

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE
HONDURAS
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA**

MAESTRÍA EN FÍSICA



**Determinación de los parámetros de un agujero negro de
Kerr con MOG en términos de los desplazamientos al rojo y
al azul**

**TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MASTER EN FÍSICA**

**PRESENTADA POR:
HERMES PAÚL BAUTISTA SOTO**

**ASESOR:
BRYAN OBED LARIOS, Ph.D.**

JUNIO DEL 2022

Esta tesis esta dedicada a mis padres

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a Dios quien es el guía mis pasos, a mis padres por siempre brindarme su apoyo y sus consejos en los momentos más difíciles y a mi asesor el Dr. Bryan Larios, ya que sin su apoyo este trabajo no hubiese llegado a su final.

Índice general

Agradecimientos	II
1 Introducción	1
2 Justificación y objetivo de investigación	4
§2.1 Justificación	4
§2.2 Objetivos Generales	5
§2.3 Objetivos específicos	5
3 Marco Teórico	6
§3.1 Relatividad General	6
§3.2 Simetrías y vectores de Killing	8
§3.3 La métrica	9
§3.4 Cálculo tensorial y la geometría Riemanniana	14
§3.4.1 Vectores y tensores	15
§3.4.2 Álgebra de vectores	17
§3.4.3 Subir y bajar índices	18
§3.5 Agujero negro de Schwarzschild	19
§3.6 Agujero negro de Kerr	23
§3.7 Gravedad Modificada	24
4 Cálculos	26

§4.1	Calculo para determinar los parámetros M y a de un agujero negro	26
§4.2	Geodésicas de fotones	39
§4.3	Geodésicas de partículas masivas en plano no ecuatorial	40
§4.4	Región Kerr MOG para un campo gravitacional fuerte	44
§4.5	Región para relatividad general en un campo gravitacional fuerte	44
§4.6	Análisis numérico	45
5	Conclusiones	50
6	Apéndice	51
	Bibliografía	83
	Índice de figuras	85

Capítulo 1

Introducción

Los agujeros negros son los objetos mas impresionantes y exóticos del universo, estos extraños y complejos cuerpos surgen al resolver las ecuaciones de campo de Einstein [1], y son de interés tanto para el público en general como para los científicos, pero ¿por qué son tan interesantes?, la respuesta es clara; el sueño de los físicos a lo largo del tiempo siempre ha sido unificar todas las interacciones de la naturaleza en una sola teoría del todo, esto ha sido intentado por las grandes mentes de la ciencia [2], y al parecer los agujeros negros son una de las principales razones que impulsan la búsqueda de esa unificación, ya que la teoría de la relatividad general no basta para explicar lo que ocurre en el interior del agujero negro, se debe aplicar la mecánica cuántica también [3].

El concepto de agujero negro no nace con la relatividad general de Einstein, la primera suposición de su existencia data del siglo XVIII, con las especulaciones de John Michell en el Reino Unido, y Pierre Simón de Laplace en Francia [2]. John Michell, un geólogo ingles se preguntaba de que tamaño tendría que ser una estrella con una cierta masa para que su velocidad de escape fuera tal que ni la luz pueda escapar, la velocidad de la luz es de 300,000 km/s [4].

Se sabe que todos los cuerpos, todos los cuerpos tienen una velocidad de escape, por ejemplo para escapar de la Tierra se debe lanzar un objeto a 11 km/s, de manera que en un agujero negro la gravedad es tal que ni la luz puede escapar [2].

Estos objetos que imagino John Michell y Laplace permanecieron como una simple curiosidad, no fue sino hasta el siglo XX cuando el joven Albert Einstein publicara su teoría general de la relatividad en 1915 [2]. La teoría general de la relatividad viene a reemplazar la teoría de la gravitación de Newton, según Newton el tiempo y el espacio son absolutos, y la gravedad es una fuerza que aparece instantáneamente, a pesar de que Newton logro una gran hazaña al unificar la mecánica celeste con la mecánica terrestre,

su teoría era incompleta [5]. El universo mecánico de Newton debía ser modificado, hubo que esperar mucho tiempo hasta que apareció Einstein y revolucionó nuestra forma de ver el universo. Según Einstein la gravedad no es una fuerza, sino el resultado del movimiento de un cuerpo que se mueve en un espacio-tiempo que ha sido curvado por la presencia de otro cuerpo. Einstein pudo llegar a esta idea gracias al principio de equivalencia, la teoría general de la relatividad es la teoría moderna de la gravitación [6].

Las soluciones de campo de Einstein son muy complejas, de hecho Einstein creía que nunca serían resueltas, pero unos meses después fueron encontradas las primeras soluciones exactas por el físico alemán Karl Schwarzschild en 1916 [7].

Las soluciones de Schwarzschild son para un objeto esférico y estático, y en el vacío lo que simplifica el problema, los agujeros negros de Schwarzschild fueron los primeros en conocerse.

Hubo que esperar hasta el año de 1963 cuando Roy Kerr, un físico neozelandés encontró una solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein. Un agujero negro de Kerr a diferencia de uno de Schwarzschild tiene rotación y los parámetros que lo caracterizan son su masa M y momento angular a [8].

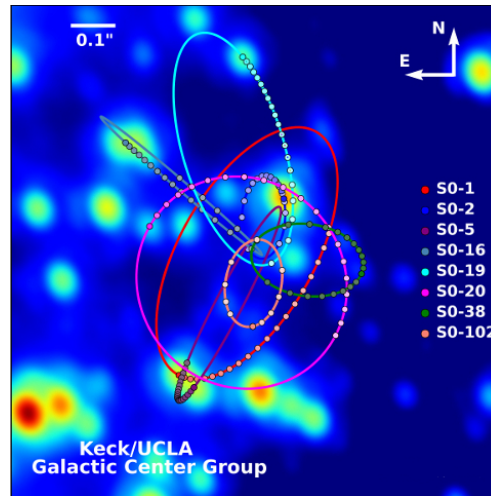


Figura 1.1: Órbitas de estrellas alrededor de Sgr A*

En los últimos 20 años se ha trabajado muy fuerte para poder caracterizar los parámetros de un agujero negro, investigaciones de la Nasa sugieren que hay un agujero negro supermasivo en el centro de nuestra galaxia, recientemente se pudo fotografiar uno de estos objetos por primera vez, pero aun con todos estos esfuerzos, calcular los parámetros de un agujero negro sigue siendo tarea muy difícil. En este trabajo de tesis vamos a brindar un método para calcular estos parámetros en términos de los desplazamientos al rojo y al azul tal como se explica en el capítulo 4, motivados por evidencias observacionales hechas recientemente [9], en la figura 1 podemos ver las orbitas de varias estrellas girando

en torno al agujero negro supermasivo Sagitario A* el cual está alojado en el centro de nuestra galaxia la Vía Láctea, existen datos experimentales sobre la órbita de la estrella SO-2 los cuales nos serán de mucha ayuda en este trabajo [8]. La idea de nuestro trabajo se enfoca en utilizar partículas geodésicas (estrellas) orbitando un agujero negro, estas estrellas emiten luz, la cual será detectada por instrumentos en la Tierra, pero debido al movimiento orbital de la estrella habrá un desplazamiento al rojo y al azul z_r y z_b respectivamente [9], los parámetros que caracterizan el agujero negro finalmente serán expresados en función de estos desplazamientos.

El orden de esta tesis es el siguiente: Capítulo 1: Introducción, capítulo 2: Justificación, capítulo 3: Marco teórico, capítulo 4: Cálculos, capítulo 5: Conclusiones y capítulo 6: Apéndice.

Capítulo 2

Justificación y objetivo de investigación

2.1. Justificación

En este trabajo de tesis se presenta un método para calcular los parámetros de un agujero negro de Kerr con gravedad modificada, la cual es una pequeña perturbación en la teoría General de la Relatividad de Einstein, el estudio de estos objetos astrofísicos es de suma importancia ya que en nuestro universo no existe algo mas incomprendido y que haga ver insuficiente a cualquier teoría científica, todo esfuerzo encaminado a su comprensión no puede ser menospreciado. Hemos escogido en este trabajo el agujero negro de Kerr ya que este tiene rotación y en el universo todos los objetos rotan, por tanto el parámetro a que caracteriza dicha rotación debe destacar en el estudio de los agujeros negros de Kerr, por otro lado está la masa M , la cual además de influir en la rotación es la cantidad que determina el ciclo de vida de las estrellas [10], su evolución y su final, de manera que investigar cuales son los parámetros de un agujero negro (a y M) no es una mera demostración de pericia matemática sino una entera necesidad por conocer estos objetos astrofísicos.

Nuestro esfuerzo por calcular estos parámetros es más ambicioso pero realista que trabajos realizados con anterioridad, ya que asumimos órbitas circulares fuera del plano ecuatorial. La idea central de nuestro trabajo se basa en que como no podemos detectar el agujero negro ya que la luz queda atrapada en el [11], debemos sacar ventaja de los cuerpos que lo orbitan (estrellas en este caso) y detectar la luz que emiten estas estrellas con desplazamientos al rojo y al azul z_r y z_b respectivamente, la detección de estos desplazamientos por instrumentos ubicados en la Tierra es crucial ya que con ellos vamos a calcular los parámetros a y M , el propósito es que las ecuaciones para a y M puedan expresarse en función de los desplazamientos al rojo y al azul y así ofrecer un método para tal fin.

2.2. Objetivos Generales

Los objetivos Generales de este trabajo de tesis son los siguientes:

1. Implementar la Relatividad General de Einstein para el estudio de un agujero negro caracterizado por su masa y momento angular.
2. Construir un modelo teórico que permita determinar los parámetros que definen un agujero negro en términos de posibles observables experimentales.
3. Utilizar los cálculos obtenidos para probar la teoría de la Relatividad General en el límite de campo gravitacional fuerte.

2.3. Objetivos específicos

1. Calcular las geodésicas de una estrella y de los fotones emitidos por esta alrededor de un agujero negro de Kerr con MOG.
2. Utilizar las geodésicas para calcular la masa M y el parámetro de rotación a en términos del corrimiento al rojo y al azul de los fotones emitidos por las partículas geodésicas.
3. Demostrar que los resultado obtenidos para los desplazamientos al rojo y al azul coinciden con los ya establecidos cuando estamos sobre el plano ecuatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$.
4. Realizar el análisis numérico mediante Wolfram Mathematica de los resultados ya que las expresiones para M y a no pueden ser resueltas analíticamente.

Capítulo 3

Marco Teórico

3.1. Relatividad General

La Relatividad General estudia la curvatura del espacio-tiempo, es la teoría moderna de la gravedad [5].

Comenzaremos haciendo una breve reseña histórica sobre la gravedad, desde sus inicios con Newton quien formula la gravedad como una fuerza descrita por una ley del cuadrado inverso [7].

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}. \quad (3.1)$$

Esta fuerza actúa sobre una partícula de masa m y le imparte una aceleración dada por la segunda ley del movimiento

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (3.2)$$

Es conveniente expresar este escenario en función de un potencial gravitacional Φ , y la densidad de masa ρ , es decir

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \quad (3.3)$$

Esta es la famosa ecuación de Poisson, y la aceleración viene dada en función del potencial gravitacional

$$\vec{a} = -\nabla\phi. \quad (3.4)$$

Este conjunto de cuatro ecuaciones gobiernan la gravedad, según Newton la gravedad es una fuerza

que aparece instantáneamente en presencia de una masa [12].

Las cosas parecen muy simples y elegantes, hasta ese entonces esto causo una gran revolución en el pensamiento científico, pero a inicios del siglo XX, Einstein propuso una nueva teoría de la gravedad [13], en esta nueva teoría se relacionaba la gravedad con la geometría, las cosas ya no son tan simples como antes, la ecuación de campo de Einstein toma la siguiente forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (3.5)$$

La expresión en el lado izquierdo es una medida de la curvatura del espacio-tiempo, mientras el lado derecho es una medida de la masa y la energía [7]. En el lado izquierdo tenemos el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ que se obtiene a partir de una contracción del tensor de Riemann, que refleja la geometría del espacio [12], también aparece el escalar de Ricci que es la traza del tensor de Ricci, y la métrica que es lo que se busca encontrar al resolver las ecuaciones de campo, en el lado derecho aparece el tensor de energía-momento, en el cual esta toda la información del contenido energético, estos objetos de la ecuación de campo están relacionados a través de la conexión el cual es un objeto no tensorial [13] que nos dice como cambia un vector de un espacio tangente a otro al realizar el transporte paralelo

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\mu}[\partial_{\mu}g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}]. \quad (3.6)$$

Esta conexión la construimos a partir de la métrica y es expresada en un objeto llamado símbolo de Christoffel, el uso fundamental de la conexión es tomar una derivada covariante ∇_{μ} la cual es

$$\nabla_{\mu}V^{\nu} = \partial_{\mu}V^{\nu} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\nu}V^{\sigma} \quad (3.7)$$

la cual es una generalización de una derivada parcial, la conexión aparece también en la definición de las geodésicas (una generalización de una línea recta)[14].

