cada molécula tiene dimensiones microscópicas, su desplazamiento y distorsión estarán determinados por la fuerza debida al campo microscópico en la posición de la molécula, disminuido por la contribución al campo microscópico de la molécula misma. Este campo se denomina frecuentemente campo local (o efectivo), \mathbf{E}_{loc} [18]. En los medios menos densos (enrarecidos, en el que las moléculas están muy separadas, hay poca diferencia entre el campo macroscópico y el campo local que actúa sobre la molécula o grupo de moléculas. Pero en los medios densos, por ejemplo, cristales y líquidos, las moléculas están muy próximas entre sí, la polarización de las moléculas vecinas da lugar a un campo eléctrico interno o local \mathbf{E}_{loc} que actúa sobre la molécula dada además del campo medio macroscópico \mathbf{E} , de modo que el campo total sobre la molécula es $\mathbf{E} + \mathbf{E}_{loc}$. Según [19], podemos expresar el campo local como la diferencia de dos términos:

$$\mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E}_{prox} - \mathbf{E}_p \quad (15)$$

donde \mathbf{E}_{prox} es la contribución real de las moléculas próximas a la dada y \mathbf{E}_p es la contribución de aquellas moléculas que se tratan mediante la aproximación de considerarlas un conjunto promediado descrito por la polarización \mathbf{P} . En otras palabras, en las proximidades de la molécula de interés, tomamos en cuenta la configuración atómica específica y las posiciones de las moléculas vecinas.

Suponiendo un cierto volumen V macroscópicamente pequeño, pero microscópicamente grande como se muestra en la figura 3.

Se puede calcular \mathbf{E}_p utilizando la integral de volumen del campo eléctrico en el interior de un volumen esférico V de radio R que contiene una distribución de carga [19].

$$\int_{r < R} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x = - \int_{r < R} \nabla \phi(\mathbf{x}) d^3x \quad (16)$$

Donde $\phi(\mathbf{x})$ es el potencial escalar y depende de la posición:

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \quad (17)$$

Esta ecuación puede convertirse en una integral extendida a la superficie de la esfera:

$$\int_{r < R} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x = - \int_{r=R} R^2 d\Omega \phi(\mathbf{x}) \mathbf{n} \quad (18)$$

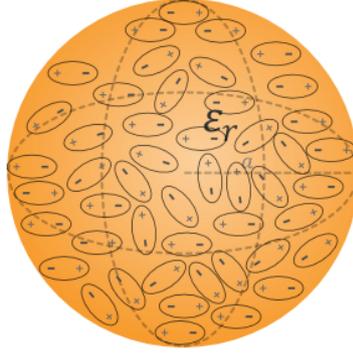


Figura 3: Esfera que contiene en su interior una distribución de carga,[20]

donde se ha utilizado la identidad,

$$\int_{r=R} u d\mathbf{n} = \int_V (\nabla u) d^3x$$

con $u = \phi(\mathbf{x})$, \mathbf{n} el vector normal dirigida hacia fuera de la superficie ($\mathbf{n} = \mathbf{x}/R$) y $da = R^2 d\Omega$, siendo $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ el diferencial angular en coordenadas esféricas. Si sustituimos (17) en (18) nos queda:

$$\int_{r < R} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x = -\frac{R^2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(x') \int_{r=R} d\Omega \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (19)$$

Para realizar la integración angular se observa en primer lugar que \mathbf{n} puede escribirse en función de los ángulos (θ, ϕ) de las coordenadas esféricas,

$$\mathbf{n} = \hat{x} \sin\theta \cos\phi + \hat{y} \sin\theta \sin\phi + \hat{z} \cos\theta$$

Las diferentes componentes de \mathbf{n} son combinaciones lineales de los armónicos esféricos (Y_{lm}) exclusivamente con $l = 1$, como se demuestra a continuación:

$$\begin{aligned} n_x &= aY_{1m}^* + aY_{1m} = a(Y_{11}^* + Y_{11}) \\ n_x &= a \left(-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{-i\phi} \right) + a \left(-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi} \right) \\ n_x &= a \left[-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta (\cos\phi - i \sin\phi) \right] + a \left[-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta (\cos\phi + i \sin\phi) \right] \\ n_x &= -2a \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \cos\phi \end{aligned}$$

si $a = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}}$, entonces $n_x = \sin\theta \cos\phi$, haciendo lo mismo para n_y

$$\begin{aligned} n_y &= b(Y_{11}^* - Y_{11}) \\ n_y &= b \left[-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta (\cos\phi - i \sin\phi) \right] - b \left[-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta (\cos\phi + i \sin\phi) \right] \\ n_y &= 2bi \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \sin\phi \end{aligned}$$

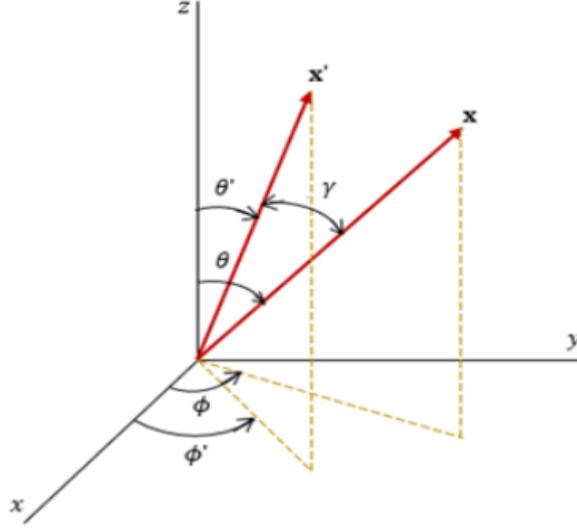


Figura 4: Vector posición \mathbf{x} campo y vector posición \mathbf{x}' fuente

si $b = -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}$, entonces $n_y = \text{sen}\theta\text{sen}\phi$, haciendo lo mismo para n_z

$$n_z = cY_{10} = c\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

si $c = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}$, entonces $n_z = \cos\theta$, escribiendose

$$\mathbf{n} = \hat{x}n_x + \hat{y}n_y + \hat{z}n_z$$

como

$$\mathbf{n} = \hat{x}a [Y_{11}^*(\theta, \phi) + Y_{11}(\theta, \phi)] + \hat{y}b [Y_{11}^*(\theta, \phi) - Y_{11}(\theta, \phi)] + \hat{z}cY_{10}(\theta, \phi)$$

Por el teorema de adición de los armónicos esféricos, podemos sustituir

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (20)$$

según [19], donde $r_{<}$ es el menor y $r_{>}$ es el mayor de los $|\mathbf{x}|$ y $|\mathbf{x}'|$. Tomando la integral angular

$$\int_{r=R} d\Omega \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 4\pi \int d\Omega \{ \hat{x}a [Y_{11}^*(\theta, \phi) + Y_{11}(\theta, \phi)] + \hat{y}b [Y_{11}^*(\theta, \phi) - Y_{11}(\theta, \phi)] + \hat{z}cY_{10}(\theta, \phi) \} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (21)$$

la condición de ortogonalidad y normalización de los armónicos esféricos Y_{lm} es

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \text{sen}\theta d\theta Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta_{l'l} \delta_{m'm} \quad (22)$$

y nos asegura que desaparecen todos los términos de la serie de (21) salvo el $l = 1$, que son los términos que nos interesa.

Se puede también expresar $\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$ por medio de los *polinomios de Legendre* $P_l(x)$ de la manera siguiente

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos\gamma) \quad (23)$$

como se puede ver en la figura 4, $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi')$. Considerando que solo los términos para $l = 1$ de la sumatoria nos interesa ya que los demás términos desaparecen, entonces tenemos:

$$P_l(\cos\gamma) = P_1(\cos\gamma) = \cos\gamma \quad (24)$$

entonces, la integral angular nos queda:

$$\int_{r=R} d\Omega \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \int d\Omega \mathbf{n} \cos\gamma \quad (25)$$

expandiendo la integral, tenemos:

$$\int d\Omega \mathbf{n} \cos\gamma = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta (\hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi + \hat{z}\cos\theta) [\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi')]$$

desarrollando la integral por medio de Mathematica se obtiene:

$$\int d\Omega \mathbf{n} \cos\gamma = \frac{4\pi}{3} (\hat{x}\sin\theta'\cos\phi' + \hat{y}\sin\theta'\sin\phi' + \hat{z}\cos\theta') = \frac{4\pi}{3} \mathbf{n}' \quad (26)$$

(Ver apéndice 4), donde $\mathbf{n}' = (\hat{x}\sin\theta'\cos\phi' + \hat{y}\sin\theta'\sin\phi' + \hat{z}\cos\theta')$. Por lo tanto (19) nos queda:

$$\int_{r<R} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x = -\frac{R^2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(x') \left[\frac{r_{<}}{r_{>}^2} \left(\frac{4\pi}{3} \mathbf{n}' \right) \right] \quad (27)$$

en la que $r_{<} = r' = x'$ y $r_{>} = R$ quedando:

$$\int_{r<R} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x = -\frac{1}{3\epsilon_0} \int d^3x' \rho(x') x' \mathbf{n}' \quad (28)$$

La integral de volumen del campo eléctrico en el volumen de la esfera resulta ser:

$$\int_{r<R} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad (29)$$

siendo $\mathbf{p} = \int d^3x' \rho(x') x' \mathbf{n}'$ el momento dipolar eléctrico de la distribución de carga con respecto al centro de la esfera.

Como se menciono anteriormente, si se escoge el volumen V como una esfera de radio R que contiene muchas moléculas, el momento dipolar total en su interior es:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int_V \mathbf{P}(\mathbf{x}) d^3x = \mathbf{P} \int_V d^3x \\ \mathbf{p} &= \frac{4\pi R^3}{3} \mathbf{P} \end{aligned}$$

donde \mathbf{P} es la polarización y se ha supuesto que V es lo bastante pequeño para que la polarización sea esencialmente constante en todo el volumen. Para encontrar \mathbf{E}_p , utilizaremos el valor del campo eléctrico medio dentro de la esfera y este esta dado por el teorema del valor medio para integrales:

$$\int_D \mathbf{f}(x, y, z) d^3x = \mathbf{f}(x_0, y_0, z_0) G(D)$$

Donde $G(D)$ denota el volumen V de la esfera, en este caso $\mathbf{f}(x, y, z) = \mathbf{E}$ y $\mathbf{f}(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{E}_p$

$$\mathbf{E}_p = \frac{3}{4\pi R^3} \int_{r < R} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x \quad (30)$$

Sustituyendo (29) en (30), tenemos:

$$\mathbf{E}_p = \frac{3}{4\pi R^3} \left(-\frac{\mathbf{p}}{3\epsilon_0} \right)$$

y sustituyendo también $\mathbf{p} = \frac{4\pi R^3}{3} \mathbf{P}$

$$\mathbf{E}_p = -\frac{1}{4\pi R^3 \epsilon_0} \left(\frac{4\pi R^3}{3} \mathbf{P} \right)$$

quedando al final

$$\mathbf{E}_p = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad (31)$$

que es lo que se deseábamos encontrar.

Por lo tanto con (31), el campo local (15) puede escribirse como:

$$\mathbf{E}_{loc} = \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} + \mathbf{E}_{prox} \quad (32)$$

El campo debido a las moléculas cercanas es más difícil de determinar Lorentz logro demostrar [19], que para átomos en una red cúbica simple \mathbf{E}_{prox} se anula en cualquier punto del retículo cristalino.

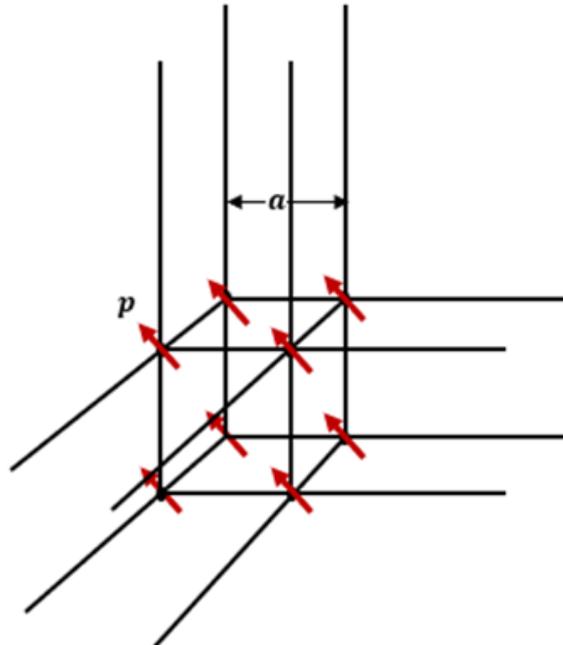


Figura 5: Cálculo de la contribución de las moléculas cercanas al campo interno en el caso de una red cúbica simple

El argumento que utilizado se basa en la simetría del problema, si suponemos que en el interior de la esfera que tomamos anteriormente, tenemos una ordenación cúbica de dipolos,

tales como los dibujados en la figura 5, con todos sus momentos de valor constante y orientados según la misma dirección (recordando que la esfera que tomamos es macroscópicamente pequeña, pero contiene muchísimas moléculas). las posiciones de los dipolos vienen dadas por las coordenadas \mathbf{x}_{ijk} con componentes a lo largo de los tres ejes (ia, ja, ka); siendo a el espacio del retículo cúbico y los índices i, j, k toman cada uno valores enteros positivos o negativos. El campo total debido a todos los dipolos en el origen es:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j,k} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_{ijk})\mathbf{x}_{ijk} - x_{ijk}^2 \mathbf{p}}{x_{ijk}^5} \quad (33)$$

La componente x podemos escribirla en la forma:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{ijk} \frac{3(i^2 p_1 + j p_2 + k p_3) - (i^2 + j^2 + k^2) p_1}{a^3 (i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}} \quad (34)$$

Como los índices recorren los mismos valores positivos y negativos, los términos cruzados que contienen ($j p_2 + k p_3$) se anulan. Por razones de simetría, las tres sumas:

$$\sum_{ijk} \frac{i^2}{(i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}} = \sum_{ijk} \frac{j^2}{(i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}} = \sum_{ijk} \frac{k^2}{(i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}}$$

son iguales, y, por consiguiente, tenemos:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{ijk} \frac{[3i^2 - (i^2 + j^2 + k^2)] p_1}{a^3 (i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}} = 0 \quad (35)$$

Por el mismo procedimiento se demuestra que también se anulan las componentes en y y en z . Luego $\mathbf{E}_{prox} = 0$ para una red cúbica simple.