Una curva parametrizada $x^{\mu}(\lambda)$ es una geodésica si obedece

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu}\frac{dx^{\rho}}{d\lambda}\frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} = 0 \quad (3.8)$$

conocida como la ecuación de las geodésicas, las partículas libres se mueven a lo largo de geodésicas, cuando la curvatura es cero nos queda la ecuación de una línea recta, los dos tipos de geodésicas que vamos a considerar son [13]:

Geodésicas nulas Son trayectorias que siguen los rayos luminosos, la norma de sus vectores tangentes es nula [8], lo que equivale a decir que

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0 \quad (3.9)$$

Geodésicas temporales Son las trayectorias que siguen las partículas materiales [8], la norma de sus vectores tangentes es la unidad

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 1 \quad (3.10)$$

3.2. Simetrías y vectores de Killing

Ya sabemos que en la física las simetrías están relacionadas con leyes de conservación, es de suponer que hay una simetría oculta cuando la métrica no cambia de un punto a otro en el espacio, si te mueves de un lado a otro y la métrica no cambia, existe una simetría [15].

Existe una manera de descifrar las simetrías y es a través de los vectores de Killing [13]. Un *vector de Killing* x satisface la *ecuación de Killing*, la cual en términos de la derivada covariante es $\nabla_b x_a + \nabla_a x_b = 0$. Esta ecuación también se cumple para componentes contravariantes $\nabla_b x^a + \nabla_a x^b = 0$. Los vectores de Killing se relacionan con las simetrías de la siguiente forma: Si x es un vector de campo y un conjunto de puntos se desplaza por $x^a dx_a$, y toda la distancia se relaciona de la misma forma, entonces x es un vector de Killing. En resumen, si nos movemos a lo largo de un vector de Killing la métrica no cambia, esto deja una cantidad conservada, si una partícula se mueve en la dirección en la cual una métrica no cambia, no experimenta fuerzas, esto lleva a la conservación del momento.

Si x es un vector de Killing [12], entonces

$$x \cdot u = \text{constante} \quad (3.11)$$

$$x \cdot p = \text{constante} \quad (3.12)$$

a lo largo de una geodésica, donde u es la cuatriveLOCIDAD, y p es el cuatrimomento de la partícula [16].

3.3. La métrica

El tensor métrico es un objeto muy importante ya que en él está codificada toda la información del espacio-tiempo, a este le asignamos el símbolo $g_{\mu\nu}$ mientras que el símbolo $\eta_{\mu\nu}$ lo utilizamos para la métrica de Minkowski, el tensor métrico es un tensor simétrico de segundo rango. [7]

La distancia entre dos puntos P_1 y P_2 en un espacio euclídeo de tres dimensiones la podemos definir mediante aplicación del teorema de Pitágoras [17]. Si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \quad (3.13)$$

Esta noción la podemos extender a un espacio de cuatro dimensiones, como el resultado en la relatividad especial, si nombramos dos eventos de la siguiente manera (t_1, x_1, y_1, z_1) y (t_2, x_2, y_2, z_2) podemos definir la distancia entre dos eventos como

$$(\Delta S)^2 = (t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2. \quad (3.14)$$

Si la distancia entre dos eventos es infinitesimal debemos tener un evento dado por las coordenadas (t, x, y, z) , entonces el segundo evento debe estar dado como $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$, así podemos notar que la diferencia entre cada término es (dt, dx, dy, dz) , de modo que podemos escribir el elemento de línea como [18]

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (3.15)$$

Como podemos notar, en el elemento de línea está descrita la geometría del espacio [7]. De alguna manera estamos familiarizados con ds^2 en los cursos de cálculo se le conoce como elemento de línea, generalmente el elemento de línea es escrito como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.16)$$

Donde $g_{\mu\nu}$ son las componentes de un tensor de segundo rango, esto también se puede escribir como una matriz, llamada la métrica [17], las componentes de la matriz son los coeficientes que multiplican los diferenciales en el elemento de línea.

En un espacio euclídeo de tres dimensiones la métrica es

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Por ejemplo en tres dimensiones

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (3.18)$$

La métrica quedará de la siguiente manera

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Cuando trabajamos en el espacio de 4-dimensiones de la relatividad usamos las coordenadas generalizadas (x^0, x^1, x^2, x^3) donde $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ de esta manera las componentes de la métrica son

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

El factor $g_{\mu\nu}$ el cual esta especificado completamente en un espacio de 4 dimensiones por 16 componentes, es mejor conocido como el *tensor métrico* [13], la distancia ds^2 sobre la cual esta definido el tensor métrico es conocida como el elemento de línea [19] y más frecuentemente como la métrica, la métrica es todo lo que necesitamos ver para saber si el espacio tiempo en el que estamos trabajando es un espacio-tiempo plano propio de la teoría especial de la relatividad o un espacio-tiempo curvo propio de la relatividad general [2].

Por ejemplo

La métrica euclidiana en coordenadas polares

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad (3.21)$$

en coordenadas polares (r, θ) las relaciones entre coordenadas son:

$$x = r \operatorname{sen} \theta \quad (3.22)$$

$$y = r \cos \theta \quad (3.23)$$

$$\begin{cases} dx = (r \cos \theta) d\theta + (\operatorname{sen} \theta) dr \\ dy = (-r \operatorname{sen} \theta) d\theta + (\cos \theta) dr \end{cases} \quad (3.24)$$

entonces

$$ds^2 = [(r \cos \theta) d\theta + (\operatorname{sen} \theta) dr]^2 + [(-r \operatorname{sen} \theta) d\theta + (\cos \theta) dr]^2 \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} ds^2 = & r^2 \cos^2 \theta d\theta^2 + 2r \operatorname{sen} \theta \cos \theta dr d\theta + \operatorname{sen}^2 \theta dr^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\theta^2 - 2r \operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta dr \\ & + \cos^2 \theta dr^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$ds^2 = (\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta) dr^2 + r^2 (\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta^2 \quad (3.27)$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (3.28)$$

Y es así como tenemos la métrica en coordenadas polares

$$\boxed{ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2} \quad (3.29)$$

El elemento de línea puede ser escrito como:

$$ds^2 = 1(dr)(dr) + 0 \cdot (dr)(d\theta) + 0 \cdot (d\theta)(dr) + r^2 \cdot (d\theta)(d\theta) \quad (3.30)$$

$$ds^2 = g_{rr}(dr)(dr) + g_{r\theta}(dr)(d\theta) + g_{\theta r}(d\theta)(dr) + g_{\theta\theta}(d\theta)(d\theta) \quad (3.31)$$

La representación matricial de la métrica es la siguiente:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{rr} & g_{r\theta} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

La métrica euclidiana en coordenadas esféricas

El elemento de línea es:

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad (3.34)$$

Las coordenadas esféricas son (r, θ, φ) y la relación entre las coordenadas son

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \\ y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (3.35)$$

De manera que:

$$dx = \operatorname{sen} \theta \cos \varphi dr + r \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi d\varphi, \quad (3.36)$$

$$dy = \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi dr + r \cos \theta \operatorname{sen} \varphi d\theta + r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi d\varphi, \quad (3.37)$$

$$dz = \cos \theta dr - r \operatorname{sen} \theta d\theta. \quad (3.38)$$

Sustituyendo en el elemento de línea

$$\begin{aligned} ds^2 = & (\operatorname{sen} \theta \cos \varphi dr + r \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi d\varphi)^2 \\ & + (\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi dr + r \cos \theta \operatorname{sen} \varphi d\theta + r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi d\varphi)^2 \\ & + (\cos \theta dr - r \operatorname{sen} \theta d\theta)^2 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Después de simplificar el elemento de línea se reduce a:

$$\boxed{ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2} \quad (3.40)$$

Podemos escribir el elemento de línea en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & 1 \cdot (dr)(dr) + 0 \cdot (dr)(d\theta) + 0 \cdot (dr)(d\varphi) \\
 & + 0 \cdot (d\theta)(dr) + r^2 \cdot (d\theta)(d\theta) + 0 \cdot (d\theta)(d\varphi) \\
 & + 0 \cdot (d\varphi)(dr) + 0 \cdot (d\varphi)(d\theta) + r^2 \sin^2 \theta (d\varphi)(d\varphi)
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & g_{rr} dr^2 + g_{r\theta} dr d\theta + g_{r\varphi} dr d\varphi + g_{\theta r} d\theta dr \\
 & + g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\theta\varphi} d\theta d\varphi + g_{\varphi r} d\varphi dr + g_{\varphi\theta} d\varphi d\theta + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

De esta forma la representación matricial de la métrica es:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{rr} & g_{r\theta} & g_{r\varphi} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta\varphi} \\ g_{\varphi r} & g_{\varphi\theta} & g_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

La métrica euclidiana sobre la superficie de una esfera de radio r

Si tomamos la métrica del ejemplo anterior y bajo la condición que $r=\text{constante}$, de esta forma $dr = 0$ y el elemento de línea queda como:

$$ds^2 = \cancel{dr^2}^0 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \tag{3.45}$$

$$\boxed{ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2} \tag{3.46}$$

De esta manera el elemento de línea se convierte en:

$$ds^2 = r^2 \cdot d\theta^2 + 0 \cdot d\theta d\varphi + 0 \cdot d\varphi d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \tag{3.47}$$

$$ds^2 = g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\theta\varphi} d\theta d\varphi + g_{\varphi\theta} d\varphi d\theta + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2 \tag{3.48}$$

Y así la representación matricial

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{\theta\theta} & g_{\theta\varphi} \\ g_{\varphi\theta} & g_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

3.4. Cálculo tensorial y la geometría Riemanniana

La nueva idea fundamental introducida por Einstein en la teoría general de la Relatividad es que en la presencia de un campo gravitacional [19]

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (3.51)$$

No es un invariante, existe un invariante el cual es una expresión cuadrática homogénea en las 4 coordenadas diferenciales, escribimos esto como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.52)$$

Es importante notar que los índices repetidos se pueden cambiar arbitrariamente,

$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ o $A^\alpha B_\alpha = A^\sigma B_\sigma$. Los coeficientes $g_{\mu\nu}$ son llamados componentes del tensor métrico y representan al campo gravitacional [12].

En un espacio n -dimensional, x^α ($\alpha = 1, 2, \dots, n$) representa un sistema de coordenadas. Podemos transformarlo a otro sistema de coordenadas x'^α donde tenemos la relación de la forma

$$x'^\mu = f^\mu(x^\alpha) \quad (3.53)$$

La condición que $x'^{\mu'}$ son independientes implica que el Jacobiano de la transformación no desaparece [19]

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x'^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x'^n}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x'^n}{\partial x^n} \end{vmatrix} \quad (3.54)$$

Las coordenadas diferenciales se transforman de la siguiente manera:

$$dx^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} dx'^\beta \quad (3.55)$$

3.4.1. Vectores y tensores

Comenzamos discutiendo las propiedades de transformación de algunas entidades física comunes [19]. Los objetos más simples son escalares, los cuales no sufren cambio ante una transformación de coordenadas [12]. Los ejemplos más comunes son la masa de un cuerpo, volumen, temperatura y presión. La magnitud de la velocidad es también una cantidad escalar, pero si tomamos en cuenta la dirección de la velocidad, entonces la velocidad se define por tres componentes $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dz}{dt}$. Después de una transformación a otro sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, las nuevas componentes de velocidad son:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \quad (3.56)$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \quad (3.57)$$

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \quad (3.58)$$

Que también se pueden escribir usando el convenio de suma

$$\frac{d\bar{x}^i}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \cdot \frac{dx^k}{dt} \quad (3.59)$$

lo cual es equivalente a:

$$v^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \cdot v'^k \quad (3.60)$$

Ahora vamos a considerar el gradiente de un escalar ϕ [12]. Esto tiene 3 componentes y la relación de transformación es:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^i} = \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \quad (3.61)$$

Para transformar de un sistema de coordenadas rectangular a otro $\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}$. Si consideramos una

transformación a un sistema de coordenadas polares esférica, hacemos

$$v^r = \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial r}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \quad (3.62)$$

$$v^\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \quad (3.63)$$

$$v^\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \quad (3.64)$$

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy + \frac{\partial r}{\partial z} dz \quad (3.65)$$

y

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} \quad (3.66)$$

Podemos notar que

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)_{y,z} \neq \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)_{\theta,\varphi}, \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{y,z} / \neq \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)_{r,\varphi} \quad (3.67)$$

Para distinguir entre estos 2 tipos de objetos, introducimos las siguientes definiciones, considerando un espacio de n -dimensiones:

a) Un conjunto de n cantidades A^α ($\alpha = 1, 2, 3, \dots, n$) los cuales se transforman de la siguiente manera

$$\bar{A}_\beta = \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\alpha} A^\alpha. \quad (3.68)$$

Constituyen un vector contravariante[19]

b) Un conjunto de n cantidades A_α ($\alpha = 1, 2, 3, \dots, n$) las cuales se transforman como el gradiente de un escalar se dice que constituye un vector covariante [19]

$$\bar{A}_\beta = A_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\beta} \quad (3.69)$$

Por ejemplo, la ecuación de movimiento

$$m\ddot{r} = -\nabla V \quad (3.70)$$

de la mecánica clásica es valida en coordenadas cartesianas rectangulares, pero no en general [19], la razón es que el lado izquierdo es un vector contravariante y el lado derecho es un vector covariante. sin embargo en la ecuación de Lagrange ambos términos son vectores covariantes en el espacio q []

$$\frac{d}{dL} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (3.71)$$

3.4.2. Álgebra de vectores

La suma de dos vectores A^α y B^β son definidos como C^γ donde

$$C^\gamma = A^\gamma + B^\gamma \quad (3.72)$$

y C^γ es un vector. De igual forma D^γ es la diferencia de dos vectores, lo cual se define como:

$$D^\gamma = A^\gamma - B^\gamma \quad (3.73)$$

Un producto de las componentes de 2 vectores debe producir n^2 elementos

Donde δ_σ^μ se llama la delta de Kronecker. Donde $g^{\mu\nu}$ se puede definir de manera alternativa como la menor $g_{\mu\nu}$ dividido por el determinante $\|g_{\mu\nu}\|$.

Vamos a mostrar que las cantidades $g^{\mu\nu}$ se transforman como un tensor contravariante de rango 2[17].

$$g'_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu} = g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\beta} g^{\mu\nu} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu} \quad (3.74)$$

$$= g_{\rho\sigma} g^{\mu\nu} \delta_\mu^\rho \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu} \quad (3.75)$$

$$= g_{\mu\sigma} g^{\mu\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu} \quad (3.76)$$

$$= \delta_\beta^\lambda \quad (3.77)$$

Ahora contrayendo esto con $g'^{\beta\sigma}$ tenemos:

$$g'_{\alpha\beta} g'^{\beta\sigma} g^{\mu\nu} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu} = \delta_\beta^\lambda g'^{\beta\sigma} \quad (3.78)$$

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu} = g'^{\lambda\sigma} \quad (3.79)$$

El tensor métrico y su recíproco son usados para subir y bajar los índices de vectores y tensores.

De manera que

$$A^\alpha B^\alpha = A'^\mu \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \quad (3.80)$$

$$B'^\nu \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} = A'^\mu B'^\mu \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \quad (3.81)$$

Donde hemos escrito $A^\alpha B^\alpha = C^{\alpha\beta}$

$$C^{\alpha\beta} = C'^{\mu\nu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \quad (3.82)$$

3.4.3. Subir y bajar índices

Sabemos que $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ es un invariante que determina la información $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g'_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta \quad (3.83)$$

$$g_{\mu\nu} = g'_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \quad (3.84)$$

De manera que es claro que $g_{\mu\nu}$ es un tensor covariante de rango 2 [7]. Su recíproco es definido por $g^{\mu\nu}$ donde $\square$

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\sigma \quad (3.85)$$

donde

$$\delta^\mu_\sigma = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu \neq \sigma \\ 1 & \text{si } \mu = \sigma \end{cases} \quad (3.86)$$

Por tanto, definimos que A^α y A_α representan el mismo vector en forma covariante y contravariante si

$$A^\alpha = g^{\alpha\beta} A_\beta \quad \text{o} \quad A_\beta = g_{\alpha\beta} A^\alpha \quad (3.87)$$

3.5. Agujero negro de Schwarzschild

Las ecuaciones de campo de la relatividad general postuladas por Einstein y Hilbert a fines de 1915 son ecuaciones muy complejas. Aún así, la primera solución exacta de dichas ecuaciones fue encontrada unos meses después por Karl Schwarzschild en 1916 [2].

Schwarzschild consideró el campo gravitacional externo a un objeto esférico y estático. Dado que se buscaba el campo externo al objeto, la solución de Schwarzschild corresponde a una solución en el vacío, en la cual $T_{\mu\nu} = 0$, lo que simplifica considerablemente el problema. La suposición de simetría esférica así como buscar una solución estática, lo simplifican aún más. [7]

En relatividad general la única solución de vacío esféricamente simétrica es la métrica de Schwarzschild, esta métrica solo es superada por el espacio de Minkowski en la lista de espacio-tiempo importantes.

En coordenadas esféricas $\{t, r, \theta, \varphi\}$, la métrica es [7]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.88)$$

donde M es la masa del objeto, y $d\Omega^2$ es el llamado "elemento del ángulo sólido", que mide distancias sobre la superficie de una esfera (2 esfera) [13]

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (3.89)$$

Esta forma de intervalo encontrada por Schwarzschild representa el campo gravitacional externo a cualquier objeto esférico y estático, y como tal es una excelente aproximación al campo gravitacional de la Tierra, el Sol y las estrellas [12].

Ya que estamos interesados en la solución fuera del cuerpo esférico, consideramos la ecuación de Einstein en el vacío

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (3.90)$$

Para poder derivar la métrica usamos un método de prueba y error. El hecho que la solución sea estática requiere dos condiciones:

1. Que todas las componentes de la métrica sean independientes del tiempo, y
2. Que no existan terminos cruzados de espacio-tiempo ($dt dx^i + dx^i dt$) en la métrica

Comenzamos escribiendo la métrica en el espacio de Minkowski en coordenadas polares

$$x^\mu = (t, r, \theta, \varphi)$$

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.91)$$

Escribimos los coeficientes de la métrica en terminos de exponenciales

$$ds^2 = -e^{-2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + e^{2\gamma(r)} r^2 d\Omega^2 \quad (3.92)$$

Para poder simplificar el cálculo hacemos una simplificación introduciendo una nueva coordenada

$$\bar{r} = e^{\gamma(r)} r \quad (3.93)$$

de manera que

$$d\bar{r} = e^\gamma dr + e^\gamma r d\gamma = \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right) e^\gamma dr \quad (3.94)$$

de modo que en función de esta nueva variable la métrica es

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2 \quad (3.95)$$

hacemos una nueva suposición

$$\begin{aligned} \bar{r} &\rightarrow r \\ \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} &\rightarrow e^{2\beta} \end{aligned} \quad (3.96)$$

introduciendo esto en la métrica

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.97)$$

Ahora usaremos la ecuación de Einstein con esta métrica para encontrar las funciones $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ [13].

Usamos los simbolos de Christoffel de modo que

$$\begin{aligned}\Gamma_{tr}^t &= \partial_r \alpha & \Gamma_{tt}^r &= e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha & \Gamma_{rr}^r &= \partial_r \beta \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r e^{-2\beta} & \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -r e^{-2\beta} \sin^2 \theta & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\end{aligned}$$

Todo lo que no este escrito explicitamente debe ser cero, a partir de esto obtenemos las componentes del tensor de Riemann

$$R_{tr}^t = \partial_r \alpha \partial_r \beta - \partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 \quad (3.98)$$

$$R_{\theta t}^t = -r e^{-2\beta} \partial_r \alpha \quad (3.99)$$

$$R_{\varphi t}^t = -r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \alpha \quad (3.100)$$

$$R_{\theta r}^r = r e^{-2\beta} \partial_r \beta \quad (3.101)$$

$$R_{\varphi r}^r = r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \beta \quad (3.102)$$

$$R_{\varphi\theta}^\theta = (1 - e^{-2\beta}) \sin^2 \theta \quad (3.103)$$

al realizar la contracción obtenemos el tensor de Ricci

$$R_{tt} = e^{2(\alpha-\beta)} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right] \quad (3.104)$$

$$R_{rr} = -\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta \quad (3.105)$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-2\beta} [r(\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - r] + 1 \quad (3.106)$$

$$R_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta} \quad (3.107)$$

el escalar de Ricci es

$$R = -2e^{-2\beta} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} (\partial_r \alpha - \partial_r \beta) + \frac{1}{r^2} (1 - e^{2\beta}) \right] \quad (3.108)$$

esto se convierte en

$$0 = e^{2(\beta-\alpha)} R_{tt} + R_{rr} = \frac{2}{r} (\partial_r \alpha + \partial_r \beta) \quad (3.109)$$

Esto implica que $\alpha = -\beta + c$, donde c es una constante. Esta constante la hacemos cero y $t \rightarrow e^{-c}t$, después de esto

$$\alpha = -\beta \quad (3.110)$$

Como $R_{\theta\theta} = 0$, lo cual resulta en

$$e^{2\alpha} (2r \partial_r \alpha + r) = 1 \quad (3.111)$$

Esto es equivalente a

$$\partial_r (r e^{2\alpha}) = 1 \quad (3.112)$$

Al resolver esto obtenemos

$$e^{2\alpha} = 1 - \frac{R_s}{r} \quad (3.113)$$

Donde R_s es una constante indeterminada, nuestra métrica se vuelve

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.114)$$

solo queda interpretar la constante R_s [12], llamada la constante de Schwarzschild (radio). Como ya sabemos

$$g_{tt} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \quad (3.115)$$

Para campo débil $r \gg 2GM$, de modo que $R_s = 2GM$. Lejos de la fuente la geometría es la de Minkowski, pues el campo gravitacional se hace muy débil [2], el intervalo se vuelve singular en $r = 0$ y $r = 2GM$. El radio $R_s = 2GM$ se conoce como *radio de Schwarzschild*. Como la solución de Schwarzschild es solo válida en el exterior del objeto, las singularidades en $r = 0$ y $r = 2GM$ no tienen importancia en esos casos [13]. Si por otro lado, queremos considerar la solución de Schwarzschild como asociada a una partícula puntual, entonces debemos considerar las singularidades en $r = 0$ y $r = R_s$. Al radio de Schwarzschild se le conoce también como el "horizonte de eventos".

Esto se debe a que es posible demostrar que para radios mayores siempre existen trayectorias nulas, es decir asociadas a rayos de luz, que pueden escapar hasta el infinito. Pero para radios menores todas las trayectorias nulas caen hacia el centro.

3.6. Agujero negro de Kerr

El agujero negro asociado a la solución de Schwarzschild corresponde al caso de simetría esférica, y como tal es la solución que uno no espera encontrar en la naturaleza. Los objetos astrofísicos reales tienen momento angular, por lo que no son completamente esféricos [2].

La primera solución para un agujero negro más general que la de Schwarzschild fue la asociada a un agujero negro esférico pero con carga eléctrica, encontrada poco después de la de Schwarzschild, y conocida como la solución de Reissner-Nordstrom [7]. La solución para un agujero negro con rotación fue encontrada por Kerr en 1963 [13]. La métrica de Kerr tiene la siguiente forma:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GMr}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{2GMa r \sin^2 \theta}{\rho^2} (dt d\varphi + d\varphi dt) + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta] d\varphi^2 \quad (3.116)$$

donde

$$\Delta(r) = r^2 - 2GMr + a^2 \quad (3.117)$$

y

$$|\rho^2(r, \theta)| = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (3.118)$$

Donde M es la masa del agujero, y a es el parámetro de rotación que está relacionado con el momento angular J del agujero negro de la forma[9]

$$a = J/M \quad (3.119)$$

La solución de Kerr resulta considerablemente más compleja que la de Schwarzschild, y tiene algunas propiedades muy interesantes. En particular, para $a > M$ el horizonte de eventos desaparece y la solución corresponde a lo que se conoce como "singularidad desnuda"[9], es decir, una singularidad que no está protegida por un horizonte de eventos. De la métrica de Kerr también podemos observar que existe una región externa al horizonte de eventos de donde es posible escapar, pero no está permitido permanecer en reposo, a dicha región se le conoce como ergósfera [20].

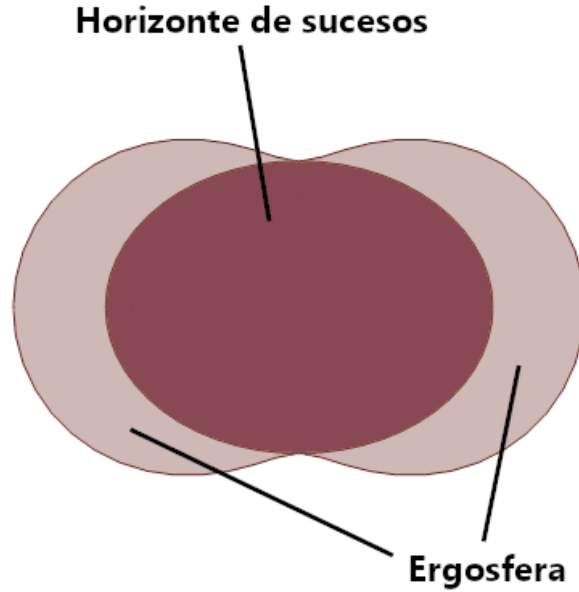


Figura 3.1: Ergósfera entorno al horizonte de sucesos.

3.7. Gravedad Modificada

La gravedad modificada satisface unas ecuaciones de campo que son más generales que las de Einstein, estas incluyen campos escalares y vectoriales y se promueve la constante gravitacional de Newton a un campo escalar en lugar de una constante, MOG no es empleado en este trabajo como una alternativa a la materia oscura, la importancia del parámetro α es que altera las órbitas de las estrellas, cuando $\alpha = 0$ recuperamos la métrica de Kerr. La ecuación escalar para MOG tiene una solución estática y esféricamente simétrica para agujero negros determinada por la masa M con dos horizontes, la constante gravitacional es $G = G_N(1 + \alpha)$ donde α es un parámetro [21].