Si $\mathbf{E}_{prox} = 0$ para una situación altamente simétrica, es de esperar que sea también cero para situaciones completamente desordenadas al azar (como es nuestro caso). según [19], esperamos que las sustancias amorfas tampoco tengan campo local debido a las moléculas próximas. Para otras redes distintas de la cúbica simple, las componentes de \mathbf{E}_{prox} están relacionadas con las componentes de \mathbf{P} por intermedio del tensor de traza nula $s_{\alpha\beta}$ que tiene las propiedades de simetría de la red. No obstante, para la mayoría de los materiales tomar $\mathbf{E}_{prox} = 0$ es una buena hipótesis de trabajo.

Por lo tanto, de (32) deducimos que

$$\mathbf{E}_{loc} = \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad (36)$$

2.2.6. Polarización y constante dieléctrica

Se define como **Polarización** a la capacidad de un material dieléctrico para almacenar energía eléctrica bajo la influencia de un campo eléctrico, resultando por la separación y alineación de las cargas eléctricas inducida por el campo.

La polarización ocurre cuando el campo eléctrico causa una separación de las cargas positivas y negativas en el material. Cuanto mayor sean la distancia del momento dipolar de esta separación de carga en la dirección de un campo y cuanto mayor sea el número de estos dipolos,

mayor será la permitividad dieléctrica del material.

En presencia de mecanismos de polarización electrónicos, iónicos y dipolares, el momento dipolar inducido promedio por molécula \mathbf{p}_{av} será la suma de todas las contribuciones en términos del campo local (campo efectivo) que actúa sobre cada molécula individual.

$$\mathbf{p}_{av} = \alpha_e \mathbf{E}_{loc} + \alpha_i \mathbf{E}_{loc} + \alpha_d \mathbf{E}_{loc} \quad (37)$$

Donde, α_e , α_i , α_d son las polarizabilidades electrónicas, iónicas y dipolares respectivamente, la polarizabilidad se define como la facilidad que presenta la molécula para poder ser distorsionado por un campo eléctrico. Como ya se menciono \mathbf{E}_{loc} es el campo local o el campo efectivo en el sitio de una molécula individual que causa la polarización individual. Cada efecto se agrega linealmente al momento dipolar neto de la molécula. La polarización interfacial no se puede agregar simplemente a la polarización total como $\alpha_{ij} \mathbf{E}_{loc}$, porque ocurre en las interfaces y no se puede colocar en una polarización promedio por molécula en el volumen. Además, los campos no están bien definidos en las interfaces.

Para dieléctricos simples (por ejemplo gases, que es la sustancia de estudio en este trabajo) se puede considerar que el campo local es el mismo que el campo macroscópico. Esto significa que \mathbf{E}_{loc} es igual al campo aplicado \mathbf{E} , y por lo tanto la polarización es,

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (38)$$

la polarización total del volumen seleccionado es $\mathbf{P} = N \mathbf{p}_{av}$, donde N es el número de átomos o molécula por unidad de volumen [17], podemos escribir (37) como.

$$\mathbf{p}_{av} = (\alpha_e + \alpha_i + \alpha_d) \mathbf{E}_{loc} = (\alpha_e + \alpha_i + \alpha_d) \mathbf{E} = \alpha \mathbf{E}$$

donde α es igual a la suma de las contribuciones de las polarizabilidades electrónicas, iónicas y dipolares respectivamente y la llamaremos polarizabilidad de la molécula, en otras palabras $\alpha = \alpha_e + \alpha_i + \alpha_d$. De (38) tenemos que

$$\mathbf{P} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \mathbf{E} = \alpha N \mathbf{E}$$

Despejando, llegamos al resultado

$$\epsilon_r = 1 + \frac{N\alpha}{\epsilon_0} \quad (39)$$

donde ϵ_r es la constante dieléctrica.

2.2.7. Relación de Clausius-Mossotti para la permitividad dieléctrica.

Considere una molécula de un medio dieléctrico situado en un campo eléctrico uniforme \mathbf{E} . Como se determino en (36), el campo eléctrico local está dado por:

$$\mathbf{E}_{loc} = \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}$$

El vector polarización \mathbf{P} se define como

$$\mathbf{P} = N \langle \mathbf{p}_{mol} \rangle \quad (40)$$

donde $\langle \mathbf{p}_{mol} \rangle$ es el momento dipolar medio de las moléculas. Este momento dipolar es aproximadamente proporcional al campo eléctrico que actúa sobre la molécula, como se muestra entre (37 y 39). Donde α es la polarizabilidad de la molécula y se define como la razón del

momento dipolar medio de las moléculas al campo aplicado sobre las molécula. Tomando en cuenta el campo local

$$\langle \mathbf{p}_{mol} \rangle = \alpha(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{loc}) \quad (41)$$

siendo α una función del campo eléctrico, aunque para un amplio margen α es una constante que caracteriza la respuesta de las moléculas al campo aplicado.

Combinando (41) con (40) y (39) tenemos:

$$\mathbf{P} = N\alpha(\mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0}\mathbf{P}) \quad (42)$$

donde se ha supuesto que $\mathbf{E}_{prox} = 0$. Despejando para \mathbf{P} en función de \mathbf{E} y recordando (38) que define la susceptibilidad de una sustancia por medio de la polarización, se encuentra:

$$\epsilon_0\chi_e = \frac{N\alpha}{1 - \frac{1}{3\epsilon_0}N\alpha} \quad (43)$$

como la relación entre la susceptibilidad (parametro macroscópico) y la polarizabilidad (parámetro microscópico). Recordando que $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0 = (1+\chi_e)$, la constante dieléctrica puede expresarse en función de α

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0}{N} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right) \quad (44)$$

Esta se conoce como la ecuación de Clausius-Mossotti [4-6].⁵

Para dieléctricos no polares, podemos escribir la ecuación de Clausius-Mossotti [1] y reordenando los términos, nos queda:

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{1}{3\epsilon_0}(N_m\alpha_{ind}) \quad (45)$$

Donde α_{ind} es la polarizabilidad inducida, esta relación se conoce como la ecuación de Clausius - Mossotti para dieléctricos no polares.

2.2.8. Teoría de Debye para dieléctricos polares.

Además de la polarización inducida presente en todos los dieléctricos, los dieléctricos polares poseen una polarización de orientación que existe incluso en ausencia de un campo eléctrico aplicado. Cabe señalar que la polarizabilidad α_0 correspondiente a la polarización de orientación está relacionada con la orientación de las moléculas, que son más pesadas que los átomos o electrones que participan en la polarización inducida. Por lo tanto, α_0 contribuye a la polarizabilidad molecular total α , a frecuencias mucho más bajas, más que α_{ind} . Por lo tanto, la constante dieléctrica que permanece después de la relajación de la polarización de orientación (la constante dieléctrica debida a la polarización inducida) se puede designar por separado, y generalmente se representa por ϵ_∞ en el caso de los dieléctricos dipolares. Entonces la ecuación de Clausius- Mossotti se puede escribir como:

$$\frac{\epsilon_\infty - 1}{\epsilon_\infty + 2} = \frac{N_m}{3\epsilon_0}(\alpha_{ind}) \quad (46)$$

Para explicar la contribución orientativa a la constante dieléctrica, según [1]; Debye utilizó las estadísticas de Boltzmann clásicas y la función de Langevin $yL(y) = cothy - 1/y$ de la teoría del paramagnetismo, para estimar la dependencia de la temperatura de un dipolo con orientación

⁵La relación de Clausius-Mossotti deducida esta definida en SI de medidas, para ver la ecuación en otros sistemas ver Introduction to Solid State Physics del autor Charles Kittel, 8va. edición, pag. 464.

permanente. Suponiendo que estos dipolos no interactúan entre sí, Debye derivó la siguiente ecuación para la polarizabilidad de orientación.

$$\alpha_0 = \frac{\mu^2}{3KT} \quad (47)$$

Usando el argumento de campo interno de Clausius-Mosotti discutido anteriormente, esta polarización adicional contribuye a la constante dieléctrica estática de acuerdo con las siguientes fórmulas:

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{N_m}{3\epsilon_0}(\alpha_{ind}) + \frac{N_d}{3\epsilon_0}(\alpha_0) \quad (48)$$

Aquí N_d es el número de moléculas dipolares por unidad de volumen que es igual a N_m . Esta ecuación se puede reescribir en la siguiente forma usando la ecuación (47).

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} - \frac{\epsilon_\infty - 1}{\epsilon_\infty + 2} = \frac{N_d\mu^2}{9\epsilon_0KT} \quad (49)$$

Este resultado, de Debye [21], se ha utilizado con éxito para predecir la constante dieléctrica estática de muchos gases polares y líquidos polares. Sin embargo, cuando se aplica al estado condensado de la materia, la teoría de Debye se rompe y predice la susceptibilidad dieléctrica infinita (catástrofe de Mosotti). El motivo de estos resultados reside en el supuesto que se hace en la expresión para el campo local de Clausius-Mosotti. El campo cercano en este caso se supone que es cero. En la fase condensada, los dipolos permanentes tienden a perder su libertad individual de orientación a través de la asociación y el impedimento estérico. Se debe tener en cuenta su interacción con el entorno y no se puede ignorar el campo cercano.

2.2.9. Teoría de Onsager

Para evitar la catástrofe de Mossotti, Onsager modificó la teoría de Debye introduciendo una cavidad. En su nuevo enfoque del problema, el campo eléctrico estaba representado por la suma de un “campo de cavidad” y un “campo de reacción”. Si se considera que el entorno de cada molécula es un continuo homogéneo, que tiene las propiedades macroscópicas de la sustancia, el “campo de cavidad” es el campo dentro de la cavidad de dimensiones moleculares, debido a un campo externo uniforme. Este campo de cavidad es el campo en la cavidad resultante de la polarización inducida en el medio circundante por la molécula en la cavidad. Esta parte del campo no ejerce torque sobre la molécula. El modelo molecular de Onsager consistió en una esfera con un momento dipolar permanente y una polarizabilidad isotrópica. Basándose en este modelo, llega a la siguiente expresión, que vincula el momento dipolar molecular con la constante dieléctrica estática:

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} - \frac{\epsilon_\infty - 1}{\epsilon_\infty + 2} = \frac{3\epsilon(\epsilon_\infty + 2)}{(2\epsilon - \epsilon_\infty)(\epsilon + 2)} \frac{N_d\mu^2}{9\epsilon_0KT} \quad (50)$$

como se mencionó anteriormente ϵ_∞ es la constante dieléctrica que permanece después de la relajación de la polarización de orientación.

La relación de Onsager es muy satisfactoria para líquidos polares no asociados [22] y también se puede aplicar a sólidos de Van der Waals débilmente unidos. En general, la mayoría de los dieléctricos sólidos no obedecen ninguna de las expresiones de campo locales a frecuencias suficientemente bajas, debido a los portadores de carga presentes en estos materiales, principalmente iones, pero posiblemente también electrones. Esto hace que cualquier medición significativa de la permitividad dieléctrica de baja frecuencia sea muy difícil, lo que hace que la comparación con la teoría de campo local sea bastante dudosa.

2.2.10. Pérdida dieléctrica, permitividad dieléctrica compleja y ecuaciones de Maxwell.

La permitividad de un material dieléctrico tiene representaciones matemáticas reales e imaginarias. La parte imaginaria de la permitividad se representa en ecuaciones matemáticas como ϵ_p y describe la pérdida de energía de una señal de AC cuando pasa a través del dieléctrico. La parte real de la permitividad ϵ_r también se denomina constante dieléctrica ó permitividad relativa y describe la relación entre la velocidad de transmisión de una señal de AC y la capacidad del material dieléctrico. Cuando la palabra “relativo” se usa frente a la permitividad, la implicación es que el número se informa en relación con las propiedades dieléctricas de un vacío. La parte imaginaria de la permitividad dieléctrica que es una medida de cuánto campo se pierde como calor durante la polarización de un material por un campo eléctrico alterno aplicado, también se denomina pérdida dieléctrica. La orientación característica de los dipolos en un campo eléctrico resulta en una variación de frecuencia de la constante y pérdida dieléctrica.

En el caso de la polarización dieléctrica, la polarización del material se relaciona con el campo eléctrico mediante:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (51)$$

Esto lleva a:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (52)$$

Para materiales reales \mathbf{D} puede ser descrito como [23]:

$$\mathbf{D} = (\epsilon - i\epsilon_p) \mathbf{E} \quad (53)$$

Donde, $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, la parte real de la permitividad, y ϵ_p es un factor que describe las pérdidas dieléctricas (por polarización). Para una región llena de un material isotrópico homogéneo, la primera ecuación de Maxwell (9) se puede escribir como:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} \quad (54)$$

Donde se ha utilizado la Ley de Ohm y σ es la conductividad del material. Sustituir por \mathbf{D} de la ecuación (53) en la ecuación (54) se convierte en:

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\epsilon - i\epsilon_p) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}$$

Recordando que $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$, quedandonos

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega(\epsilon - i(\epsilon_p + \sigma/\omega)) \mathbf{E} \quad (55)$$

La constante dieléctrica compleja se define de la siguiente manera:

$$\epsilon^* = \epsilon - i(\epsilon_p + \sigma/\omega)$$

Aquí, ϵ es la parte real de la permitividad y se define como:

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad (56)$$

Aquí, ϵ_r se conoce como la permitividad relativa o la constante dieléctrica, y ϵ_0 es la permitividad del espacio libre. Aquí, los términos primero y segundo en la parte imaginaria de la permitividad compleja, representan las pérdidas dieléctricas y óhmicas, respectivamente [24]. En este ϵ_r se usa todo el tiempo para representar la permitividad relativa de los materiales.

Como ya se explico, la permitividad está directamente relacionada con la susceptibilidad eléctrica. Por ejemplo, en un condensador una alta permitividad hace que la misma cantidad de carga eléctrica se almacene con un campo eléctrico menor y, por ende, a un potencial menor, llevando a una mayor capacidad del mismo.

Se demostrará posteriormente la relación que existe entre campo eléctrico y la diferencia de potencial (voltaje), por lo que se puede hacer una relación directa entre la permitividad eléctrica del medio y el voltaje necesario para que ocurra la levitación de una hoja de papel aluminio en un capacitor de placas paralelas, los valores de la permitividad variaran dependiendo de la concentración del dieléctrico objeto del estudio.

2.2.11. Clasificación de los materiales dieléctricos.

Los materiales dieléctricos se pueden clasificar en dos categorías principales: materiales lineales (dieléctricos normales) y materiales dieléctricos no lineales. Los materiales dieléctricos lineales se pueden subdividir nuevamente en tres clases, basados en el mecanismo de polarización eléctrica como materiales no polares y dipolares [1].

a. Materiales dieléctricos lineales.

Los materiales dieléctricos, que exhiben una relación lineal entre la polarización y el campo eléctrico aplicado, se conocen como dieléctricos lineales. Esta clase de materiales se polariza con la aplicación del campo y se despolariza con la eliminación del campo. Según la naturaleza del mecanismo de polarización, los dieléctricos lineales se pueden agrupar de la siguiente manera:

Materiales no polares: en materiales de esta clase, un campo eléctrico puede causar solo desplazamiento elástico de la nube de electrones (principalmente la nube de electrones de valencia). Por lo tanto, solo tienen polarización electrónica. Dichos materiales generalmente se denominan materiales elementales.

Materiales polares: en materiales de esta clase, un campo eléctrico puede causar desplazamiento elástico de las nubes de electrones, así como un desplazamiento elástico de las posiciones relativas de los iones. Estos materiales tienen polarización electrónica e iónica. El material puede estar compuesto de moléculas y cada una de las moléculas está hecha de más de un tipo de átomo, sin ningún momento dipolar permanente. Ejemplos de tales materiales son los cristales iónicos; en este caso, la polarización total es la suma de las polarizaciones iónicas y electrónicas.

$$\alpha = \alpha_e + \alpha_i$$

Materiales dipolares: los materiales de esta clase tienen las tres polarizaciones fundamentales: electrónica, iónica y de orientación. Por lo tanto, la polarización total para ellos es

$$\alpha = \alpha_e + \alpha_i + \alpha_0$$

b. Materiales dieléctricos no lineales.

Los materiales que tienen una polarización espontánea incluso en ausencia de un campo externo se agrupan en la clase de dieléctricos no lineales. La polarización espontánea aparece en estas clases de materiales debido a su estructura cristalina, generalmente cristales. Una condición necesaria para que un sólido caiga en la clase de dieléctricos no lineales es la ausencia de un centro de simetría. Entre las 32 clases de cristal, 11 tienen un centro de simetría y, por lo

tanto, no exhibirán polarización espontánea. De las 21 clases restantes de cristales sin un centro de simetría, 20 son piezoeléctricos, es decir, estos cristales pueden polarizarse bajo la influencia de un estrés externo. Diez de los 20 cristales piezoeléctricos exhiben el efecto piroeléctrico, es decir, la polarización de estas clases de materiales se puede cambiar con el cambio de temperatura. Los materiales ferroeléctricos discutidos a continuación, son parte de las piroeléctricas polarizadas espontáneamente.

c. Materiales ferroeléctricos

Un material ferroeléctrico es un dieléctrico no lineal que exhibe una polarización remanente en ausencia de un campo eléctrico externo, y su dirección puede ser cambiada por un campo eléctrico aplicado. El nombre ferroelectricidad proviene de las similitudes entre las polarizaciones de los materiales ferroeléctricos con la magnetización de los materiales ferromagnéticos. Los materiales ferroeléctricos muestran un efecto histérico de polarización con un campo aplicado. El circuito histérico es causado por la existencia de dipolos eléctricos permanentes en el material. Cuando el campo eléctrico externo se incrementa inicialmente desde el valor cero, aumenta la polarización. ya que más de los dipolos están alineados a lo largo de la dirección del campo. Cuando el campo es lo suficientemente fuerte, todos los dipolos están alineados con el campo, por lo que el material está en un estado de saturación. Si el campo eléctrico aplicado disminuye desde el punto de saturación, la polarización también disminuye. Sin embargo, cuando el campo eléctrico externo llega a cero, la polarización no llega a cero. La polarización en los campos cero se llama polarización remanente. Cuando se invierte la dirección del campo eléctrico, la polarización disminuye. Cuando el campo inverso alcanza un cierto valor, llamado campo coercitivo, la polarización se convierte en cero. Al aumentar aún más el campo en esta dirección inversa, se puede alcanzar la saturación inversa. Cuando el campo se reduce desde este punto de saturación, la secuencia simplemente se invierte.

En un material ferroeléctrico, se produce una transición de una celda unitaria centro simétrica a otra no simétrica en el punto Curie (T_c). El cambio en la simetría estructural afecta las propiedades estructurales y físicas del cristal. La ferroelectricidad solo se puede mantener por debajo de la temperatura de Curie. Cuando la temperatura es más alta que T_c , un material ferroeléctrico está en su estado paraeléctrico. Los materiales ferroeléctricos tienen un gran potencial de aplicación en el desarrollo de materiales, estructuras y dispositivos electromagnéticos inteligentes, incluidos condensadores en miniatura, condensadores ajustables eléctricamente, filtros y cambiadores de fase, en los últimos años. Su aplicación en las frecuencias de microondas todavía está bajo investigación intensiva.

2.2.12. La ley del gas ideal

La ley de los gases ideales es la ecuación de estado del gas ideal, este es un gas hipotético formado por partículas puntuales sin atracción ni repulsión entre ellas, obedecen las leyes de Newton y cuyos choques son perfectamente elásticos (conservando el momento y la energía cinética). La energía cinética es directamente proporcional a la temperatura en un gas ideal.

Los gases reales que más se aproximan al comportamiento del gas ideal son los gases monoatómicos y gases no polares de moléculas pequeñas en condiciones de baja presión y alta temperatura.

Sabemos que el comportamiento de un gas ideal obedece la ecuación de estado

$$PV = nRT$$

donde P es la presión, V es el volumen, n es el número de moles contenidos en el volumen V , R es la constante universal de los gases y tiene un valor de $8.314 \frac{J}{mol K}$ y T la temperatura absoluta en grados Kelvin.

Una forma diferente de expresar (71) es por la teoría cinético molecular propuesta por Ludwig Boltzmann y Maxwell, donde nos indican que las propiedades de un gas ideal a nivel molecular son:

- Todo gas ideal está formado por N pequeñas partículas puntuales (átomos o moléculas).
- Las moléculas gaseosas se mueven a altas velocidades, en forma recta (obedeciendo las leyes de Newton) y desordenada.
- Un gas ideal ejerce una presión continua sobre las paredes del recipiente que lo contiene, debido a los choques de las partículas con las paredes de este.
- Los choques moleculares son perfectamente elásticos. No hay pérdida de energía cinética.
- No se tienen en cuenta las interacciones de atracción y repulsión molecular.
- La energía cinética media de la translación de una molécula es directamente proporcional a la temperatura absoluta del gas.

Con estas propiedades, la ecuación de los gases se puede expresar teóricamente como:

$$PV = k_b NT$$

donde k_b es la constante de Boltzmann con un valor de $1.3806 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$ y como se dijo anteriormente N es el número de moléculas.

3. Capítulo III: Metodología de Investigación

3.1. Levitación Eléctrica

Se quiere igualar la Fuerza de atracción gravitacional con la fuerza eléctrica en una hoja de aluminio. La fuerza gravitacional es justamente el peso de la hoja de aluminio. La densidad del aluminio ρ es igual a 2.7 gramos/centímetros cúbicos $2.7 \times 10^3 \text{Kg}/\text{m}^3$ [12]. El volumen de una hoja de aluminio viene dado por su área, A_f , y su espesor, t .

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{F}_e \quad (57)$$

La fuerza de atracción gravitacional (\mathbf{F}_g), está dada por:

$$\mathbf{F}_g = m\mathbf{g} = \rho t A_f \mathbf{g} \quad (58)$$

donde ρ es la densidad.

Para encontrar la fuerza eléctrica (\mathbf{F}_e) de las hojas de aluminio que se localizaran entre los platos de un capacitor eléctrico paralelo. Necesitamos encontrar el campo eléctrico entre las placas del capacitor y este está dado por V/d donde V es la amplitud del voltaje y d es la separación entre las dos placas. Pero vamos a suponer que el campo se concentra en la región de las dos placas. Para capacitores con dimensiones de área de los platos lo suficientemente grandes en comparación con la separación entre las placas se sabe que el campo entre las placas es [10]:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z} \quad (59)$$

Donde σ es la densidad superficial de carga, ϵ_0 es la permitividad del vacío y \hat{z} es la dirección del campo eléctrico como se muestra en la figura (3). La magnitud del campo eléctrico es:

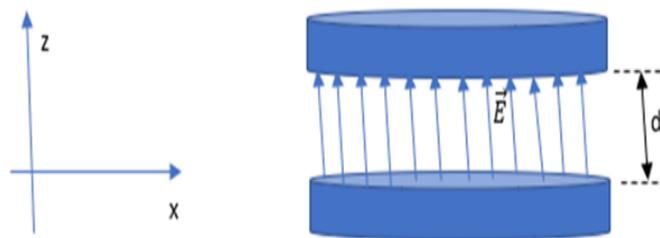


Figura 6: Campo Eléctrico de un capacitor de placas paralelas

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Despejando para σ tenemos:

$$\sigma = \epsilon_0 E$$

Sustituyendo $E = V/d$ tenemos:

$$\sigma = \epsilon_0 \frac{V}{d} \quad (60)$$

Como la hoja de aluminio estará en contacto con una de las placas del capacitor, al ser un buen material conductor este absorberá la misma carga de la placa del capacitor en el cual esta

sostenida y se sentirá atraída por la carga de la otra placa. Para una sola placa del capacitor, por ejemplo, en la placa superior la magnitud del campo eléctrico es:

$$E_{up} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{V}{2d}$$

Encontrando la fuerza eléctrica que hace la placa superior sobre la hoja de aluminio, se utiliza la ley de Coulomb, la cual nos dice que el campo eléctrico es la fuerza eléctrica que experimenta una carga dividida entre el valor de la carga eléctrica del material $E_{up} = \frac{F_e}{Q_{alum.}}$, despejando para la fuerza eléctrica y sustituyendo el campo eléctrico ya conocido y también sabiendo que la carga eléctrica $Q_{alum.} = \sigma A_f$ tenemos [10]:

$$F_e = Q_{alum.} E_{up} = \sigma A_f \frac{V}{2d} \quad (61)$$

Sustituyendo la ecuación (60) en la ecuación (61) obtenemos

$$F_e = \frac{\epsilon_0 V^2 A_f}{2d^2} \quad (62)$$

Igualando la magnitud de la fuerza de gravedad ecuación (58) y con lamagnitud de la fuerza eléctrica ecuación (61), se observa que:

$$\frac{\epsilon_0 V^2 A_f}{2d^2} = \rho t A_f g \quad (63)$$

A_f se cancela, despejando para el voltaje V^2 obtenemos:

$$V^2 = \left(\frac{2\rho g d^2}{\epsilon_0} \right) t \quad (64)$$

Si comparamos el comportamieto de V^2 con respecto a t , y si notamos que su comportamiento es lineal (Supocisión) y podemos encontrar la pendiente “ m ”. Y por medio de esta pendiente encontrar la permitividad del vacío ϵ_0 .

$$\epsilon_0 = \frac{2\rho g d^2}{m} \quad (65)$$

Si existe un medio dieléctrico entre las placas de un capacitor, ya no vacío, la expresión anterior cambia a:

$$\epsilon = \frac{2\rho g d^2}{m} \quad (66)$$

Donde $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, como se habia dicho anteriormente.

Determinaremos ϵ_r usando los valores siguientes:

Descripción	Simbolo	Valor	Fuente
Espesor de una lámina de aluminio	t	$7.8 \times 10^{-6} m \pm 2\mu m$	[25]
Densidad del aluminio	ρ	$2.70 \times 10^3 Kg/m^3$	[12]
Aceleración de la gravedad en CU	g	$(9.780 \pm 0.003)m/s^2$	[26]
Separación entre las placas	d	$(11.30 \pm 0.01)mm$	Medido en el laboratorio

Cuadro 1: Valores constantes a utilizar

Como sabemos que la hoja de papel va a levitar y nosotros solo tenemos que vencer la resistencia que ofrezca el medio para que se logre este fenómeno, se quiere determinar la relación entre la permitividad eléctrica relativa y la concentración de un material dieléctrico como ser el dióxido de carbono y después encontrar su pendiente y ver este comportamiento, para poder predecir que valores tendrá la permitividad a cualquier concentración, para ello haremos uso de un experimento que involucra la manipulación de las variables que se describen posteriormente.

Como ya se dijo anteriormente, la permitividad eléctrica relativa de un dieléctrico depende del material con que se esté trabajando, por ejemplo: se tienen varias sustancias con diferentes valores para la permitividad relativa electrostática [27].

Material	ϵ_r	Material	ϵ_r
Agua	81	Aire	1.00054
Cuarzo	5.0	Argón	1.0052
Goma	3.0 – 4.0	Helio	1.000065
Mica	4.5 – 8.0	Neón	1.000123
Metacrilato	2.6 – 3.5	Oxígeno	1.00050

Cuadro 2: Permitividad relativa de diferentes sustancias

Estos resultados se dieron a condiciones estandar de presión y temperatura. Controlando la temperatura, siempre trabajando a $23^{\circ}C$ y tomando la presión atmosférica media como $0.99 \times 10^5 pa$ calculada en el anexo 1.

3.2. Tipo y Diseño de la Investigación

La investigación que se realizó es de tipo cuantitativo con diseño experimental, ya que, primordialmente se estima la permitividad eléctrica relativa o constante dieléctrica de un material dieléctrico gaseoso para diferentes concentraciones másicas y graficar los datos obtenidos para evaluar el comportamiento de la constante respecto a la densidad, este experimento fue desarrollado en la Escuela de Física perteneciente a la Facultad de Ciencias, con el apollo de una beca básica de investigación otorgada por la Dirección de Investigación Científica de la UNAH.

Para que el proyecto de investigación se llevara a cabo fue necesario la adquisición del equipo que se necesitaba para la realización de las mediciones, el equipo fue gestionado tras el primer desembolso, ya se contaba con los enlaces de las empresas que venden este equipo en el exterior ya que en nuestro país no se fabrican o venden este tipo de equipo.

Se realizaron mediciones de la diferencia de potencial (Voltaje) entre dos placas de aluminio y el grosor de una lámina de aluminio dentro de una camara de vacío, además se realizaron mediciones para diferentes concentraciones de dióxido de carbono, estas son las tres variables independientes, por medio de estas obtuvieron diferentes valores para la permitividad del dieléctrico que es nuestra variable dependiente que se quería determinar.