Además de la masa m , nosotros incluimos en nuestra solución el espín $J = Ma$.

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2}(dt - a \sin^2 \theta d\varphi) - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2}[(r^2 + a^2)d\varphi - a dt]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \quad (3.120)$$

donde

$$\Delta = r^2 - 2GM_r + a^2 + \alpha G_N GM^2 \quad (3.121)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (3.122)$$

La geometría del espacio-tiempo es axialmente simétrica alrededor del eje z . Los horizontes son determinados por las raíces de $\Delta = 0$ [21]

$$r_{\pm} = G_N(1 + \alpha)M \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{a^2}{G_N^2(1 + \alpha)^2 M^2} - \frac{\alpha}{1 + \alpha}} \right], \quad (3.123)$$

y el horizonte de la ergosfera es determinado por $g_{00} = 0$

$$r_E = G_N(1 + \alpha)M \left[1 + \sqrt{1 - \frac{a^2 \cos^2 \theta}{G_N^2(1 + \alpha)^2 M^2} - \frac{\alpha}{1 + \alpha}} \right]. \quad (3.124)$$

La gravedad modificada esta basada en un principio de acción, y toma la siguiente forma [22]:

$$S = S_{\text{Grav}} + S_{\phi} + S_S + S_M, \quad (3.125)$$

donde

$$S_{\text{Grav}} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{G} (R + 2\Lambda) \right], \quad (3.126)$$

$$S_{\phi} = - \int d^4x \sqrt{-g} \left[\omega \left(\frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} + V(\phi) \right) \right], \quad (3.127)$$

y

$$\begin{aligned} S_S = & \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{G^3} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} G \nabla_{\nu} G - V(G) \right) \right. \\ & + \frac{1}{G} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \omega \nabla_{\nu} \omega - V(\omega) \right) \\ & \left. + \frac{1}{\mu^2 G} + \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \mu \nabla_{\nu} \mu - V(\mu) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.128)$$

Capítulo 4

Cálculos

4.1. Calculo para determinar los parámetros M y a de un agujero negro

Para dar inicio a nuestros cálculos, tomamos la métrica de Kerr y le agregamos un parámetro de deformación adimensional α , el cual introduce una pequeña perturbación en las soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein osea a la metrica de Kerr [21], esto permite el estudio de gravedad modificada. Las componentes del tensor métrico con gravedad modificada (MOG) son las siguientes:

$$g_{tt} = - \left[\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right], \quad (4.1)$$

$$g_{rr} = \frac{\Sigma}{\Delta}, \quad (4.2)$$

$$g_{t\varphi} = - 2 \left(\frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\Sigma} \right) a \sin^2 \theta, \quad (4.3)$$

$$g_{\theta\theta} = \Sigma, \quad (4.4)$$

$$g_{\varphi\varphi} = \left[\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] \sin^2 \theta. \quad (4.5)$$

En estas componentes está codificada toda la información del espacio tiempo que necesitamos conocer, las cuales a diferencia de la métrica de Schwarzschild incluyen la rotación del cuerpo, el cual aparece reflejado en el parámetro a que se define como $a = \frac{J}{M}$ y representa el espín ó momento angular del agujero negro de Kerr, con la pequeña modificación que es el parámetro de deformación α que está implícito en ellas [21].

Las componentes del tensor métrico están en función de las siguiente cantidades:

$$\Delta = r^2 - 2GMr + a^2 + \underbrace{\alpha M^2 G G_N}_{M_\beta}, \quad (4.6)$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (4.7)$$

$$G = G_N(1 + \alpha), \quad (4.8)$$

$$\alpha = \frac{G - G_N}{G_N} \quad \text{parámetro de deformación.} \quad (4.9)$$

Donde G_N es la constante gravitacional de Newton y M es la masa del agujero negro [23], el siguiente gráfico g_{tt} vs r muestra como cambia g_{tt} al variar el parámetro de deformación α , el caso especial ocurre cuando $\alpha = 0$ ya que recuperamos la relatividad general.

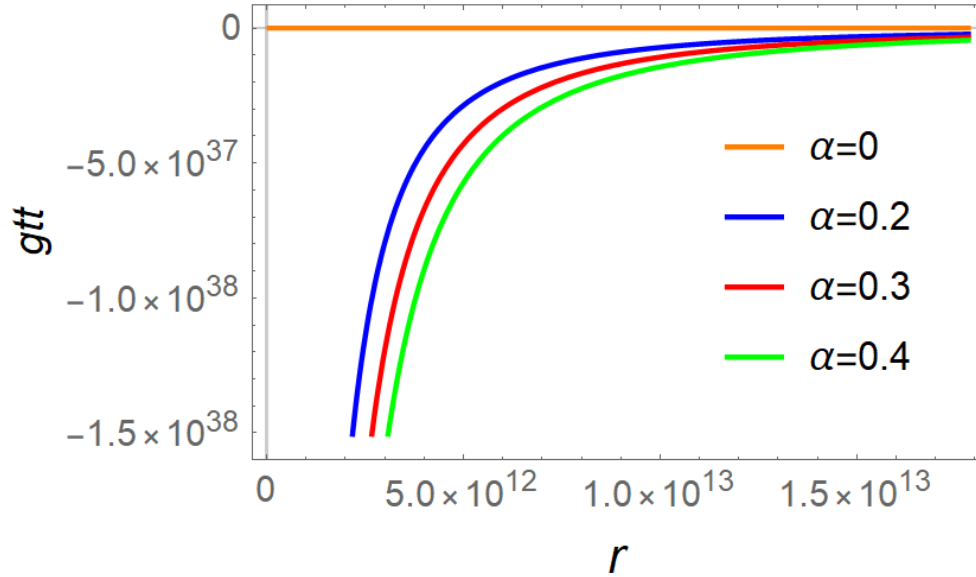


Figura 4.1: Variación de g_{tt} para diferentes valores de α .

En la figura 4.1 se muestra como varia g_{tt} con respecto a α , la curva color naranja es el caso cuando estamos trabajando sin gravedad modificada ($\alpha = 0$) y las curvas color azul, rojo y verde son casos con gravedad modificada, podemos notar lo altamente sensible que es g_{tt} a los valores de α los cuales son muy pequeños oscilando entre cero y 10, por ejemplo para la curva azul $\alpha = 0.2$, para la curva roja $\alpha = 0.3$ y para la verde $\alpha = 0.4$.

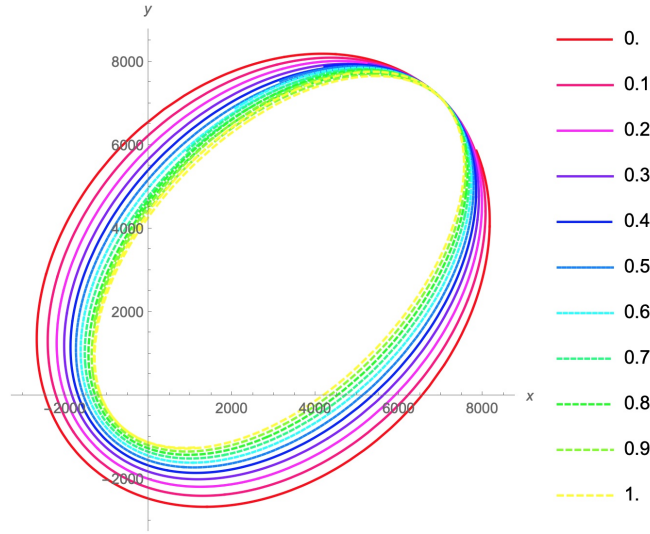


Figura 4.2: El gráfico nos muestra la variación de las orbitas para diferentes valores de α , imagen cortesía de Bryan Larios.

El parámetro de deformación α tiene un efecto sobre el tamaño de las orbitas, como podemos apreciar cuando el valor de α incrementa la órbita reduce su tamaño, por ejemplo para un $\alpha = 1$ tenemos la órbita más pequeña de todas.

Las geodésicas para partículas masivas (estrellas) son las siguientes:

$$\Sigma^2(U^r)^2 = T^2 - \Delta[r^2 + (L - aE)^2 + k] = V^2(r) \quad (4.10)$$

$$T = E(r^2 + a^2) - La \quad (4.11)$$

$$V(r) = [E(r^2 + a^2) - La]^2 - (r^2 - 2GMr + a^2 + M_\beta) * [r^2 + (L - aE)^2 + k] \quad (4.12)$$

hacemos $x = L - aE$ (Shandrashekhar) [13] en donde $V(r)$ es el potencial gravitacional, el cual depende de r , E es la energía y L el momento angular orbital de la estrella que gira en torno al agujero negro de Kerr [24], aquí aparece en la expresión del potencial gravitacional una cantidad de suma importancia llamada constante de Carter k la cual es una medida de que tan alejado del plano ecuatorial orbita un cuerpo(en este caso una estrella), cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$ esta cantidad desaparece [25].

$$V(r) = [Er^2 + a^2E - La]^2 - (r^2 - 2GMr + a^2 + M_\beta) * [r^2 + (L - aE)^2 + k] \quad (4.13)$$

De modo que el potencial gravitacional queda expresado en términos de la energía, el momento angular, los parámetros del agujero negro a y M y el parámetro de deformación α , $*$ denota el producto [20].

$$V(r) = [Er^2 - a(L - aE)]^2 - (r^2 - 2GMr + a^2 + M_\beta) * [r^2 + (L - aE)^2 + k] \quad (4.14)$$

$$\boxed{V(r) = (Er^2 - ax)^2 - (r^2 - 2GMr + a^2 + M_\beta) * (r^2 + x^2 + k)} \quad (4.15)$$

Derivando $V(r)$ tenemos $V'(r)$ con respecto a r

$$V'(r) = \frac{dV(r)}{dr} \quad (4.16)$$

$$= 2(Er^2 - ax)(2Er) - (2r - 2GM)(r^2 + x^2 + k) - (r^2 - 2GMr + a^2 + M_\beta) * (2r) \quad (4.17)$$

$$V'(r) = 2r(2)(r^2E^2 - aEx) - 2r \left(1 - \frac{GM}{r}\right) (r^2 + x^2 + k) - 2r(r^2 - 2GMr + a^2 + M_\beta) \quad (4.18)$$

$$\boxed{V'(r) = 2r \left[2(r^2E^2 - aEx) - \left(1 - \frac{GM}{r}\right) (r^2 + x^2 + k) - (r^2 - 2GMr + a^2 + M_\beta) \right]} \quad (4.19)$$

Las condiciones para que las órbitas sean estables [20] son las siguientes:

1. $V(r) = 0$
2. $V'(r) = 0$
3. $V''(r) < 0$

Estas ecuaciones nos van a servir para calcular la energía E y el momento angular L que son cantidades conservadas [13].

$$E^2r^4 - 2axEr^2 + a^2x^2 - (r^2 - 2GMr + a^2 + M_\beta) * (r^2 + x^2 + k) = 0 \quad (4.20)$$

$$2(r^2E^2 - aEx) - \left(1 - \frac{GM}{r}\right) (r^2 + x^2 + k) - (r^2 - 2GMr + a^2 + M_\beta) = 0 \quad (4.21)$$

La ecuación (4.21) la multiplicamos por $1/2$

$$(r^2E^2 - aEx) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{GM}{r}\right) (r^2 + x^2 + k) - \frac{1}{2}(r^2 - 2GMr + a^2 + M_\beta) = 0 \quad (4.22)$$

hacemos cambio de variable $\boxed{r = \frac{1}{u}}$

$$E^2 u^{-4} - 2axEu^{-2} + a^2 x^2 - (u^{-2} - 2GMu^{-1} + a^2 + M_\beta)(u^{-2} + x^2 + k) = 0 \quad (4.23)$$

$$(E^2 u^{-2} - aEx) - \frac{1}{2}(1 - GMu)(u^{-2} + x^2 + k) - \frac{1}{2}(u^{-2} - 2GMu^{-1} + a^2 + M_\beta) = 0 \quad (4.24)$$

Multiplicamos la ecuación (4.24) por u^{-2} y por -2

$$-2E^2 u^{-4} + 2axEu^{-2} + u^{-2}(1 - GMu)(u^{-2} + x^2 + k) + u^{-2}(u^{-2} - 2GMu^{-1} + a^2 + M_\beta) = 0 \quad (4.25)$$

Luego sumamos la ecuación (4.24) y la (4.23)

$$\begin{aligned} & -E^2 u^{-4} + a^2 x^2 + u^{-2}(1 - GMu)(u^{-2} + x^2 + k) + u^{-2}(u^{-2} - 2GMu^{-1} + a^2 + M_\beta) \\ & - (u^{-2} - 2GMu^{-1} + a^2 + M_\beta)(u^{-2} + x^2 + k) = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} & -E^2 u^{-4} + a^2 x^2 + u^{-2}(1 - GMu)(u^{-2} + x^2 + k) + u^{-2}(u^{-2} - \cancel{2GMu^{-1}} + a^2 + M_\beta) \\ & - u^{-2}(u^{-2} - \cancel{2GMu^{-1}} + a^2 + M_\beta) - (u^{-2} - 2GMu^{-1} + a^2 + M_\beta)(x^2 + k) = 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} & -E^2 u^{-4} + a^2 x^2 + u^{-2}(1 - GMu)(u^{-2} + x^2 + k) \\ & - (u^{-2} - 2GMu^{-1} + a^2 + M_\beta)(x^2 + k) = 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Despejando para E

$$E^2 u^{-4} = a^2 x^2 + u^{-2}(1 - GMu)(u^{-2} + x^2 + k) - (u^{-2} - 2GMu^{-1} + a^2 + M_\beta)(x^2 + k) \quad (4.29)$$

$$E^2 = [a^2 x^2 + u^{-2}(1 - GMu)(u^{-2} + x^2 + k) - (u^{-2} - 2GMu^{-1} + a^2 + M_\beta)(x^2 + k)]u^4 \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} & = [\cancel{a^2 x^2} + u^{-4} + \cancel{x^2 u^{-2}} + \cancel{k u^{-2}} - GMu^{-3} - \underbrace{GMx^2 u^{-1}}_0 - \underbrace{GMku^{-1}}_0 \\ & \quad - \cancel{u^{-2} x^2} + \underbrace{2GMx^2 u^{-1}}_0 - \cancel{a^2 x^2} - M_\beta x^2 - \cancel{k u^{-2}} + \underbrace{2GMku^{-1}}_0 - a^2 k - M_\beta k]u^4 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Hacemos $G = 1$

$$E^2 = [u^{-4} - GMu^{-3} + GMx^2u^{-1} + GMku^{-1} - M_\beta x^2 - a^2k - M_\beta k]u^4 \quad (4.32)$$

$$E^2 = (u^{-4} - Mu^{-3} + Mx^2u^{-1} + Mku^{-1} - M_\beta x^2 - a^2k - M_\beta k)u^4 \quad (4.33)$$

$$E^2 = 1 - Mu + Mx^2u^3 + Mku^3 - M_\beta x^2u^4 - a^2ku^4 - M_\beta ku^4 \quad (4.34)$$

$$E^2 = (1 - Mu) + x^2(M - M_\beta u)u^3 + [M - (M_\beta + a^2)u]ku^3 \quad (4.35)$$

$$\boxed{E^2 = (1 - Mu) + x^2(M - M_\beta u)u^3 + [M - (M_\beta + a^2)u]ku^3} \quad (4.36)$$

Expresamos $V(r)$ y $V'(r)$ en términos de u , $r = \frac{1}{u}$

$$V(r) = (Er^2 - ax)^2 - (r^2 - 2Mr + a^2 + M_\beta)(r^2 + x^2 + k) \quad (4.37)$$

$$= E^2r^4 - 2Er^2ax + a^2x^2 - (r^2 - 2Mr + a^2 + M_\beta)(r^2 + x^2 + k) \quad (4.38)$$

$$V(r)r^{-4} = E^2 - 2Er^{-2}ax + a^2x^2r^{-4} - r^{-2}(1 - 2Mr^{-1} + a^2r^{-2} + M_\beta r^{-2})(r^2 + x^2 + k) \quad (4.39)$$

$$V(u)u^4 = E^2 - 2Eaxu^2 + a^2x^2u^4 - u^2(1 - 2Mu + a^2u^2 + M_\beta u^2)(u^2 + x^2 + k) \quad (4.40)$$

$$V(u)u^4 = E^2 - 2Eaxu^2 + a^2x^2u^4 - u^2(1 - 2Mu + a^2u^2 + M_\beta u^2)u^{-2}[1 + (x^2 + k)u^2] \quad (4.41)$$

$$V(u)u^4 = E^2 - 2Eaxu^2 + a^2x^2u^4 - (1 - 2Mu + a^2u^2 + M_\beta u^2)[1 + (x^2 + k)u^2] \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} V(u)u^4 = & E^2 - 2Eaxu^2 + a^2x^2u^4 - 1 - x^2u^2 - u^2k + 2Mu + 2Mu^3x^2 + 2Mu^3k \\ & - a^2u^2 - a^2u^4x^2 - a^2ku^4 - M_\beta u^2 - M_\beta u^4x^2 - M_\beta u^4k \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} V(u)u^4 = & - (a^2u^2 - 2Mu + 1) + E^2 + 2Mx^2u^3 + 2Mku^3 - (x^2 + 2Eax)u^2 \\ & - ku^2 - a^2ku^4 - M_\beta u^2 - M_\beta(x^2 + k)u^4 \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} V(u)u^4 = & - (a^2u^{-2} - 2Mu + 1) + E^2 + 2Mx^2u^3 - (x^2 + 2xaxE)u^2 - (k + M_\beta)u^2 + 2Mku^3 \\ & - [a^2k + M_\beta(x^2 + k)]u^4 \end{aligned} \quad (4.45)$$

derivamos respecto a u

$$\begin{aligned} (V(u)u^4)' &= -(2ua^2 - 2M) + 6Mx^2u^2 - 2(x^2 + 2xaE)u - 2(k + M_\beta)u + 6Mku^2 \\ &\quad - 4[a^2k + M_\beta(x^2 + k)]u^3 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned} -(ua^2 - M) + 3Mx^2u^2 - (x^2 + 2xaE)u - (k + M_\beta)u + 3Mku^2 \\ - 2[a^2k + M_\beta(x^2 + k)]u^3 = 0 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Al restar las ecuaciones (4.45) y (4.47) llegamos a lo mismo

$$\boxed{E^2 = (1 - Mu) + x^2(M - M_\beta u)u^3 + [M - (M_\beta + a^2)u]ku^3} \tag{4.48}$$

Ahora de la ecuación (4.47) vamos a tratar de encontrar k y E

$$\begin{aligned} 2[a^2k + M_\beta(x^2 + k)]u^3 - 3Mku^2 + (k + M_\beta)u + (x^2 + 2xaE)u \\ - 3Mx^2u^2 + (ua^2 - M) = 0 \end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned} 2xaEu = -2[a^2k + M_\beta(x^2 + k)]u^3 + 3Mku^2 - (k + M_\beta)u + 3Mx^2u^2 \\ - (ua^2 - M) - ux^2 \end{aligned} \tag{4.50}$$

$$2aE(xu) = x^2u(3Mu - 1 - 2M_\beta u^2) - (ua^2 - M) - 2a^2ku^3 - 2M_\beta ku^3 - (k + M_\beta)u \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned} 2aE(xu) &= [(3M - 2M_\beta u)u - 1]ux^2 - (ua^2 - M) \\ &\quad + k(-2a^2u^3 - 2M_\beta u^3 + 3Mu^2 - u) - M_\beta u \end{aligned} \tag{4.52}$$

$$E2axu = [(3M - 2M_\beta u)u - 1]ux^2 - (ua^2 - M + M_\beta u) + k(3Mu^2 - 2a^2u^3 - 2M_\beta u^3 - u) \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned} 2aE(xu) &= ux^2[(3M - 2M_\beta u)u - 1] - [u(a^2 + M_\beta) - M] \\ &\quad + k[(3Mu - 1)u - 2u^3(a^2 + M_\beta)] \end{aligned} \tag{4.54}$$

hacemos lo siguiente para simplificar

$$A = (3M - 2M_\beta u)u - 1 \quad (4.55)$$

$$B = u(a^2 + M_\beta) - M \quad (4.56)$$

$$C = (3Mu - 1)u - 2u^3(a^2 + M_\beta) \quad (4.57)$$

$$2aE(xu) = ux^2A - B + kc \quad (4.58)$$

elevando al cuadrado ambos lados

$$4a^2E^2(xu)^2 = (ux^2A - B + kC)^2 \quad (4.59)$$

$$= [ux^2A + (-B + kC)]^2 \quad (4.60)$$

$$= (ux^2)^2A^2 + 2ux^2A(kC - B) + (kC - B)^2 \quad (4.61)$$

$$= (ux^2)^2A^2 + 2ux^2AkC - 2ux^2AB + k^2C^2 - 2BkC + B^2 \quad (4.62)$$

$$= (ux^2)^2A^2 - [2A(B - Ck)](ux^2) + k^2c^2 - 2BkC + B^2 \quad (4.63)$$

Para simplificar hacemos lo siguiente

$$T = B^2 + k^2C^2 - 2BkC \quad (4.64)$$

$$4a^2E^2(xu)^2 = (ux^2)^2A^2 - [2A(B - Ck)](ux^2) + T \quad (4.65)$$

como ya sabemos que

$$E^2 = (1 - Mu) + [(M - M_\beta u)u^2](ux^2) + \underbrace{\{[M - (M_\beta + a^2)u]u^3\}}_{-P_u}k \quad (4.66)$$

hay un termino que se repite

$$u(a^2 + M_\beta) - M \quad (4.67)$$

$$P_u = u(a^2 + M_\beta) - M \quad (4.68)$$

$\implies$ sustituimos E^2 en $4a^2uE^2(x^2u)$

$$4a^2uE^2(x^2u) = 4a^2u(ux^2)[(1 - Mu) + [(M - M_\beta u)u^2]ux^2 - P_u u^3 k] \quad (4.69)$$

$$4a^2uE^2(x^2u) = ux^2[4a^2u(1 - Mu) - 4a^2u^4 P_u k] + 4a^2u^3(M - M_\beta u)(ux^2)^2 \quad (4.70)$$

Restando las ecuaciones (4.65) y (4.70), e igualando a cero

$$4a^2E^2(xu)^2 = (ux^2)^2 A^2 - [2A(B - Ck)](ux^2) + T \quad (4.71)$$

$$4a^2E^2(xu)^2 = ux^2[4a^2u(1 - Mu) - 4a^2u^4 P_u k] + 4a^2u^3(M - M_\beta u)(ux^2)^2 \quad (4.72)$$

Si restamos las ecuaciones (4.71) y (4.72) e igualamos a cero

$$\begin{aligned} & (ux^2)4a^2u(1 - Mu) - (ux^2)4a^2u^4 P_u k + (ux^2)^2 4a^2u^3(M - M_\beta u) - (ux^2)^2 A^2 \\ & + [2A(B - Ck)](ux^2) - T \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} & (ux^2)^2[4a^2u^3(M - M_\beta u) - A^2] \\ & + (ux^2)[4a^2u(1 - Mu) + 2A(B - Ck) - 4a^2u^4 P_u k] - T = 0 \end{aligned} \quad (4.74)$$

Hacemos $ay^2 + by + c = 0$

$$\begin{cases} ux^2 = y \\ a = 4a^2u^3(M - M_\beta u) - A^2 \\ b = 4a^2u(1 - Mu) + 2A(B - Ck) - 4a^2u^4 P_u k \\ c = -T \end{cases} \quad (4.75)$$

$$\boxed{ay^2 + by + c = 0} \quad (4.76)$$

Las soluciones son las siguientes:

$$y_{1,2} = - \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (4.77)$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{b^2 - 4ac} \quad (4.78)$$

$$= 2\sqrt{\frac{b^2}{4} - ac} \quad (4.79)$$

$$= 2\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac} \quad (4.80)$$

Lo cual podemos escribir como:

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm 2\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{2a} \quad (4.81)$$

$$\boxed{y_{1,2} = \frac{\frac{-b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}} \quad (4.82)$$

Para simplificar aún más hacemos lo siguiente:

$$\begin{cases} a = 4a^2u^3(M_\alpha - M_\beta u) - A^2 \\ b = 4a^2u(1 - M_\alpha u) + 2AB - (2AC + 4a^2u^4P_u)k \\ c = B^2 - 2BCk + C^2k^2 \end{cases} \quad (4.83)$$

$$\begin{cases} a = f_1u \\ b = f_2(u) - f_3(u)k \\ c = f_4(u) - f_5(u)k + f_6(u)k^2 \end{cases} \quad (4.84)$$

donde para hacer más compacta la ecuación hacemos:

$$\begin{cases} f_1(u) = 4a^2u^3(M_\alpha - M_\beta u) - A^2 \\ f_2(u) = 4a^2u(1 - M_\alpha u) + 2AB \\ f_3(u) = 2AC + 4a^2u^4P_u \\ f_4(u) = B^2 \\ f_5(u) = 2BC \\ f_6(u) = C^2 \end{cases} \quad (4.85)$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left[\frac{f_2(u) - f_3(u)k}{2}\right]^2 \quad (4.86)$$

$$= \frac{f_2^2(u) - 2f_2(u)f_3(u)k + f_3^2(u)k^2}{4} \quad (4.87)$$

$$ac = f_1(u)[f_4(u) - f_5(u)k + f_6(u)k^2] \quad (4.88)$$

$$= f_1(u)f_4(u) - f_1(u)f_5(u)k + f_1(u)f_6(u)k^2 \quad (4.89)$$

$$\frac{b}{2} = \frac{f_2(u) - f_3(u)k}{2} \quad (4.90)$$

$$a = f_1(u) \quad (4.91)$$

Sustituyendo en $y_{1,2}$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= \frac{-\frac{1}{2}f_2(u) - \frac{1}{2}f_3(u)k \pm}{f_1(u)} \\ &\quad \pm \frac{[\frac{1}{4}f_2^2(u) - \frac{1}{2}f_2(u)f_3(u)k + \frac{1}{4}f_3^2(u)k^2 - f_1(u)f_4(u) + f_1(u)f_5(u)k}{f_1(u)} \\ &\quad - f_1(u)f_6(u)k^2]^{1/2}}{f_1(u)} \end{aligned} \quad (4.92)$$

$$\begin{aligned} x^2 &= - \frac{-\frac{1}{2}f_2(u) - \frac{1}{2}f_3(u)k \pm}{2f_1(u)u} \\ &\quad \pm \frac{\{[f_2^2(u) - 4f_1(u)f_4(u)] + 2[2f_1(u)f_5(u) - f_2(u)f_3(u)]k + [f_3^2(u) - 4f_1(u)f_6(u)]k^2\}}{2f_1(u)u} \end{aligned} \quad (4.93)$$