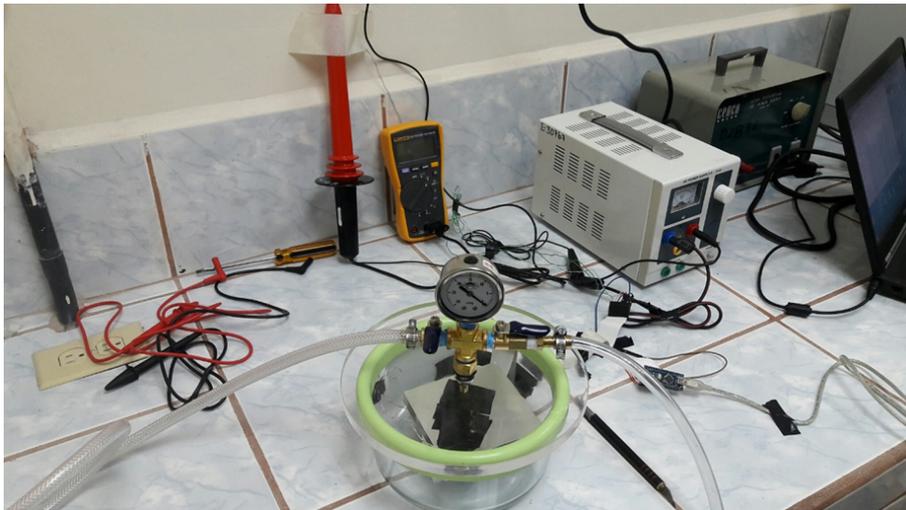


Figura 7: Diseño experimental.

3.3. Variables de Análisis

- Permitividad del vacío: Es una constante física que describe cómo un campo eléctrico afecta y es afectado por un medio, se mide en una cámara de vacío con una diferencia de potencial entre las placas y se regula hasta que las hojas de aluminio leviten.
- Diferencia de potencial: Trabajo por unidad de carga ejercido por el campo eléctrico sobre una partícula cargada para moverla entre dos posiciones determinadas, necesaria para poder saber cuál es el potencial adecuado al cual la hoja de aluminio levitará.
- Permitividad eléctrica relativa del dióxido de carbono como medio dieléctrico: Es una constante física que describe cómo un medio dieléctrico como el CO_2 afecta el campo eléctrico y es afectado por la concentración. Es el objeto de nuestro análisis, variable dependiente.
- Concentración másica: Cantidad de soluto disuelto en una determinada cantidad de disolvente o disolución, por medio de la concentración podemos determinar la densidad.

Variables que controlamos

Se controla la presión en el medio con la cámara de vacío, la primera medición se realizara al más alto vacío que la cámara pueda ofrecer. Controlamos el ingreso de Dióxido de Carbono, esto se hace para controlar la concentración del dieléctrico, por medio del contenedor del gas. Las mediciones se realizaran a una determinada concentración variando el Voltaje hasta que la hoja de papel aluminio de 1 cm^2 levite. Posteriormente se incrementa la concentración y se repite el procedimiento.

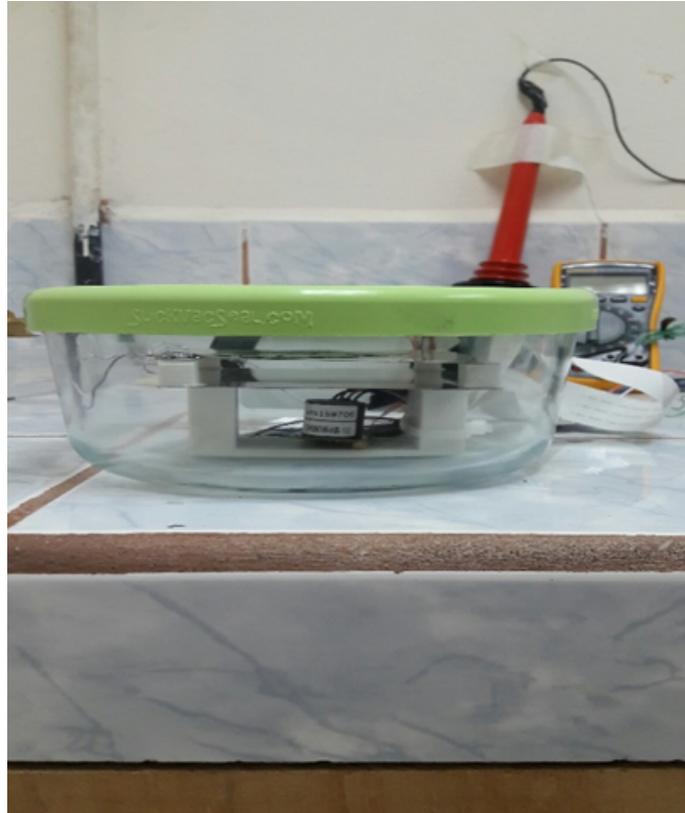


Figura 8: Diseño experimental, cámara de vacío.

Estimación de la permitividad del vacío.

En esta etapa de prueba para calibrar el equipo para poder realizar las mediciones de forma correcta. Para realizar este experimento se necesita un vacío causado por una cámara de vacío y se coloca la hoja de aluminio de aproximadamente 1 cm^2 de área entre las placas paralelas conectadas cada una a un polo de la fuente de alto voltaje, luego se energiza con la fuente y se regula hasta que la hoja de aluminio empieza a levitar, midiendo la diferencia de voltaje en las entradas al capacitor. Se repite el procedimiento para diferentes hojas de aluminio de diferente área.

Estimación de la permitividad del aire y de dióxido de carbono

En esta etapa se utilizó como punto de partida para poder realizar las mediciones de que serían analizadas más tarde. Para realizar este experimento se necesito un contenedor en el cual contenga dióxido de carbono puro, el dióxido de carbono ingresara a la cámara de vacío en forma controlada y la concentración se determinara utilizando la ecuación del gas ideal ya que estamos hablando de presiones bajas y temperaturas altas. Se coloca la hoja de aluminio entre las placas paralelas, luego se energiza con la fuente y se regula hasta que la hoja de aluminio empieza a levitar, midiendo la diferencia de voltaje en las entradas al capacitor y la concentración del gas en el capacitor. Repitiéndose los pasos para una diferente concentración del dióxido de carbono.

4. Resultados del experimento

4.1. Mediciones

Primera Medición

Medida	Voltaje ($V \pm 5V$)	t ($m \pm 2 \times 10^{-7}m$)	Presión Manométrica
1	2423	7.60×10^{-6}	-27 in Hg
2	3360	1.52×10^{-5}	$-91,432.53 \text{ pa}$
3	4033	2.28×10^{-5}	Presión de trabajo
4	4791	3.04×10^{-5}	$7,567.47 \text{ pa}$

Cuadro 3: Primera Medición a una presión de -27 in Hg

Nota: Presión manométrica dada por el instrumento de medición, para encontrar la presión de trabajo dentro de la cámara de vacío hay que restarle a la presión atmosférica promedio ($(0.99 \pm 0.01) \times 10^5 \text{ Pa}$, Ver Apéndice 1) la presión manométrica. Se determinó tomar una incertidumbre de voltaje de $\pm 5V$ ya que la fuente no era muy estable a la hora de tomar la medida.

Segunda Medición

Medida	Voltaje ($V \pm 5V$)	t ($m \pm 2 \times 10^{-7}m$)	Presión Manométrica
1	2350	7.60×10^{-6}	-20 in Hg
2	3252	1.52×10^{-5}	$-67,727.8 \text{ pa}$
3	3981	2.28×10^{-5}	Presión de trabajo
4	4643	3.04×10^{-5}	$31,272.20 \text{ pa}$

Cuadro 4: Segunda medición a una presión de -20 in Hg

Tercera Medición

Medida	Voltaje ($V \pm 5V$)	t ($m \pm 2 \times 10^{-7}m$)	Presión Manométrica
1	2355	7.60×10^{-6}	-15 in Hg
2	3203	1.52×10^{-5}	$-50,797.85 \text{ pa}$
3	3941	2.28×10^{-5}	Presión de trabajo
4	4630	3.04×10^{-5}	$48,204.15 \text{ pa}$

Cuadro 5: Tercera medición a una presión de -15 in Hg

Cuarta Medición

Medida	Voltaje ($V \pm 5V$)	$t (m \pm 2 \times 10^{-7}m)$	Presión Manométrica
1	2365	7.60×10^{-6}	-10 in Hg
2	3198	1.52×10^{-5}	$-33,863.9 \text{ pa}$
3	3961	2.28×10^{-5}	Presión de trabajo
4	4618	3.04×10^{-5}	$65,136.10 \text{ pa}$

Cuadro 6: Cuarta medición a una presión de -10 in Hg

Quinta Medición

Medida	Voltaje ($V \pm 5V$)	$t (m \pm 2 \times 10^{-7}m)$	Presión Manométrica
1	2360	7.60×10^{-6}	-5 in Hg
2	3161	1.52×10^{-5}	$-16,931.9 \text{ pa}$
3	3928	2.28×10^{-5}	Presión de trabajo
4	4587	3.04×10^{-5}	$82,068.05 \text{ pa}$

Cuadro 7: Quinta medición a una presión de -5 in Hg

Sexta Medición

Medida	Voltaje ($V \pm 5V$)	$t (m \pm 2 \times 10^{-7}m)$	Presión Manométrica
1	2351	7.60×10^{-6}	0 in Hg
2	3168	1.52×10^{-5}	0 pa
3	3940	2.28×10^{-5}	Presión de trabajo
4	4575	3.04×10^{-5}	$0.99 \times 10^5 \text{ pa}$

Cuadro 8: Sexta medición a una presión de 0 in Hg , presión atmosférica

5. Analisis de resultados

5.1. Cálculos realizados

5.1.1. Regresiones lineales y gráficas realizadas

Para calibrar el equipo era necesario encontrar la permitividad a la mínima presión que ofrezca el equipo (-27 inch de Hg) y compararla con la permitividad del vacío, para ello se utilizó los datos de la Primera medición del cuadro 3. Del análisis que se hizo en el marco teórico, donde se obtuvo la relación entre el voltaje y la permitividad, como se muestra en la ecuación (64).

$$V^2 = \left(\frac{2\rho g d^2}{\epsilon} \right) t$$

Si gráficamente las variables V^2 y t , se observa un comportamiento lineal, tal y como se esperaba, podemos encontrar la pendiente “ m ” por medio de regresión lineal.

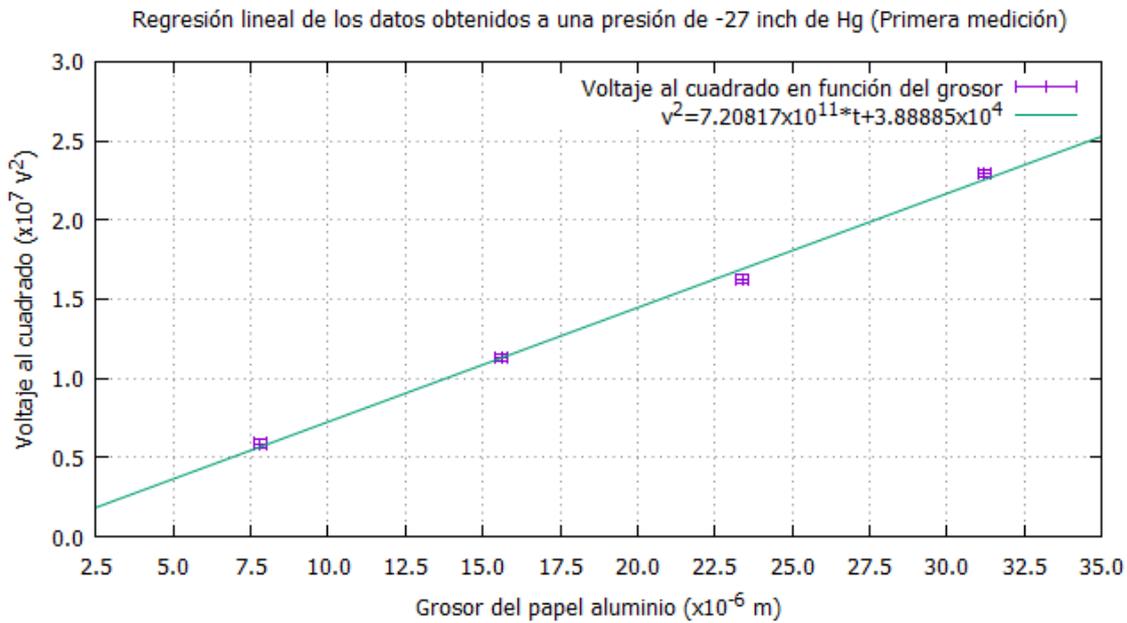


Figura 9: Regresión lineal de las mediciones realizadas a -27 inch de Hg

Podemos ver que la pendiente $m = (7.208 \pm 0.323) \times 10^{11} \text{ V}^2/\text{m}$, donde m esta relacionada con la permitividad por (66).

$$\epsilon = \frac{2\rho g d^2}{m} = \frac{2(2.70 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3)(9.78 \text{ m/s}^2)(1.13 \times 10^{-2} \text{ m})^2}{7.208 \times 10^{11} \text{ V}^2/\text{m}}$$

$$\epsilon = 9.355 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \quad (67)$$

Encontrando la incertidumbre la medición por la teoría de propagación de errores básica,

$$\frac{\delta \epsilon}{\epsilon} = \frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{\delta g}{g} + 2 \frac{\delta d}{d} + \frac{\delta m}{m}$$

obteniendo a $\delta\epsilon = 0.499 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$, recordado que estamos considerando una incertidumbre más alta, ya que, el equipo utilizado no es preciso ni estable.

Quedando al final una permitividad de

$$\epsilon = (9.355 \pm 0.499) \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} \quad (68)$$

y encontramos la constante dieléctrica por medio de (56).

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{9.355 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}}{8.854 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}} = 1.057 \quad (69)$$

con la incertidumbre para ϵ_r de 0.056, resultando

$$\boxed{\epsilon_r = 1.057 \pm 0.056} \quad (70)$$

Si se comparamos la permitividad absoluta encontrada en (68) con la permitividad del vacío vemos que tiene un error de 5.7%, lo cual es coherente con el error experimental y además, sabiendo que no estamos en vacío absoluto. Por los resultados obtenidos, podemos validar el experimento.