Como $y = ux^2$, hacemos podemos simplificar nuestros cálculos aún más si usamos las siguientes variables:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\frac{1}{2}f_2(u) \\ \alpha_2 = -\frac{1}{2}f_3(u) \\ \alpha_3 = f_2^2(u) - 4f_1(u)f_4(u) \\ \alpha_4 = 2[2f_1(u)f_5(u) - f_2(u)f_3(u)] \\ \alpha_5 = f_3^2(u) - 4f_1(u)f_6(u) \\ \alpha_6 = 2f_1(u)u \end{cases} \quad (4.94)$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 k \pm \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_4 k + \alpha_5 k^2)^{1/2}}{\alpha_6} \quad (4.95)$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{\alpha_1 + \alpha_2 k \pm \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_4 k + \alpha_5 k^2)^{1/2}}}{\sqrt{\alpha_6}} \quad (4.96)$$

Encontramos el momento angular, el cual se calcula a partir de la siguiente ecuación:

$$x = L - aE \quad (4.97)$$

$$L = x + aE \quad (4.98)$$

$$L = \pm \frac{\sqrt{\alpha_1 + \alpha_2 k \pm \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_4 k + \alpha_5 k^2)^{1/2}}}{\sqrt{\alpha_6}} \quad (4.99)$$

Ahora debemos encontrar la constante de Carter k la cual nos indica que tanto se alejan del plano ecuatorial las partículas geodésicas [25], esta constante tiene un valor positivo y es cero en el plano ecuatorial, esta se calcula a partir de:

$$T^2 - \Delta[r^2 + (L - aE)^2 + k] = 0 \quad (4.100)$$

$$T^2 - \Delta(r^2 + x + k) = 0 \quad (4.101)$$

T se puede escribir de la siguiente forma donde a es el parámetro de rotación

$$T = E(r^2 + a^2) - La \quad (4.102)$$

$$= Er^2 + Ea^2 - La \quad (4.103)$$

$$= Er^2 - a(L - aE) \quad (4.104)$$

$$= Er^2 - ax \quad (4.105)$$

$$\implies T^2 = (Er^2 - ax)^2 \quad (4.106)$$

$$T^2 = E^2 r^4 + a^2 x^2 - 2Er^2 ax. \quad (4.107)$$

No hay manera de despejar para k , las soluciones no son analíticas, solo se puede resolver numéricamente

$$T^2 - \Delta(r^2 + x + k) = 0 \quad (4.108)$$

$$T^2 - \Delta r^2 - \Delta x - k\Delta = 0 \quad (4.109)$$

$$\boxed{k = \frac{T^2}{\Delta} - r^2 - x} \quad \text{soluciones numéricas} \quad (4.110)$$

$$\begin{cases} T^2 \text{ no depende de } k \\ x \text{ depende de } k \end{cases} \quad (4.111)$$

Expresamos E de una manera mas compacta

$$E^2 = (1 - Mu) + x^2(M - M_\beta u)u^3 + [M - (M_\beta + a^2)u]ku^3 \quad (4.112)$$

$$\begin{cases} \gamma_1 = 1 - Mu \\ \gamma_2 = (M - M_\beta u)u^3 \\ \gamma_3 = [M - (M_\beta + a^2)u]u^3 \end{cases} \quad (4.113)$$

$$E^2 = \gamma_1 + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 k \quad (4.114)$$

$$\boxed{E^2 = \gamma_2 x^2 + \gamma_3 k + \gamma_1} \quad (4.115)$$

Así que E queda en términos de k ya que x esta en términos de k , la constante de Carter Las

siguientes expresiones describen las velocidades de partículas masivas son [8]:

$$\Delta\Sigma U^t = [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta]E - (r^2 + a^2 - \Delta)aL \quad (4.116)$$

$$\Sigma^2 (U^r)^2 = T^2 - \Delta[r^2 + (L - aE)^2 + k] \quad (4.117)$$

$$\Sigma^2 (U^\theta)^2 = k - \left[a^2(1 - E^2) + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} \right] \cos^2 \theta \quad (4.118)$$

$$(\Delta\Sigma \sin^2 \theta)U^\varphi = a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)E + (\Delta - a^2 \sin^2 \theta)L \quad (4.119)$$

Donde $T \equiv E(r^2 + a^2) - La$, para orbitas cerradas la energía debe ser negativa $E < 1$ lo cual indica que el cuerpo permanece ligado [20], como la orbita es circular $U^r = 0$ [24].

En nuestro caso la orbita no es ecuatorial $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, y las expresiones para las velocidades de las partículas geodésicas son:

$$U^t = [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta]E - (r^2 + a^2 - \Delta)aL \quad (4.120)$$

$$\begin{cases} U^t = \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] \frac{E}{\Sigma} + \left[a - \frac{(r^2 + a^2)}{\Delta} \right] \frac{aL}{\Sigma} \\ U^\theta = \frac{\pm \sqrt{k - \left[a^2(1 - E^2) + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} \right] \cos^2 \theta}}{\Sigma} \\ U^\varphi = \frac{aT}{\Delta\Sigma} - \frac{aE}{\Sigma} + \frac{L}{\Sigma \sin^2 \theta} \end{cases} \quad (4.121)$$

4.2. Geodésicas de fotones

Los fotones a diferencia de las partículas masivas pueden escapar del horizonte de sucesos y viajar por el espacio siguiendo geodésicas nulas en un plano no ecuatorial [13], para los fotones debemos expresar los momentos en lugar de las velocidades, la componente k^r del momento no es cero ya que los fotones no siguen orbitas circulares [8], estas son:

$$\begin{cases} \Delta\Sigma k^t = [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta]E_\gamma - (r^2 + a^2 - \Delta)aL_\gamma \\ \Sigma^2 (k^r)^2 = T_\gamma^2 - \Delta[(L_\gamma - aE_\gamma)^2 + k_\gamma] \\ \Sigma^2 (k^\theta)^2 = k_\gamma - \left[-a^2 E_\gamma^2 + \frac{L_\gamma^2}{\sin^2 \theta} \right] \cos^2 \theta \\ (\Delta\Sigma \sin^2 \theta)k^\varphi = a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)E_\gamma + (\Delta - a^2 \sin^2 \theta)L_\gamma \end{cases} \quad (4.122)$$

$$T_\gamma = (r^2 + a^2)E_\gamma - aL_\gamma \quad (4.123)$$

De modo que, para orbitas no ligadas $E \geq 1$ las componentes del momento son las siguientes:

$$\begin{cases} k^t = \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] \frac{E_r}{2} + \left[a - \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} \right] \frac{aL - \gamma}{\Sigma} \\ k^r = \pm \sqrt{\frac{T_\gamma^2 - \Delta[(L_\gamma - aE_\gamma)^2] + k_\gamma}{\Sigma}} \\ k^\theta = \pm \sqrt{\frac{k - \left[-a^2 E_\gamma^2 + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} \right]}{\Sigma}} \\ k^\varphi = \frac{aT_\gamma}{\Delta\Sigma} - \frac{aE_\gamma}{\Sigma} + \frac{L}{\sin^2 \theta} \end{cases} \quad (4.124)$$

$$T_\gamma = (r^2 + a^2)E_\gamma - aL_\gamma \quad (4.125)$$

4.3. Geodésicas de partículas masivas en plano no ecuatorial

Hemos llegado al momento cumbre de nuestro trabajo, vamos a buscar expresiones para los desplazamientos al rojo y al azul z_r y z_b , luego en términos de estos encontrar los parámetros del agujero negro a y M que es nuestro objetivo principal. La frecuencia es $\nu_{e/d} = -K_i U^i$, las velocidades y momentos son:

$$U_e^i = (U^t, U^r, U^\theta, U^\varphi) \quad (4.126)$$

$$U_d^i = (U^t, U^r, U^\theta, U^\varphi) \quad (4.127)$$

$$K_e^i = (K^t, K^r, K^\theta, K^\varphi) \quad (4.128)$$

$$K_d^i = (K^t, K^r, K^\theta, K^\varphi) \quad (4.129)$$

El redshift de los fotones se calcula en base al efecto Doppler[8] a partir de la siguiente expresión:

$$z = \frac{\nu_e - \nu_d}{\nu_d} = \frac{\nu_e}{\nu_d} - 1 \quad (4.130)$$

$$1 + z = \frac{(Ek^t - Lk^\varphi - g_{rr}U^r k^r - g_{\theta\theta}U^\theta K^\theta)}{(Ek^t - Lk^\varphi - g_{rr}U^r k^r - g_{\theta\theta}U^\theta K^\theta)} \quad (4.131)$$

$$1 + z = \frac{(E_\gamma U^t - L_\gamma U^\varphi - g_{rr}U^r k^r - g_{\theta\theta}U^\theta k^\theta)}{(E_\gamma U^t - L_\gamma U^\varphi - g_{rr}U^r k^r - g_{\theta\theta}U^\theta k^\theta)} \quad (4.132)$$

En la figura 4.2 se ilustran los desplazamientos al rojo(punto e) y al azul(punto a) que son los puntos donde el parámetro de impacto b logra su máximo valor [8], estos son los puntos de interés ya que nos

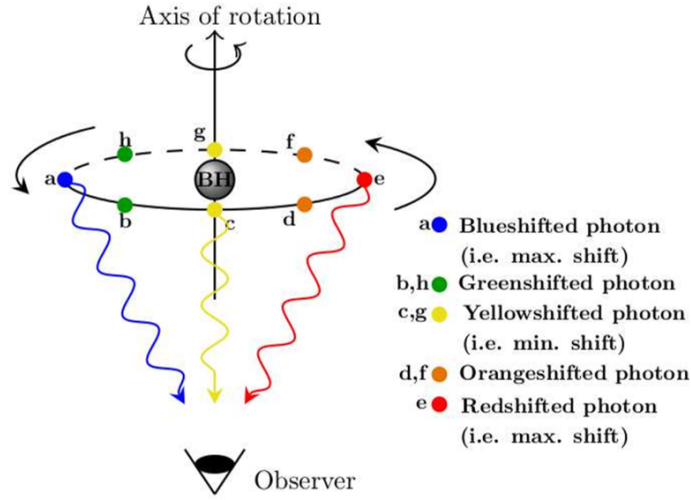


Figura 4.3: Desplazamiento al rojo y al azul, tomado de [9]

permitirán calcular dichos desplazamientos que serán medidos por un detector situado en la Tierra.

Cuando $r \rightarrow \infty$ U^r se hace cero, Como la órbita es circular entonces ($U^r = 0$)

$$1 + z = \frac{(Ek^t - LK^\varphi - g_{\theta\theta}U^\theta k^\theta)}{(EK^t - Lk^\varphi - g_{\theta\theta}U^\theta K^\theta)} \quad (4.133)$$

$$1 + z = \frac{E_\gamma U^t - L_\gamma U^\varphi - g_{\theta\theta}U^\theta k^\theta)/e}{E_\gamma U^t - L_\gamma U^\varphi - g_{\theta\theta}U^\theta K^\theta)/d} \quad (4.134)$$

Como el parámetro de impacto es $b = L/E$ podemos manipular la expresión a fin de introducir este en los desplazamientos al rojo y al azul

$$1 + z = \frac{E_\gamma(U_e^t - (L_\gamma/E_\gamma)U_e^\varphi - (g_{\theta\theta}/E_\gamma)U_e^\theta k_e^\theta)}{E_\gamma(U_d^t - (L_\gamma/E_\gamma)U_d^\varphi - (g_{\theta\theta}/E_\gamma)U_d^\theta k_d^\theta)} \quad (4.135)$$

$$1 + z = \frac{U_e^t - b_e U_e^\varphi - (g_{\theta\theta}/E_\gamma)U_e^\theta k_e^\theta}{U_d^t - b_d U_d^\varphi - (g_{\theta\theta}/E_\gamma)U_d^\theta k_d^\theta} \quad (4.136)$$

en la cinemática del desplazamiento al rojo, el valor central del parámetro de impacto es $b = 0$ lo cual permite expresar lo siguiente:

$$\Rightarrow 1 + z_e = \frac{U_e^t - (g_{\theta\theta}/E_\gamma)U_e^\theta k_e^\theta}{U_d^t - (g_{\theta\theta}/E_\gamma)U_d^\theta k_d^\theta} \quad (4.137)$$

Si restamos (4.136) y (4.137) obtenemos lo siguiente:

$$z_k = (1 + z) - (1 + z_e) = z - z_e \quad (4.138)$$

$$z_k = \frac{b_d U_d^\varphi U_e^t - b_e U_e^\varphi U_d^t + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) [b_e U_e^\varphi U_d^\theta k_d^\theta - b_d U_d^\varphi U_e^\theta k_e^\theta]}{U_d^t (U_d^t - b_d U_d^\varphi) + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) U_d^\theta k_d^\theta \left[b_d U_d^\varphi - U_d^t + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) U_d^\theta k_d^\theta \right]} \quad (4.139)$$

A fin de tomar en cuenta la curvatura de la luz debido al campo gravitacional alrededor de un objeto masivo [9], debemos encontrar la correlación entre el parámetro de impacto b y el radio r de el emisor (o detector). Asumimos que la órbita del detector es circular.