Haciendo lo mismo con las demas mediciones

1. Para la medidas realizadas a -20 inch de Hg de presión de trabajo obtenemos:

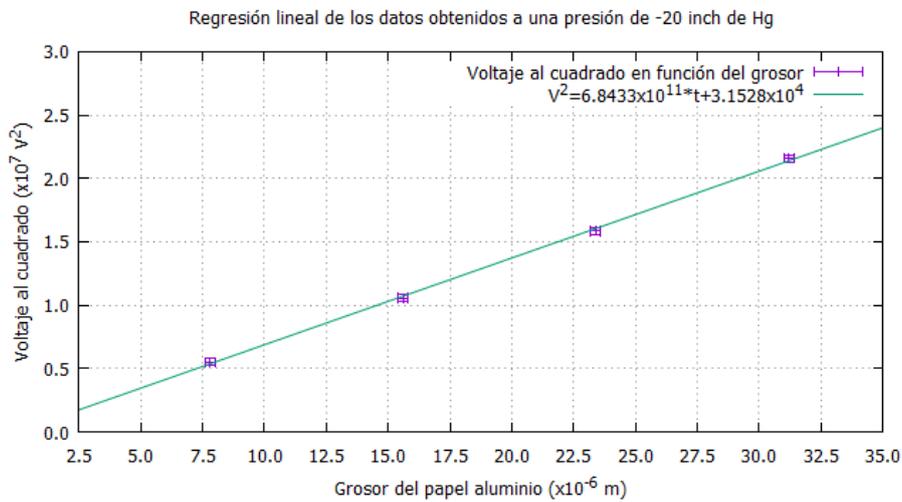


Figura 10: Regresión lineal de las mediciones realizadas a -20 inch de Hg

2. Para la medidas realizadas a -15 *inch de Hg* de presión de trabajo obtenemos:

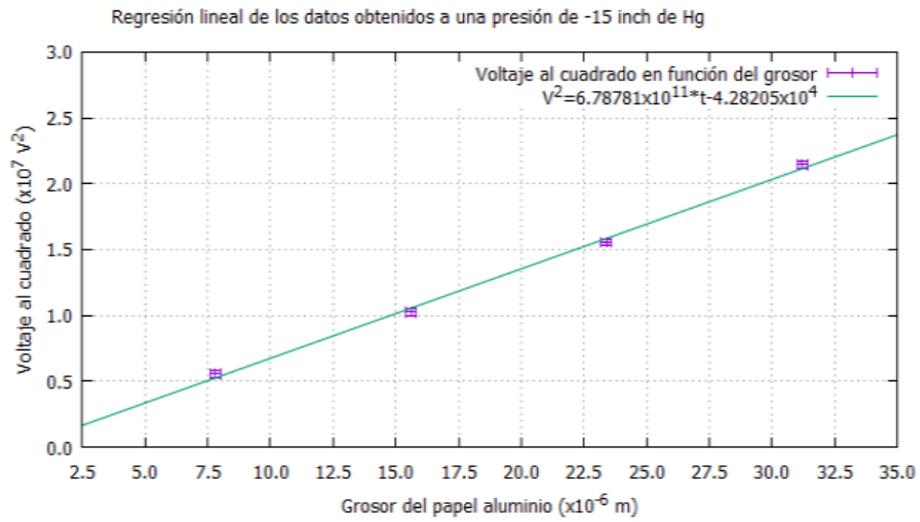


Figura 11: Regresión lineal de las mediciones realizadas a -15 *inch de Hg*

3. Para la medidas realizadas a -10 *inch de Hg* de presión de trabajo obtenemos:

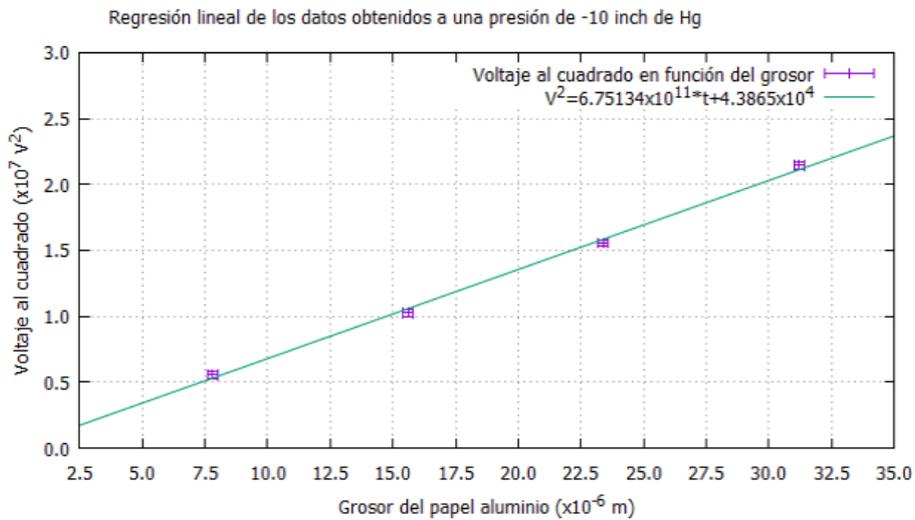


Figura 12: Regresión lineal de las mediciones realizadas a -10 *inch de Hg*

4. Para la medidas realizadas a -5 inch de Hg de presión de trabajo obtenemos:

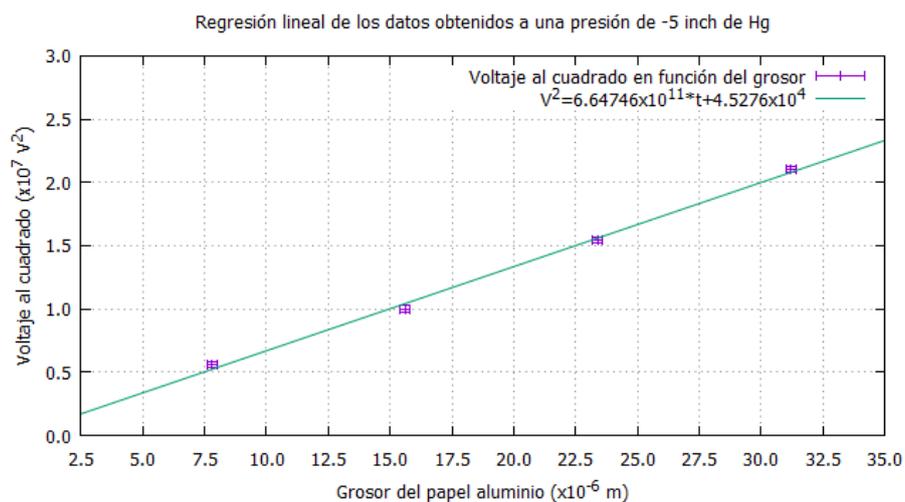


Figura 13: Regresión lineal de las mediciones realizadas a -5 inch de Hg

5. Para la medidas realizadas a -0 inch de Hg de presión de trabajo obtenemos:

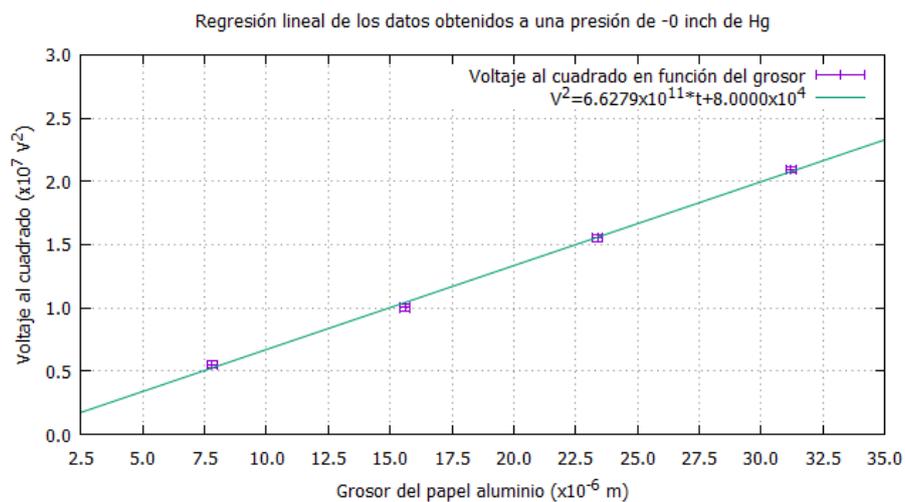


Figura 14: Regresión lineal de las mediciones realizadas a -0 inch de Hg

5.1.2. Estimación del número de moléculas de CO_2

Para estimar o determinar la concentración de moléculas de CO_2 presente en la cámara de vacío, se utilizará la ecuación del gas ideal, ya que, trabajamos con presiones bajas y temperaturas altas donde el comportamiento dióxido de carbono es ideal.⁶

Se utilizará la expresión del gas ideal

$$PV = k_b NT \quad (71)$$

con $k_b = 1.3806 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$ y como se dijo anteriormente N es el número de moléculas en la cámara de vacío cuyo **volumen efectivo de trabajo, es decir** $V = (1.46 \pm 0.05) \times 10^{-3} m^3$. Podemos encontrar N despejando de (71) tenemos

$$N = \frac{PV}{k_b T} \quad (72)$$

Calculando el número de moléculas

1. Para la primera medición a una presión de $P = -27 \text{ inch de Hg} = 7.57 \times 10^3 Pa$ y como la temperatura de trabajo es de $T = 23^\circ C \pm 1^\circ C = (296.15 \pm 1) K$, utilizando (72).

$$N = \frac{PV}{k_b T} = \frac{(7.57 \times 10^3 Pa)(1.46 \times 10^{-3} m^3)}{(1.38 \times 10^{-23} \frac{J}{K})(296.15 K)} = 2.70 \times 10^{21} \text{ moléculas}$$

con una incertidumbre de $0.28 \times 10^{21} \text{ moléculas}$

2. Para la primera medición a una presión de $P = -20 \text{ inch de Hg} = 3.13 \times 10^4 Pa$ y a la misma temperatura.

$$N = \frac{PV}{k_b T} = \frac{(3.13 \times 10^4 Pa)(1.46 \times 10^{-3} m^3)}{(1.38 \times 10^{-23} \frac{J}{K})(296.15 K)} = 1.12 \times 10^{22} \text{ moléculas}$$

con una incertidumbre de $0.08 \times 10^{22} \text{ moléculas}$

3. Para la primera medición a una presión de $P = -15 \text{ inch de Hg} = 4.82 \times 10^4 Pa$ y a la misma temperatura.

$$N = \frac{PV}{k_b T} = \frac{(4.82 \times 10^4 Pa)(1.46 \times 10^{-3} m^3)}{(1.38 \times 10^{-23} \frac{J}{K})(296.15 K)} = 1.72 \times 10^{22} \text{ moléculas}$$

con una incertidumbre de $0.10 \times 10^{22} \text{ moléculas}$

4. Para la primera medición a una presión de $P = -10 \text{ inch de Hg} = 6.51 \times 10^4 Pa$ y a la misma temperatura.

$$N = \frac{PV}{k_b T} = \frac{(6.51 \times 10^4 Pa)(1.46 \times 10^{-3} m^3)}{(1.38 \times 10^{-23} \frac{J}{K})(296.15 K)} = 2.33 \times 10^{22} \text{ moléculas}$$

con una incertidumbre de $0.12 \times 10^{22} \text{ moléculas}$

⁶Inicialmente en las mediciones realizadas se utilizó un sensor de concentración, utilizando una placa electrónica de hardware libre que utiliza un microcontrolador reprogramable con una serie de pines que permiten establecer conexiones entre el controlador y los diferentes sensores (Arduino), pero ante la duda que se generó en sus mediciones de no saber exactamente que media el sensor, se decidió utilizar la ecuación del gas ideal.

5. Para la primera medición a una presión de $P = -5 \text{ inch de Hg} = 8.21 \times 10^4 \text{ Pa}$ y a la misma temperatura.

$$N = \frac{PV}{k_b T} = \frac{(8.21 \times 10^4 \text{ Pa})(1.46 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{(1.38 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}})(296.15 \text{ K})} = 2.93 \times 10^{22} \text{ moléculas}$$

con una incertidumbre de $0.15 \times 10^{22} \text{ moléculas}$

6. Para la primera medición a una presión de $P = -0 \text{ inch de Hg} = 9.9 \times 10^4 \text{ Pa}$ y a la misma temperatura.

$$N = \frac{PV}{k_b T} = \frac{(9.9 \times 10^4 \text{ Pa})(1.46 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{(1.38 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}})(296.15 \text{ K})} = 3.54 \times 10^{22} \text{ moléculas}$$

con una incertidumbre de $0.17 \times 10^{22} \text{ moléculas}$

5.1.3. Cuadro de resultados

Los resultados finales se pueden resumir en el siguiente cuadro. ⁷

Medición	Presión de trabajo $\pm 0.01 \times 10^5 \text{ Pa}$	Pendiente de la recta ($\frac{V^2}{m}$)	Permitividad eléctrica ($\frac{C^2}{Nm^2}$)	Número de moléculas
Primera	7.57×10^3	$(7.21 \pm 0.32) \times 10^{11}$	$(9.360 \pm 0.499) \times 10^{-12}$	$(2.70 \pm 0.28) \times 10^{21}$
Segunda	3.13×10^4	$(6.84 \pm 0.13) \times 10^{11}$	$(9.85 \pm 0.277) \times 10^{-12}$	$(1.12 \pm 0.08) \times 10^{22}$
Tercera	4.82×10^4	$(6.79 \pm 0.24) \times 10^{11}$	$(9.93 \pm 0.439) \times 10^{-12}$	$(1.72 \pm 0.10) \times 10^{22}$
Cuarta	6.51×10^4	$(6.75 \pm 0.21) \times 10^{11}$	$(9.99 \pm 0.399) \times 10^{-12}$	$(2.33 \pm 0.12) \times 10^{22}$
Quinta	8.21×10^4	$(6.65 \pm 0.25) \times 10^{11}$	$(10.1 \pm 0.471) \times 10^{-12}$	$(2.93 \pm 0.15) \times 10^{22}$
Sexta	0.99×10^5	$(6.63 \pm 0.21) \times 10^{11}$	$(10.2 \pm 0.404) \times 10^{-12}$	$(3.54 \pm 0.17) \times 10^{22}$

Cuadro 9: Tabla de resultados

⁷Todos los cálculos que se necesitaron para obtener los datos que conforman el cuadro 9, fueron los mismos que se realizaron para el máximo vacío que el equipo puede ofrecer.

5.1.4. Relación entre la constante dieléctrica y la concentración de moléculas de CO_2

De los datos abtenidos en los analisis anteriores encontramos el siguiente cuadro.

Medición (inch de Hg)	Constante dieléctrica	Número de moléculas
-27	1.057 ± 0.056	$(2.70 \pm 0.28) \times 10^{21}$
-20	1.112 ± 0.031	$(1.12 \pm 0.08) \times 10^{22}$
-15	1.126 ± 0.050	$(1.72 \pm 0.10) \times 10^{22}$
-10	1.128 ± 0.045	$(2.33 \pm 0.12) \times 10^{22}$
-5	1.141 ± 0.053	$(2.93 \pm 0.15) \times 10^{22}$
0	1.152 ± 0.056	$(3.54 \pm 0.17) \times 10^{22}$

Cuadro 10: Relación entre la constante dieléctrica y la concentración de moléculas de CO_2

Donde se ha utilizado de (67) a (69) para encontrar la constante dieléctrica y su incertidumbre.

Si se gráfica la relación entre constante dieléctrica y la cantidad de moléculas de CO_2 en la cámara de vacío y se obtiene:

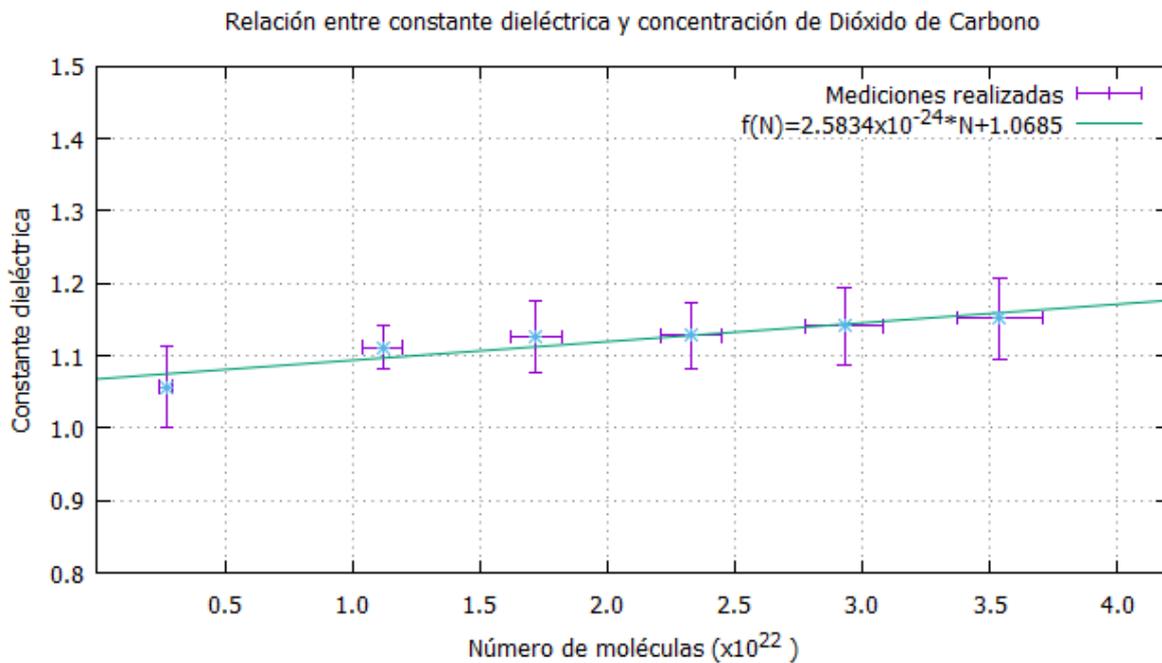


Figura 15: Relación entre constante dieléctrica y la cantidad de moléculas de CO_2

Donde se obtuvo una relación entre constante dieléctrica y concentración de CO_2

$$\epsilon_r(N) = (2.58 \pm 0.05) \times 10^{-24} * N + (1.07 \pm 0.02) \quad (73)$$

5.1.5. Comparación de los resultados obtenidos con la relación de Clausius-Mossotti

Si se grafica la constante dieléctrica (ϵ_r) obtenida teóricamente a partir de la ecuación de Clausius-Mossotti (45) deducida con anterioridad con respecto al número de moléculas (N_m) presentes en la cámara de vacío, considerando la polarizabilidad volumétrica molecular del CO_2 con un valor de $\alpha_v = 2.65 \times 10^{-30} \text{ m}^3$ [28], donde se encuentra la polarizabilidad molecular que se necesita utilizando $\alpha_{ind} = 4\pi\epsilon_0\alpha_v$. Si se compara esta gráfica con los resultados experimentales obtenidos en la figura 15, se obtiene:

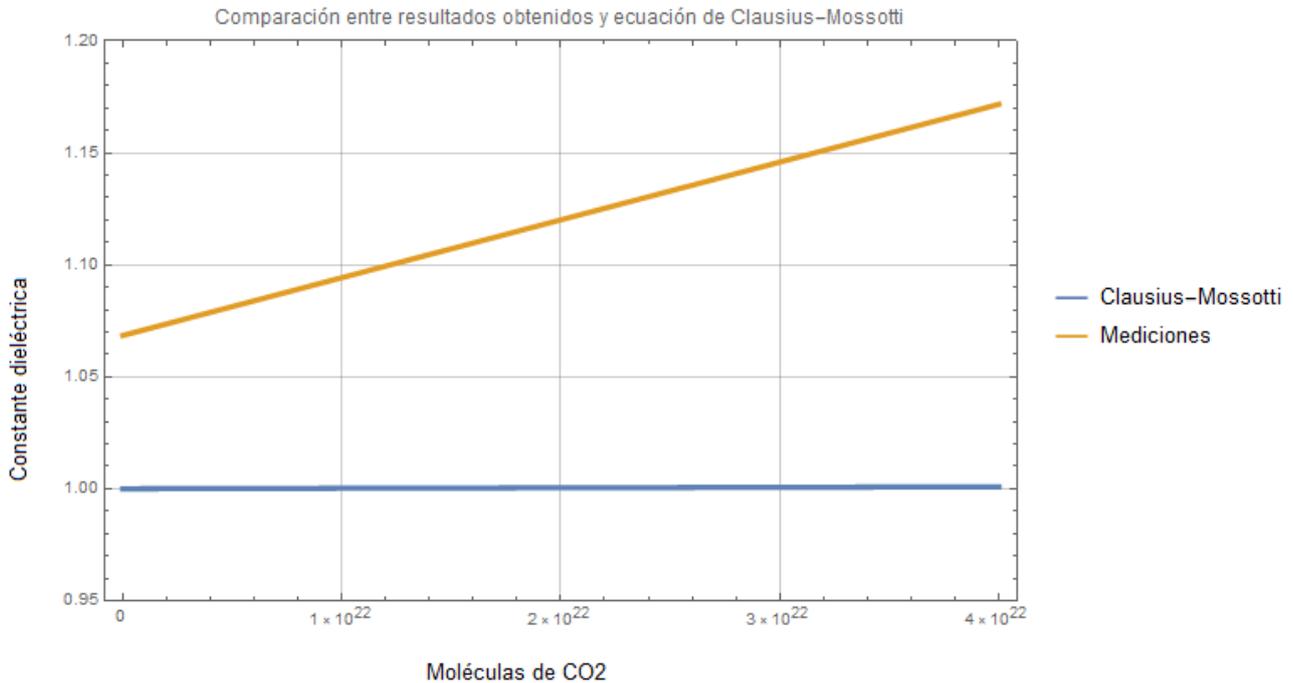


Figura 16: Comparación de los resultados obtenidos con la relación de Clausius-Mossotti

Donde se observa una diferencia considerable en el comportamiento de los resultados y la relación de Clausius-Mossotti, recordando que el equipo utilizado en el experimento no es preciso ni estable y la relación (45) se obtuvo de suposiciones ideales. Comparando los resultados de la última medición (a 0 *inch de Hg* ó 0.99 *atm* que fue la presión atmosférica promedio del laboratorio) descrito en el cuadro 10 con los resultados reportados por T. Moriyoshi y compañía [28] a 1.00 *atm*, donde obtuvieron una $\epsilon_r = 1.00969$ a una temperatura de $23^\circ C$, se encontró un porcentaje de error de

$$\%Error = \frac{|1.00969 - 1.152|}{1.00969} * 100 = 14.1 \%$$

5.2. Conclusiones

- De los resultados obtenidos se observa que la relación existente entre la permitividad eléctrica y la concentración de un dieléctrico en este caso dióxido de carbono (CO_2) tiende a ser de comportamiento lineal, en rangos de concentraciones bajas (presiones menores a 1 *atm*), igual que se presenta en el trabajo de T. Moriyoshi y compañía [28] a presiones de trabajo de 1 a 5 *atm*, con un comportamiento diferente a mayores presiones.
- La permitividad eléctrica encontrada al máximo vacío que ofrecía el equipo en el laboratorio fue de $(9.355 \pm 0.499) \times 10^{-12} C^2 / (Nm^2)$, con un error de 5.66 % comparado con el valor de la permitividad eléctrica en el vacío internacionalmente aceptado.
- Se encontró que la constante dieléctrica para el dióxido de carbono (CO_2) encontrada en el máximo vacío ofrecido por el equipo es de 1.057 ± 0.056 , cuando se comparó los resultados a 1.00 *atm* con los resultados reportados en [28] a la misma presión se obtuvo un error de 14.1 %.
- La relación encontrada entre concentración de CO_2 como dieléctrico y la constante dieléctrica obedece a la relación $\epsilon_r(N) = (2.58 \pm 0.05) \times 10^{-24} * N + (1.07 \pm 0.02)$, donde N es el número de moléculas presente en la cámara de vacío.
- Cuando se compara los resultados obtenidos con la relación de Clausius-Mossotti, se observa una diferencia considerable, debiéndose estos resultados a la inestabilidad e imprecisión del equipo con que se realizó este experimento.

5.3. Recomendaciones

1. Para obtener mejores resultados, mucho más precisos y exactos se recomienda contar con una fuente de alta tensión de mayor rango de salida y también que su estabilidad sea superior, también una cámara de vacío con una bomba de succión con mayor capacidad para generar menores valores de vacío y está a su vez cuenta con los seguros adecuados para conservar por mayor tiempo el vacío, la cámara debe ser de mayores dimensiones (mayor volumen), ya que con tan poco espacio se dificulta manipular el equipo.
2. Para observar mejor el comportamiento de la constante dieléctrica con respecto a la concentración, se recomienda hacer mayor número de mediciones, en este caso se dificultó porque la cámara de vacío con que se contaba, solo permitía trabajar en ciertos rangos de presión y en un lapso muy corto.
3. Como primer experimento de este tipo realizado en Honduras, sus resultados fueron aceptables en orden de magnitud, se comparó con la relación de Clausius-Mossotti que fue deducida de condiciones ideales, sin embargo se podría comparar mejor con una relación más real como la obtenida por Debye (49) o por Onsanger (50) que contiene más elementos reales, o se podría tomar en cuenta el método presentado por Harvey y Lemmon [29] el cual es más elaborado y considerando varios factores omitidos en (45), (49) y (50).
4. En este trabajo se dio por sentado que la temperatura fue constante, ya que, la temperatura ambiente se mantenía constante, se recomienda para futuros trabajos definir un método que permita determinar la temperatura de trabajo insitu, determinar la presión atmosférica con un método más exacto y rápido y obtener una mayor exactitud en las dimensiones de la cámara de vacío y grosor del papel aluminio.
5. Los resultados obtenidos manifiestan un error considerablemente grande (14.1 %) y se pudiese pensar que el método no es adecuado, sin embargo, estos resultados son válidos para efectos de educativos pudiéndose generar unas prácticas de laboratorio avanzado para estudiantes de Física. Si se toman en cuenta las recomendaciones para futuros experimentos de este tipo se pueden lograr mejores resultados y se podrían investigar propiedades de otras sustancias.

Referencias

1. Sagadevan, S. and Shanmuga Sundaram, A. A brief review of the relevant dielectric theories of solids, *Latin American Journal of Physics Education*. 3 sept. 2014, Vol.8, issue 3. Pages 397-406
2. Musschen Broek, P. V., *Introduction Philosophion Naturalem*, (Luchtman, Leiden, 1762).
3. Faraday, M., Phil.Trans. 128, 1 79 265 (1837). Experimental researches in electricity
4. Mossoti, O. F., *Bibl. Univ. Modena*. 6, 193 (1847).
5. Mossoti, O. F., Mem. di Mathem e. di. Fisica in Modena. 24(2) (1850)49
6. Clausius, R., Volume 2 Vieweg. Braunschweig (1879).
7. Frederick G. Keyes and Jonh G. Kirkwood, The dielectric constant of carbon dioxide as function of temperature and density, *Physical Review*, August 15, 1930, volume 36
8. Chau, R., Brask, J., Datta, S., Dewey, G., Majumda, A., Application of high-k gate dielectrics and metal gate electrodes to enable silicon and non-silicon logic nanotechnology, *Microelectronic Engineering* 80, 1-6 (2005).
9. Jenkins, P. P., Macinnes, A. N., Tabib Azar, M. and Barron, A. R., Gallium arsenide transistors: realization through a molecularly designed insulator, *Science* 263, 1751-1753 (1994).
10. Wangsness, R. K. (1983). Campos electromagnéticos. Limusa,.
11. Coulomb, Charles Augustin (1788) [1785]. «Premier mémoire sur l'électricité et le magnétisme». Histoire de l'Académie Royale des Sciences. *Imprimerie Royale*. pp. 569-577.
12. JEWETT, J., & SERWAY, R. (2008). Física. Para ciencias e ingenierias.
13. National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD. Bibliography on the Constants (version 3.0). [Online] Available: <http://physics.nist.gov/constantsbib> [2019, May 27].
14. Imagenes tomada del Trabajo de Florencio Pinela Profesor Principal de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas. Escuela Superior Politécnica del Litoral - Campus Gustavo Galindo - 2019 - Guayaquil - Ecuador
15. González-Viñas, W., & Mancini, H. L. (2003). Ciencia de los materiales. Barcelona: Ariel.
16. Smyth, C. P. (1966). Dielectric polarization and relaxation. *Annual Review of Physical Chemistry*, 17(1), 433-456.
17. Rodebush, W. H. and Eddy, C. R. (1940). Dielectric Polarization in Solution I. The Failure of the Clausius-Mosotti Equation. *The Journal of Chemical Physics*, Vol. 8, 424- 428.
18. Ashcroft, N. W., & Mermin, N. D. (2010). Solid state physics (Saunders College, Philadelphia, 1976).
19. Jackson, J. D. (1999). Classical electrodynamics.