Recordamos que $M_\alpha = GM$, $M_\beta = \alpha M^2 G G_N$.

$$b_\pm = \frac{L_\gamma}{E_\gamma} \quad (4.140)$$

Debemos tomar en cuenta que $b_e = b_d$ a lo largo de las trayectorias de los fotones [8], estos dos valores dan dos desplazamientos diferentes los cuales son:

$$z_r = \frac{U_d^\varphi U_e^t b_{d-} - U_e^\varphi U_d^t b_{e-} + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) [U_e^\varphi U_d^\theta k_d^\theta b_{e-} - U_d^\varphi U_e^\theta k_e^\theta b_{d-}]}{U_d^t (U_d^t - U_d^\varphi b_{d-}) + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) \left[U_d^\varphi b_{d-} - 2U_d^t + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) U_d^\theta k_d^\theta \right] U_d^\theta k_d^\theta} \quad (4.141)$$

$$z_b = \frac{U_d^\varphi U_e^t b_{d+} - U_e^\varphi U_d^t b_{e+} + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) [U_e^\varphi U_d^\theta k_d^\theta b_{e+} - U_d^\varphi U_e^\theta k_e^\theta b_{d+}]}{U_d^t (U_d^t - U_d^\varphi b_{d+}) + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) \left[U_d^\varphi b_{d+} - 2U_d^t + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) U_d^\theta k_d^\theta \right] U_d^\theta k_d^\theta} \quad (4.142)$$

De esta manera hemos llegado a las expresiones finales que son los desplazamientos al rojo y al azul en función de los parámetros del agujero negro de Kerr, las ecuaciones 4.142 y 4.143 son los resultados más importantes de este trabajo de tesis ya que en estas ecuaciones se considera una orbita no ecuatorial, en el siguiente capitulo vamos a entender un poco más en detalle lo que está ocurriendo con los parametros M y a .

para simplificar hacemos lo siguiente:

$$\alpha_- = U_d^\varphi U_e^t b_{d-} - U_e^\varphi U_d^t b_{e-} \quad (4.143)$$

$$\beta_- = U_e^\varphi U_d^\theta k_d^\theta b_{e-} - U_d^\varphi U_e^\theta k_e^\theta b_{d-} \quad (4.144)$$

$$\gamma_- = U_d^t (U_d^t - U_d^\varphi b_{d-}) \quad (4.145)$$

$$\delta_- = \left[U_d^\varphi b_{d-} - 2U_d^t + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma} \right) U_d^\theta k_d^\theta \right] U_d^\theta k_d^\theta \quad (4.146)$$

$$\alpha_+ = U_d^\varphi U_e^t b_{d+} - U_e^\varphi U_d^t b_{e+} \quad (4.147)$$

$$\beta_+ = U_e^\varphi U_d^\theta k_d^\theta b_{e+} - U_d^\varphi U_e^\theta k_e^\theta b_{d+} \quad (4.148)$$

$$\gamma_+ = U_d^t (U_d^t - U_d^\varphi b_{d+}) \quad (4.149)$$

$$\delta_+ = \left[U_d^\varphi b_{d+} - 2U_d^t + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma} \right) U_d^\theta k_d^\theta \right] U_d^\theta k_d^\theta \quad (4.150)$$

Con las expresiones anteriores los desplazamientos al rojo y al azul se pueden expresar de forma más compacta quedando de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_r = \frac{\alpha_- + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma} \right) \beta_-}{\gamma_- + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma} \right) \delta_-} \\ z_b = \frac{\alpha_+ + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma} \right) \beta_+}{\gamma_+ + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma} \right) \delta_+} \end{array} \right. \quad (4.151)$$

4.4. Región Kerr MOG para un campo gravitacional fuerte

Si en las ecuaciones para los desplazamientos al rojo y al azul, ecuaciones (4.142) y (4.143) consideramos límites para el parámetro a podemos establecer un intervalo de valores para los z_r y z_b . El límite inferior para el parámetro a ocurre cuando $a = 0$ y el límite superior ocurre cuando $|a| = \frac{M_\alpha}{\sqrt{1 + \alpha}}$, de esta manera los intervalos para los desplazamientos al rojo y al azul son los siguientes:

$$z_r^{\min} \leq z_r \leq z_r^{\max} \quad \text{y} \quad z_b^{\min} \leq z_b \leq z_b^{\max} \quad (4.152)$$

Los $z_r^{\min}$ y $z_b^{\min}$ tienen la misma magnitud pero diferente signo, si los datos obtenidos experimentalmente caen dentro de este intervalo nuestra aproximación mediante gravedad modificada es adecuada.

4.5. Región para relatividad general en un campo gravitacional fuerte

De la misma forma, si consideramos las expresiones para los desplazamientos al rojo y al azul, ecuaciones (4.142) y (4.143) y hacemos el parámetro de deformación igual a cero ($\alpha = 0$), con lo cual estamos en el régimen de la Relatividad General, esto nos permite establecer un intervalo de valores para los desplazamientos al rojo y al azul los cuales son:

$$Z_r^{\min} \leq z_r^{\text{kerr}} \leq Z_r^{\max} \quad \text{y} \quad Z_b^{\min} \leq z_b^{\text{kerr}} \leq Z_b^{\max} \quad (4.153)$$

De manera que si el conjunto de datos obtenidos experimentalmente para los desplazamientos al rojo y al azul están dentro de estos intervalos, implica que el agujero negro es de Kerr.

4.6. Análisis numérico

Escenario para una órbita circular en el plano ecuatorial

Los resultados obtenidos en las ecuaciones (4.141) y (4.142) que dan los desplazamientos al rojo y al azul son para órbitas circulares no ecuatoriales ($U^r = 0$), para comprobar que nuestros cálculos de los desplazamientos al rojo y al azul (z_r y z_b) son correctos hacemos el caso especial para el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$) en donde U^θ y K^θ son cero ($U^\theta = 0$, $K^\theta = 0$)

$$z_r = \frac{U_d^\varphi U_e^t b_{d-} - U_e^\varphi U_d^t b_{e-} + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) \left[\cancel{U_e^\varphi U_d^\theta K_d^\theta b_{e-}}^0 - \cancel{U_d^\varphi U_e^\theta K_d^\theta b_{d-}}^0 \right]}{U_d^t (U_d^t - U_d^\varphi b_{d-}) + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) \left[U_d^\varphi b_{d-} - 2U_d^t + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) \cancel{U_d^\theta K_d^\theta}^0 \right] \cdot \cancel{U_d^\theta K_d^\theta}^0} \quad (4.154)$$

$$z_r = \frac{U_d^\varphi U_e^t b_{d-} - U_e^\varphi U_d^t b_{e-}}{U_d^t (U_d^t - U_d^\varphi b_{d-})} \quad (4.155)$$

Y para el z_b tenemos al hacer $U^\theta = 0$ y $K^\theta = 0$

$$z_b = \frac{U_d^\varphi U_e^t b_{d+} - U_e^\varphi U_d^t b_{e+} + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) \left[\cancel{U_e^\varphi U_d^\theta K_d^\theta b_{e+}}^0 - \cancel{U_d^\varphi U_e^\theta K_d^\theta b_{d+}}^0 \right]}{U_d^t (U_d^t - U_d^\varphi b_{d+}) + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) \left[U_d^\varphi b_{d+} - 2U_d^t + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) \cancel{U_d^\theta K_d^\theta}^0 \right] \cdot \cancel{U_d^\theta K_d^\theta}^0} \quad (4.156)$$

$$z_b = \frac{U_d^\varphi U_e^t b_{d+} - U_e^\varphi U_d^t b_{e+}}{U_d^t (U_d^t - U_d^\varphi b_{d+})} \quad (4.157)$$

De esta manera nuestros cálculos coinciden con los resultados ya publicados (Herrera et al, 2018), en los cuales se consideran órbitas circulares en el plano ecuatorial, en donde la constante de Carter k es igual a cero.

Cuando estamos en el plano ecuatorial donde $\theta = \frac{\pi}{2}$ y la constante de Carter k es igual a cero, las expresiones para los desplazamientos al rojo y al azul son:

$$z_r = \frac{U_d^\varphi U_e^t b_{d-} - U_e^\varphi U_d^t b_{e-}}{U_d^t (U_d^t - U_d^\varphi b_{d-})}, \quad (4.158)$$

$$z_b = \frac{U_d^\varphi U_e^t b_{d+} - U_e^\varphi U_d^t b_{e+}}{U_d^t (U_d^t - U_d^\varphi b_{d+})}. \quad (4.159)$$

De este modo las expresiones para los desplazamientos al rojo y al azul quedan de forma más compacta

y a partir de ellos se pueden encontrar los parámetros del agujero negro de forma analítica. Así mismo la energía que antes obtuvimos fuera del plano ecuatorial se simplifica al resultado ya publicado haciendo $k = 0$.

$$E^2 = (1 - M_\alpha u) + x^2(M_\alpha - M_\beta u)u^3 + [M_\alpha - (M_\beta + a^2)u] \cdot ku^3. \quad (4.160)$$

$$E^2 = (1 - M_\alpha u) + x^2(M_\alpha - M_\beta u)u^3. \quad (4.161)$$

Expresiones para M y a en términos de z_r y z_b

A partir de las ecuaciones (4.158) y (4.159) para los desplazamientos al rojo y al azul podemos resolver para encontrar la masa M y el parámetro de rotación a del agujero negro de Kerr, y tomando las siguientes definiciones:

$$\begin{cases} M_\alpha = (1 + \alpha)M, \\ M_\beta = \frac{\alpha}{(1+\alpha)}M_\alpha^2. \end{cases} \quad (4.162)$$

La expresión para a es:

$$a^2 = \frac{\lambda r_e^4 (r_0^2 - 2M_\alpha r_e + M_\beta)}{(2M_\alpha r_e + M_\beta)^2 \eta - \lambda r_e^4} \quad (4.163)$$

Donde $\eta = (z_r - z_r)^2$ y $\lambda = (z_r + z_b)^2$ y r_e es el radio de la estrella orbitando el agujero negro [9].

La ecuación para la masa M_α se puede calcular a partir de las ecuaciones (4.158), (4.159) y (4.163) dando como resultado:

$$\begin{aligned} & \{ (r_e^2 + 2M_\beta - 3M_\alpha r_e)(r_e^2 - 2M_\alpha r_e + M_\beta) \times [(2M_\alpha r_e + M_\beta)^2 \eta - \lambda r_e^4] \\ & - 4r_e^3 \bar{\omega}_e (2M_\alpha r_e + M_\beta)^2 \}^2 \\ & = 4\lambda r_e^5 \bar{\omega}_e (r_e^2 - 2M_\alpha r_e + M_\beta)^3 [(2M_\alpha r_e - M_\beta)^2 \eta - \lambda r_e^4] \end{aligned} \quad (4.164)$$

Donde $\bar{\omega}_e = M_\alpha - \frac{M_\beta}{r}$ es la velocidad angular del emisor que en este caso es la estrella orbitando el agujero negro, esta ecuación para M es un polinomio de orden 16 y no puede resolverse analíticamente [9]. Cuando resolvemos para M obtenemos 16 raíces de las cuales algunas son complejas y otras negativas, de manera que tomamos una raíz positiva para poder obtener un valor para el parámetro de rotación a .