20. Paez Amaya, D. & Molina Prado, M. & Arias Hernandez, N. Análisis Teórico de las Pinzas Ópticas Bajo las Aproximaciones de Rayleigh y Mie. (2015), Doi: 10.13140/RG.2.2.23350.65606
21. Debye, P. (1929). Polar molecule, (The Chemical Catalog Company, Inc., New York).
22. Onsager, L. Electric moments of molecules in liquids, *Journal of the American Chemical Society* 1936, 58, 8, 1486-1493. DOI: 10.1021/ja01299a050.
23. Maxwell, J. C. A treatise on electricity and magnetism, (Clarendon press, Oxford,1892).
24. Jonscher, A. K. (1981). A new understanding of the dielectric relaxation of solids. *Journal of materials science*, 16(8), 2037-2060.
25. J. Kerry, Aluminium foil packaging, Packaging Technology, Woodhead Publishing, 2012, Pages 163-177, ISBN 9781845696658, <https://doi.org/10.1533/9780857095701.2.163>. (<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9781845696658500093>)
26. Carlos A. Tenorio, E. E. (14 de 08 de 2007). Estudio gravimétrico del cuadrángulo de Tegucigalpa, Valle del Zamorano, Valle de San Juan de Flores y Morocelí. Obtenido de <http://www.lamjol.info/index.php/RCT/article/viewFile/707/528>
27. Departamento de Física Aplicada, U. d. (25 de 06 de 2009). Laplace, Departamento de Física Aplicada, Universidad de Sevilla. Obtenido de <http://laplace.us.es/wiki/index.php/Diel>
28. T. Moriyoshi, T. Kita, & Y. Uosaki, (1993). Static Relative Permittivity of Carbon Dioxide and Nitrous Oxide up to 30 MPa. *Berichte Der Bunsengesellschaft Für Physikalische Chemie*, 97(4), 589–596. doi:10.1002/bbpc.19930970409
29. A. H. Harvey & E. W. Lemmon. Method for Estimating the Dielectric Constant of Natural Gas Mixtures. *International Journal of Thermophysics*, Vol. 26, No. 1. January 2005. Doi:10.1007/s10765-005-2351-5

6. Anexos

6.1. Anexo 1. Determinar la presión atmosférica en el laboratorio con el método Dumas

En el siglo XIX Jean Baptiste André Dumas demostró [1.a] que el peso molecular de algunos compuestos orgánicos era directamente proporcional a la densidad de vapor del compuesto, y usando este principio creo un método relativamente simple para determinar el peso molecular de una sustancia volátil, especialmente de gases y líquidos con bajos puntos de ebullición y los cuales cumplen con la ley de gas ideal.

$$PV = nRT$$

El peso molecular se calcula usando la siguiente formula

$$M = \frac{mTR}{VP}$$

Ahora haciendo algunos cambios en la ecuación en función de parámetros que podamos medir en el laboratorio, donde V es el volumen del contenedor o recipiente y pudiendolo determinar utilizando una masa de agua a temperatura ambiente, tenemos:

$$M = \frac{mTR\rho}{m_a P}$$

Dado que nos interesa medir la presión atmosférica tenemos

$$P = \frac{m_v TR\rho}{m_a M}$$

Donde:

P Presión de vapor encerrado

M Peso molecular

m_v Masa del vapor encerrado

T Temperatura del vapor

R Constante universal de los gases ideales ($8.314472J/molK$)

m_a Masa del agua

ρ Densidad del agua a temperatura ambiente ($997.62Kg/m^3$ a $23.0^\circ C$ fuente [13])

Haremos uso de este diseño experimental para determinar la presión atmosférica, el experimento se llevara a cabo con el fin de encontrar un rango de presiones en UNAH-CU, específicamente en el laboratorio donde estamos realizando el experimento “Medida del comportamiento de la constante dieléctrica para bajas densidades de CO_2 por medio de levitación eléctrica y comparación con la relación de Clausius-Mossotti.”, esto porque la presión es una cantidad que depende de variables climatológicas como ser temperatura, humedad relativa entre otros, es decir, cada día tenemos valores de presión dentro de un rango, como trabajamos con vacío, se quiere determinar el vacío máximo que la bomba nos ofrece. Se harán mediciones en días diferentes para determinar dicho rango.

La sustancia volátil que se utilizara es etanol o mejor conocido como alcohol etílico (C_2H_6O) con un punto de ebullición de $78.37^\circ C$ y con una masa molar de $46.06844g/mol$ [13].

Procedimiento Experimental

1. Medir la masa del Erlenmeyer (250mL).
2. Medir la masa del Erlenmeyer con su respectivo tapón.
3. Añadir al Erlenmeyer de 5 – 6mL de alcohol etílico.
4. Fijar el Erlenmeyer del cuello introduciéndolo en agua hirviendo.
5. Medir la temperatura del sistema el cual suponemos está en equilibrio térmico.
6. Observar el alcohol etílico del Erlenmeyer cuando todo el líquido haya evaporado lo suficiente para colocarle el tapón tal que todo el recipiente este cubierto por el vapor, secamos las paredes exteriores del recipiente.
7. Medimos las masa del Erlenmeyer (tapón más vapor de alcohol etílico).
8. Determinar el volumen del recipiente hasta el tapón colocado: llenar el Erlenmeyer con agua y pesarlo, y luego utilizar la densidad del agua a la temperatura que se encuentre en el laboratorio.

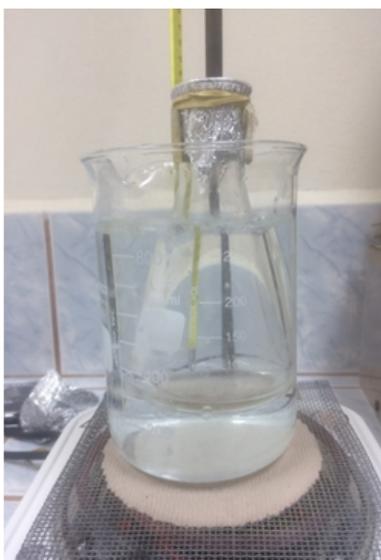


Figura 17: Diseño experimental, para obtener la presión atmosférica en el laboratorio.

Tabla de datos para determinar la presión atmosférica en el laboratorio

Masa del Erlenmeyer (<i>g</i>)	Masa del Erlenmeyer+ Tapón (<i>g</i>)	Masa del Erlenmeyer +Tapón +vapor (<i>g</i>)	Masa del vapor (<i>g</i>)	Temperatura ($^{\circ}C$)
116.583 ± 0.002	117.958 ± 0.002	118.427 ± 0.002	0.469 ± 0.004	95 ± 1
116.6213 ± 0.0005	117.8915 ± 0.0005	118.3835 ± 0.0005	0.492 ± 0.001	96 ± 1

Cuadro 11: Algunas mediciones para determinar la presión atmosférica por el método de Dumas

Masa de agua m_a que desplaza el volumen encerrado por el Erlenmeyer es:

$$m_a = (326.5 \pm 0.1)g$$

Resultados

$$P = (0.96 \pm 0.01) \times 10^5 \text{pa}$$

y

$$P = (1.01 \pm 0.01) \times 10^5 \text{pa}$$

* Solo se incluyeron en este trabajo dos mediciones, la que nos dieron en los extremos.

Conclusión

Para los días que se llevó a cabo el experimento se encontró un rango de presiones que va desde los $0.96 \times 10^5 Pa$ hasta los $1.01 \times 10^5 Pa$, datos obtenidos en días distintos. Dando un promedio de $(0.99 \pm 0.01) \times 10^5 Pa$ que es la presión atmosférica con la que se trabajará.

Referencia

- 1.a College, Santa Monica. Determination of Molecular Mass via the Dumas Method. Obtenido de Chemistry Experiments: https://www.smc.edu/AcademicPrograms/PhysicalSciences/Documents/Chemistry_11_Experiments/dumas%20bulb%20procedure.pdf

6.2. Anexo 2. Líneas de comando utilizadas para generar los gráficos.

Código utilizado para obtener la regresión y gráfica de la primera medición.

```
GNUPLOT
Version 5.2 patchlevel 8   last modified 2019-12-01

Copyright (C) 1986-1993, 1998, 2004, 2007-2019
Thomas Williams, Colin Kelley and many others

gnuplot home:      http://www.gnuplot.info
faq, bugs, etc:   type "help FAQ"
immediate help:   type "help" (plot window: hit 'h')
```

Terminal type is now 'wxt'

```
gnuplot> cd 'C:\Users\Lucio Villanueva\Desktop\Tesis Epsilon\Lucio'
gnuplot> reset
gnuplot> set grid
gnuplot> set title 'Regresión lineal de los datos obtenidos a una presión de -27 inch de Hg (Primera medición)'
gnuplot> set xlabel 'Grosor del papel aluminio (x10^{-6} m)'
gnuplot> set ylabel 'Voltaje al cuadrado (x10^{7} V^2)'
gnuplot> f(x)=a*x+b
gnuplot> fit f(x) 'primera medicion.txt' using 1:2 via a,b
```

iter	chisq	delta/lim	lambda	a	b
0	9.5334735435e+14	0.00e+00	7.07e-01	1.000000e+00	1.000000e+00
1	1.6850169856e+14	-4.66e+05	7.07e-02	6.838555e+02	1.252873e+07
2	1.5869112392e+14	-6.18e+03	7.07e-03	4.457334e+04	1.409287e+07
3	1.5868918543e+14	-1.22e+00	7.07e-04	4.429999e+06	1.409474e+07
4	1.5849704126e+14	-1.21e+02	7.07e-05	4.427059e+08	1.408619e+07
5	1.4090931797e+14	-1.25e+04	7.07e-06	4.175675e+10	1.328057e+07
6	3.4308926808e+12	-4.01e+06	7.07e-07	6.249589e+11	1.908126e+06
7	6.3566061349e+11	-4.40e+05	7.07e-08	7.206599e+11	4.195584e+04
8	6.3565308662e+11	-1.18e+00	7.07e-09	7.208172e+11	3.888855e+04
9	6.3565308662e+11	-3.84e-10	7.07e-10	7.208172e+11	3.888850e+04

```
iter      chisq      delta/lim      lambda      a      b
After 9 iterations the fit converged.
final sum of squares of residuals : 6.35653e+11
rel. change during last iteration : -3.84078e-15

degrees of freedom      (FIT_NDF)      : 2
rms of residuals      (FIT_STDFIT) = sqrt(WSSR/ndf)      : 563761
variance of residuals (reduced chisquare) = WSSR/ndf      : 3.17827e+11

Final set of parameters      Asymptotic Standard Error
-----
a      = 7.20817e+11      +/- 3.232e+10      (4.484%)
b      = 38888.5      +/- 6.905e+05      (1775%)

correlation matrix of the fit parameters:
      a      b
a      1.000
b      -0.913  1.000
gnuplot> set samples 1000
gnuplot>
gnuplot> set xrange [2.5:35]
gnuplot> set xtics 2.5,2.5,35 format "%.1f"
gnuplot>
gnuplot> set yrange [0:3.0]
gnuplot> set ytics 0,0.5,3.0 format "%.1f"
gnuplot> plot 'primera medicion.txt' using ($1*1E6):($2*1E-7):($3*1E-7) w xyerrorbars title 'Voltaje al cuadrado en función del
or',f(x) title 'v^2=7.20817x10^{11}*t+3.88885x10^{4}'
```

Código utilizado para obtener la regresión y gráfica de la segunda medición.

```
gnuplot> set grid

gnuplot> set title 'Regresión lineal de los datos obtenidos a una presión de -20 inch de Hg'
gnuplot> set xlabel 'Grosor del papel aluminio (x10-6 m)'
gnuplot> set ylabel 'Voltaje al cuadrado (x107 V2)'

gnuplot> f(x)=a*x+b

gnuplot> fit f(x) 'segundamedicion.txt' using 1:2 via a,b

iter   chisq      delta/lim  lambda      a           b
  0  2.5820534907e+12  0.00e+00  1.09e+07  7.208172e+11  3.888850e+04
  1  1.4050798033e+11 -1.74e+06  1.09e+06  6.881043e+11  3.888437e+04
  2  1.0998858934e+11 -2.77e+04  1.09e+05  6.840205e+11  3.887761e+04
  3  1.0998311691e+11 -4.98e+00  1.09e+04  6.840401e+11  3.830148e+04
  4  1.0995286431e+11 -2.75e+01  1.09e+03  6.842991e+11  3.224017e+04
  5  1.0995252571e+11 -3.08e-01  1.09e+02  6.843295e+11  3.152834e+04
iter   chisq      delta/lim  lambda      a           b

After 5 iterations the fit converged.
final sum of squares of residuals : 1.09953e+11
rel. change during last iteration : -3.07953e-06

degrees of freedom (FIT_NDF) : 2
rms of residuals (FIT_STDFIT) = sqrt(WSSR/ndf) : 234470
variance of residuals (reduced chisquare) = WSSR/ndf : 5.49763e+10

Final set of parameters      Asymptotic Standard Error
=====
a          = 6.8433e+11      +/- 1.344e+10 (1.964%)
b          = 31528.3        +/- 2.872e+05 (910.8%)

correlation matrix of the fit parameters:
      a      b
a     1.000
b    -0.913  1.000

gnuplot> set samples 1000

gnuplot> set xrange [2.5:35]
gnuplot> set xtics 2.5,2.5,35 format "%.1f"

gnuplot> set yrange [0:3.0]
gnuplot> set ytics 0,0.5,3.0 format "%.1f"

gnuplot> plot 'segundamedicion.txt' using ($1*1E6):($2*1E-7):($3*1E6):($4*1E-7) w xyerrorbars title 'Voltaje al cuadrado en función del grosor', f(x) title 'V2=6.8433x1011*t+3.1528x104'
```

Código utilizado para obtener la regresión y gráfica de la tercera medición.

```

gnuplot> set grid
gnuplot>
gnuplot> set title 'Regresión lineal de los datos obtenidos a una presión de -15 inch de Hg
gnuplot>
gnuplot> set xlabel 'Grosor del papel aluminio (x10-6 m)'
gnuplot> set ylabel 'Voltaje al cuadrado (x107 V2)'
gnuplot>
gnuplot> f(x)=a*x+b
gnuplot> fit f(x) 'terceramedicion.txt' using 1:2 via a,b
iter   chisq      delta/lim  lambda  a          b
  0  8.3677724072e+14  0.00e+00  7.07e-01  1.000000e+00  1.000000e+00
  1  1.4910958169e+14 -4.61e+05  7.07e-02  6.426558e+02  1.172747e+07
  2  1.4051373230e+14 -6.12e+03  7.07e-03  4.196374e+04  1.319157e+07
  3  1.4051201347e+14 -1.22e+00  7.07e-04  4.171639e+06  1.319332e+07
  4  1.4034162669e+14 -1.21e+02  7.07e-05  4.168882e+08  1.318527e+07
  5  1.2474544452e+14 -1.25e+04  7.07e-06  3.932158e+10  1.242663e+07
  6  2.8343517018e+12 -4.30e+06  7.07e-07  5.885126e+11  1.717407e+06
  7  3.5563698514e+11 -6.97e+05  7.07e-08  6.786326e+11 -3.993204e+04
  8  3.5563031058e+11 -1.88e+00  7.07e-09  6.787807e+11 -4.282045e+04
  9  3.5563031058e+11 -3.60e-10  7.07e-10  6.787807e+11 -4.282050e+04
iter   chisq      delta/lim  lambda  a          b
After 9 iterations the fit converged.
final sum of squares of residuals : 3.5563e+11
rel. change during last iteration : -3.60413e-15

degrees of freedom    (FIT_NDF)                : 2
rms of residuals      (FIT_STDFIT) = sqrt(WSSR/ndf)    : 421681
variance of residuals (reduced chisquare) = WSSR/ndf   : 1.77815e+11

Final set of parameters          Asymptotic Standard Error
=====
a          = 6.78781e+11          +/- 2.418e+10   (3.562%)
b          = -42820.5            +/- 5.165e+05   (1206%)

correlation matrix of the fit parameters:
      a      b
a      1.000
b     -0.913  1.000
gnuplot> set samples 1000
gnuplot>
gnuplot> set xrange [2.5:35]
gnuplot> set xtics 2.5,2.5,35 format "%.1f"
gnuplot>
gnuplot> set yrange [0:3.0]
gnuplot> set ytics 0,0.5,3.0 format "%.1f"

gnuplot> plot 'terceramedicion.txt' using ($1*1E6):($2*1E-7):($3*1E6):($4*1E-7) w xyerrorbars title 'Voltaje
al cuadrado en función del grosor',f(x) title 'V2=6.78781x1011*t-4.28205x104'

```

Código utilizado para obtener la regresión y gráfica de la cuarta medición.

```

gnuplot> cd 'C:\Users\Lucio Villanueva\Desktop\Tesis Epsilon\Lucio'
gnuplot> reset
gnuplot> set grid
gnuplot>
gnuplot> set title 'Regresión lineal de los datos obtenidos a una presión de -10 inch de Hg
gnuplot>
gnuplot> set xlabel 'Grosor del papel aluminio (x10^{-6} m)'
gnuplot> set ylabel 'Voltaje al cuadrado (x10^{7} V^2)'
gnuplot>
gnuplot>
gnuplot> f(x)=a*x+b
gnuplot> fit f(x) 'cuartamedicion.txt' using 1:2 via a,b
iter      chisq      delta/lim  lambda  a          b
  0 2.7763132755e+11  0.00e+00  1.03e+07  6.787807e+11 -4.282050e+04
  1 2.7762529319e+11 -2.17e+00  1.03e+06  6.788316e+11 -4.281948e+04
  2 2.7761358894e+11 -4.22e+00  1.03e+05  6.788337e+11 -4.271880e+04
  3 2.7662655647e+11 -3.57e+02  1.03e+04  6.784482e+11 -3.369920e+04
  4 2.7264090211e+11 -1.46e+03  1.03e+03  6.753960e+11  3.772303e+04
  5 2.7261575294e+11 -9.23e+00  1.03e+02  6.751337e+11  4.385972e+04
  6 2.7261575292e+11 -6.81e-06  1.03e+01  6.751335e+11  4.386500e+04
iter      chisq      delta/lim  lambda  a          b
After 6 iterations the fit converged.
final sum of squares of residuals : 2.72616e+11
rel. change during last iteration : -6.81083e-11

degrees of freedom (FIT_NDF) : 2
rms of residuals (FIT_STDFIT) = sqrt(WSSR/ndf) : 369199
variance of residuals (reduced chisquare) = WSSR/ndf : 1.36308e+11

Final set of parameters          Asymptotic Standard Error
=====
a = 6.75134e+11 +/- 2.117e+10 (3.135%)
b = 43865 +/- 4.522e+05 (1031%)

correlation matrix of the fit parameters:
      a      b
a      1.000
b     -0.913  1.000
gnuplot> set samples 1000
gnuplot>
gnuplot> set xrange [2.5:35]
gnuplot> set xtics 2.5,2.5,35 format "%.1f"
gnuplot>
gnuplot> set yrange [0:3.0]
gnuplot> set ytics 0,0.5,3.0 format "%.1f"

gnuplot> plot 'cuartamedicion.txt' using ($1*1E6):($2*1E-7):($3*1E6):($4*1E-7) w xyerrorbars title 'Voltaje
al cuadrado en función del grosor',f(x) title 'V^2=6.75134x10^{11}*t+4.3865x10^{4}'

```

Código utilizado para obtener la regresión y gráfica de la quinta medición.

```

gnuplot> reset
gnuplot> set grid
gnuplot>
gnuplot> set title 'Regresión lineal de los datos obtenidos a una presión de -5 inch de Hg'
gnuplot>
gnuplot> set xlabel 'Grosor del papel aluminio (x10^{-6} m)'
gnuplot> set ylabel 'Voltaje al cuadrado (x10^{7} V^2)'
gnuplot> f(x)=a*x+b
gnuplot> fit f(x) 'quintamedicion.txt' using 1:2 via a,b
iter   chisq      delta/lim  lambda  a          b
  0  8.1162408811e+14  0.00e+00  7.07e-01  1.000000e+00  1.000000e+00
  1  1.4316654271e+14  -4.67e+05  7.07e-02  6.309002e+02  1.156251e+07
  2  1.3481082007e+14  -6.20e+03  7.07e-03  4.109815e+04  1.300601e+07
  3  1.3480917141e+14  -1.22e+00  7.07e-04  4.085393e+06  1.300774e+07
  4  1.3464575787e+14  -1.21e+02  7.07e-05  4.082683e+08  1.299986e+07
  5  1.1968786380e+14  -1.25e+04  7.07e-06  3.850854e+10  1.225690e+07
  6  2.7660946499e+12  -4.23e+06  7.07e-07  5.763441e+11  1.769108e+06
  7  3.8882361404e+11  -6.11e+05  7.07e-08  6.646007e+11  4.810474e+04
  8  3.8881721264e+11  -1.65e+00  7.07e-09  6.647458e+11  4.527605e+04
  9  3.8881721264e+11  -6.91e-10  7.07e-10  6.647458e+11  4.527600e+04
iter   chisq      delta/lim  lambda  a          b
After 9 iterations the fit converged.
final sum of squares of residuals : 3.88817e+11
rel. change during last iteration : -6.90696e-15

degrees of freedom (FIT_NDF) : 2
rms of residuals (FIT_STDFIT) = sqrt(WSSR/ndf) : 440918
variance of residuals (reduced chisquare) = WSSR/ndf : 1.94409e+11

Final set of parameters          Asymptotic Standard Error
=====
a = 6.64746e+11 +/- 2.528e+10 (3.803%)
b = 45276 +/- 5.4e+05 (1193%)

correlation matrix of the fit parameters:
      a      b
a      1.000
b     -0.913  1.000
gnuplot> set samples 1000
gnuplot>
gnuplot> set xrange [2.5:35]
gnuplot> set xtics 2.5,2.5,35 format "%.1f"
gnuplot>
gnuplot> set yrange [0:3.0]
gnuplot> set ytics 0,0.5,3.0 format "%.1f"
gnuplot> plot 'quintamedicion.txt' using ($1*1E6):($2*1E-7):($3*1E6):($4*1E-7) w xyerrorbars title 'Voltaje al
cuadrado en función del grosor ',f(x) title 'V^2=6.64746x10^{11}*t+4.5276x10^{4}'

```

Código utilizado para obtener la regresión y gráfica de la sexta medición.

```

gnuplot> reset
gnuplot> set title 'Regresión lineal de los datos obtenidos a una presión de -0 inch de Hg'
gnuplot>
gnuplot> set xlabel 'Grosor del papel aluminio (x10^{-6} m)'
gnuplot> set ylabel 'Voltaje al cuadrado (x10^{7} V^2)'
gnuplot>
gnuplot>
gnuplot> f(x)=a*x+b
gnuplot> fit f(x) 'sextamedicion.txt' using 1:2 via a,b
iter      chisq      delta/lim  lambda  a          b
  0 8.1034885889e+14  0.00e+00  7.07e-01  1.000000e+00  1.000000e+00
  1 1.4224132890e+14 -4.70e+05  7.07e-02  6.296515e+02  1.155948e+07
  2 1.3388998153e+14 -6.24e+03  7.07e-03  4.098000e+04  1.300261e+07
  3 1.3388834250e+14 -1.22e+00  7.07e-04  4.073366e+06  1.300433e+07
  4 1.3372588893e+14 -1.21e+02  7.07e-05  4.070674e+08  1.299647e+07
  5 1.1885586546e+14 -1.25e+04  7.07e-06  3.839526e+10  1.225570e+07
  6 2.6209566574e+12 -4.43e+06  7.07e-07  5.746488e+11  1.798762e+06
  7 2.5765096978e+11 -9.17e+05  7.07e-08  6.626457e+11  8.282092e+04
  8 2.5764460598e+11 -2.47e+00  7.07e-09  6.627904e+11  8.000055e+04
  9 2.5764460598e+11 -1.11e-09  7.07e-10  6.627904e+11  8.000050e+04
iter      chisq      delta/lim  lambda  a          b

After 9 iterations the fit converged.
final sum of squares of residuals : 2.57645e+11
rel. change during last iteration : -1.11341e-14

degrees of freedom (FIT_NDF) : 2
rms of residuals (FIT_STDFIT) = sqrt(WSSR/ndf) : 358918
variance of residuals (reduced chisquare) = WSSR/ndf : 1.28822e+11

Final set of parameters          Asymptotic Standard Error
=====
a          = 6.6279e+11          +/- 2.058e+10 (3.105%)
b          = 80000.5            +/- 4.396e+05 (549.5%)

correlation matrix of the fit parameters:
      a      b
a      1.000
b     -0.913 1.000
gnuplot> set samples 1000
gnuplot>
gnuplot> set xrange [2.5:35]
gnuplot> set xtics 2.5,2.5,35 format "%.1f"
gnuplot>
gnuplot> set yrange [0:3.0]
gnuplot> set ytics 0,0.5,3.0 format "%.1f"
gnuplot> plot 'sextamedicion.txt' using ($1*1E6):($2*1E-7):($3*1E6):($4*1E-7) w xerrorbars title 'Voltaje al
cuadrado en función del grosor ',f(x) title 'V^2=6.6279x10^{11}*t+8.0000x10^{4}'
|

```

Código utilizado para obtener gráfica de la relación entre constante dieléctrica y concentración de dióxido de carbono.

```

G N U P L O T
Version 5.2 patchlevel 8   last modified 2019-12-01

Copyright (C) 1986-1993, 1998, 2004, 2007-2019
Thomas Williams, Colin Kelley and many others

gnuplot home:      http://www.gnuplot.info
faq, bugs, etc:   type "help FAQ"
immediate help:   type "help" (plot window: hit 'h')

Terminal type is now 'wxt'
gnuplot> cd 'C:\Users\Lucio Villanueva\Desktop\Tesis Epsilon\Lucio'
gnuplot> reset

gnuplot> set grid

gnuplot> set title 'Relación entre constante dieléctrica y concentración de Dióxido de Carbono'

gnuplot> set xlabel 'Número de moléculas (x10^{22})'

gnuplot> set ylabel 'Constante dieléctrica'

gnuplot> f(x)=a*x+b

gnuplot> fit f(x) 'concentracionvrspermitividad.txt' using ($1*1E-22):2 via a,b

iter   chisq      delta/lim  lambda  a          b
  0  2.7708138000e+01  0.00e+00  1.75e+00  1.000000e+00  1.000000e+00
  1  2.8709013592e-01  -9.55e+06  1.75e-01  2.046016e-01  8.102596e-01
  2  8.6627607732e-04  -3.30e+07  1.75e-02  2.871012e-02  1.061061e+00
  3  7.9692621653e-04  -8.70e+03  1.75e-03  2.583471e-02  1.068051e+00
  4  7.9692621208e-04  -5.58e-04  1.75e-04  2.583400e-02  1.068053e+00
iter   chisq      delta/lim  lambda  a          b

After 4 iterations the fit converged.
final sum of squares of residuals : 0.000796926
rel. change during last iteration : -5.57608e-09

degrees of freedom    (FIT_NDF)          : 4
rms of residuals      (FIT_STDFIT) = sqrt(WSSR/ndf) : 0.0141149
variance of residuals (reduced chisquare) = WSSR/ndf : 0.000199232

Final set of parameters          Asymptotic Standard Error
=====
a          = 0.025834             +/- 0.005264    (20.38%)
b          = 1.06805             +/- 0.01193     (1.117%)

correlation matrix of the fit parameters:
          a          b
a          1.000
b         -0.876  1.000
gnuplot> set samples 1000

gnuplot> set xrange [0:4.2]

gnuplot> set yrange [0.5:2.2]

gnuplot> set xtics 2.5,2.5,3.5 format "%.1f"

gnuplot> set ytics 0,0.5,3.0 format "%.1f"

gnuplot> plot 'concentracionvrspermitividad.txt' using ($1*1E-22):2:($3*1E-22):4 w xyerrorbars
title 'Mediciones realizadas',f(x) title 'f(x)|-0.025834*N+1.0685'

```

6.3. Anexo 3. Imagenes del experimento



Figura 18: Montaje experimental.

6.4. Anexo 4. Código en Mathematica para resolver ecuación (25)

`Integrate[Integrate[Sin[θ]{Sin[θ]Cos[φ], Sin[θ]Sin[φ], Cos[θ]}(Cos[θ]Cos[θ1] + Sin[θ]Sin[θ1]Cos[φ - φ1])`

`, {θ, 0, π}], {φ, 0, 2 * π}]`

`{ $\frac{4}{3}\pi\text{Cos}[\phi 1]\text{Sin}[\theta 1]$, $\frac{4}{3}\pi\text{Sin}[\theta 1]\text{Sin}[\phi 1]$, $\frac{4}{3}\pi\text{Cos}[\theta 1]$ }`

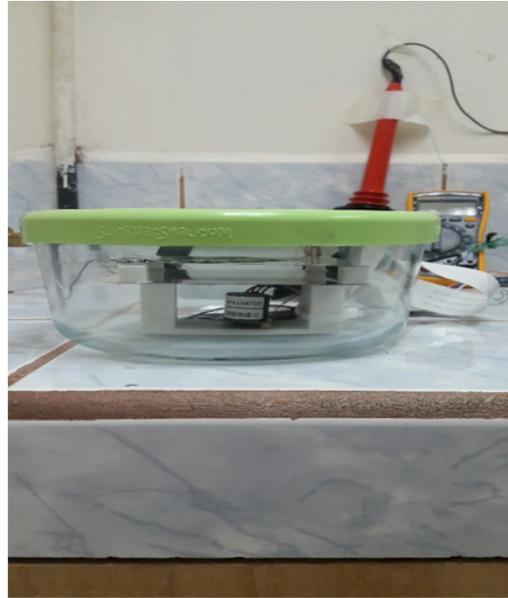


Figura 19: Dispositivos utilizados