Grafica de M vs α

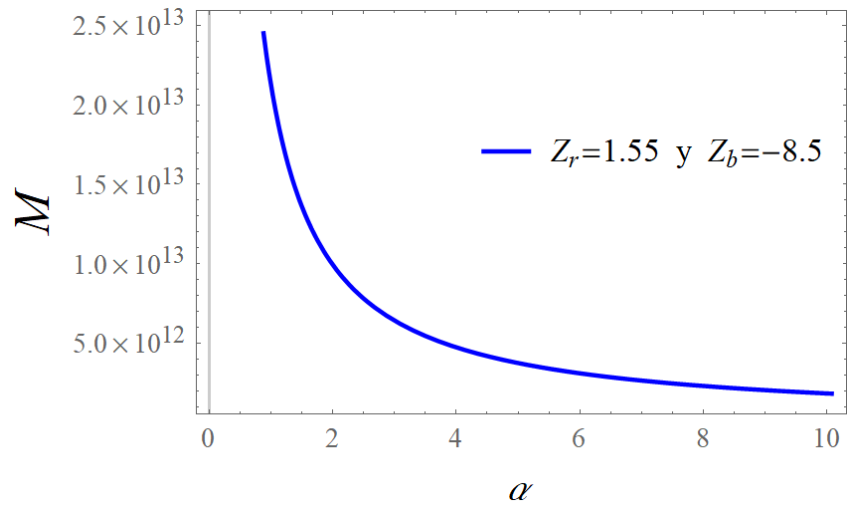


Figura 4.4: Gráfico de M vs α .

En la figura 4.4 podemos ver la variación de la masa M del agujero negro en función del parámetro de deformación α para los desplazamientos $z_r = 1.55$ y $z_b = 8.5$. Cuando el parámetro α crece la masa disminuye.

Gráfico de a vs α

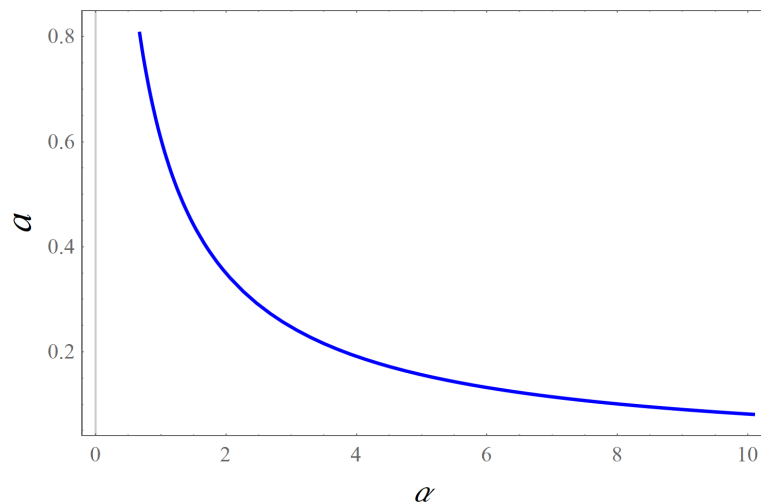


Figura 4.5: Gráfico de a vs α

De la figura 4.5 representa la variación de el espín a vs el parámetro de deformación α , cuando el parámetro α crece a disminuye.

Gráfico de a vs α para diferentes valores de z_r y z_b

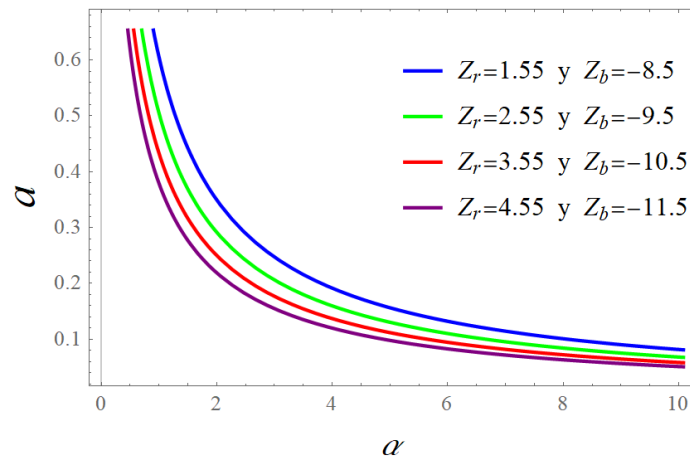


Figura 4.6: Gráfico de a vs α .

La figura 4.7 muestra la variación de a vs α para diferentes valores de los desplazamientos al rojo y al azul, podemos observar como a medida estos desplazamientos aumentan su valor el parámetro a tiende a reducir su valor.

Gráfico de a vs z_r y z_b para diferentes valores de α

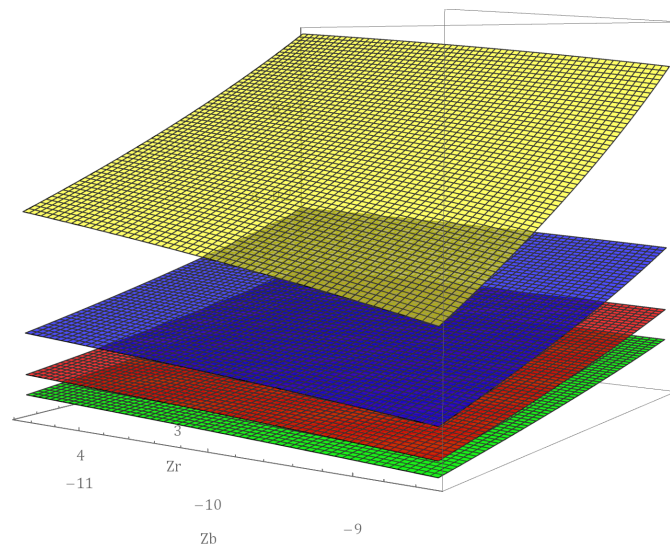
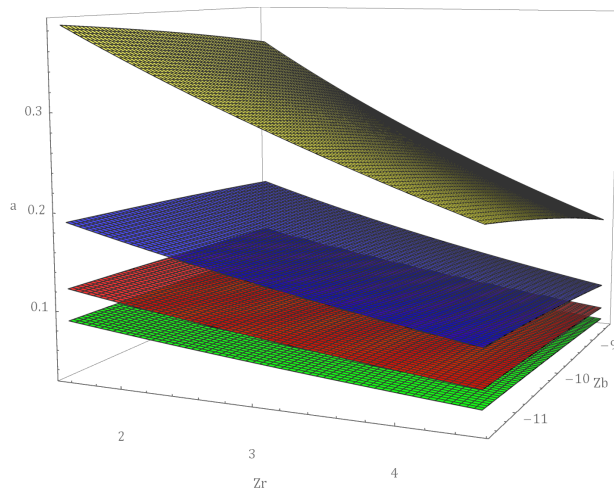


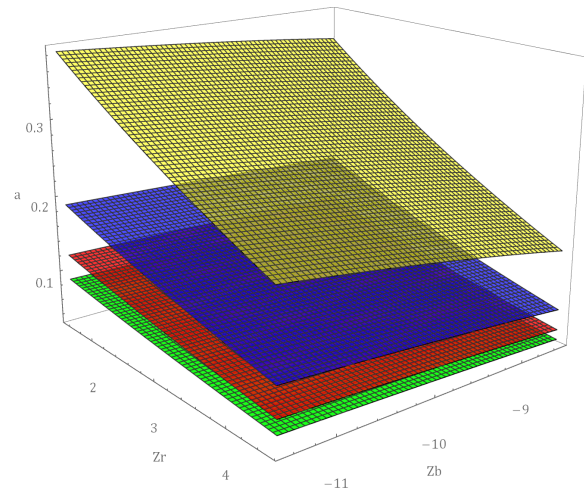
Figura 4.7: Gráfico de a vs α .

En el gráfico tridimensional 4.7 podemos observar la variación del parámetro a conforme cambian los valores de los desplazamientos z_r y z_b y también el parámetro de deformación α , el valor de a aumenta a medida los desplazamientos disminuyen su valor.

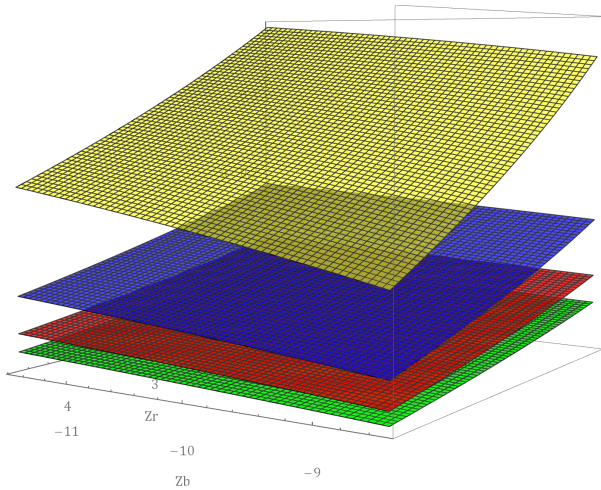
Diferentes ángulos del gráfico de a vs z_r y z_b



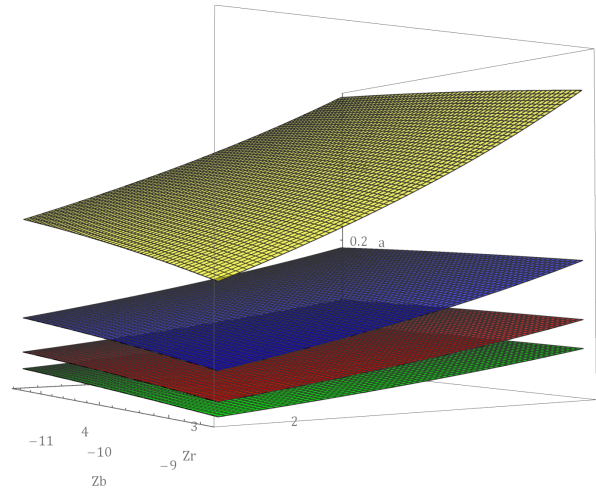
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.8: Gráfico en 3 dimensiones de a vs z_r y z_b para diferentes valores de α manteniendo r constante.

En la figura (4.10) podemos apreciar como varia el parámetro de rotación a para rangos de los desplazamientos al rojo y al azul y para distintos valores de α .

Capítulo 5

Conclusiones

1. Hemos calculado expresiones algebraicas para la masa y el parámetro de rotación de un agujero negro de Kerr MOG en términos del corrimiento al rojo y al azul de fotones emitidos por partículas geodésicas masivas. Nuestro resultado es válido para órbitas circulares fuera del plano ecuatorial.
2. Los métodos implementados en este trabajo de tesis son validos para cualquier métrica, incluso para aquellas que son perturbaciones de las soluciones clásicas.
3. Partiendo de nuestro resultado general, si se considera el escenario de órbitas circulares y plano ecuatorial, obtenemos resultados que han sido publicados (Herrera et al, 2018).

Trabajo a futuro

En el futuro cuando se tenga Data experimental de los corrimientos al rojo y al azul de estrellas orbitando el agujero negro, nuestros resultados para z_r y z_b pueden ser útiles para probar la teoría de la relatividad general para campos gravitacionales fuertes, o bien, para predecir pequeñas desviaciones de esta que impliquen una teoría de gravedad modificada.

Como trabajo a futuro, nos gustaría resolver al menos numéricamente el caso de órbitas elípticas y fuera del plano ecuatorial.

También como trabajo a futuro intentaremos derivar una expresión para el parámetro de impacto b en términos de la masa M , el parámetro de rotación a , la distancia r y la constante de Carter k del agujero negro de Kerr-MOG.

Capítulo 6

Apéndice

En este capítulo mostramos todos los cálculos desarrollados con el programa Wolfram Mathematica, todos los códigos empleados para realizar las gráficas mostradas en la sección de análisis numérico son mostrados a continuación.

Definimos las siguientes cantidades que aparecen en la energía y las componentes del tensor métrico

$$(*G = 6.67 * 10^{-11}; *)$$

$$(*\alpha=0.02*)$$

$$(*r = 1.79 * 10^{13}*)$$

$$(*\theta = \frac{\pi}{3}; *)$$

$$(*Q = 0.1; *)$$

$$M1 = G * M;$$

$$M2 = \alpha * M * M * G;$$

$$u = \frac{1}{r};$$

$$\Sigma1 = r^2 + a^2 * \text{Cos}[\theta]^2;$$

$$\Delta = r^2 - 2 * M1 * r + a^2 + M2;$$

Definimos las componentes del tensor métrico

$$g_{tt} = - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2[\theta]}{\Sigma} \right);$$

$$g_{rr} = \frac{\Sigma}{\Delta};$$

$$g_{\theta\theta} = \Sigma;$$

Definimos las variables f y α las cuales se emplean para simplificar las expresiones

$$P1 = u(a^2 + M1) - M;$$

$$A = (3 * M - 2 * M2 * u)u - 1;$$

$$B = u(a^2 + M2) - M;$$

$$C1 = (3 * M * u - 1)u - 2 * u^3(a^2 + M2);$$

$$f1 = 4 * a^2 * u^3(M1 - M2 * u) - A * A;$$

$$f2 = 4 * a^2 * u(1 - M1 * u) + 2 * A * B;$$

$$f3 = 2 * A * C1 + 4 * a^2 * u^4 * P1;$$

$$f4 = B * B;$$

$$f5 = 2 * B * C1;$$

$$f6 = C1 * C1;$$

$$\alpha1 = -\frac{1}{2}f2;$$

$$\alpha2 = \frac{-1}{2}f3;$$

$$\alpha 3 = f2 * f2 - 4 * f1 * f4;$$

$$\alpha 4 = 2 * (2 * f1 * f5 - f2 * f3);$$

$$\alpha 5 = f3 * f3 - 4 * f1 * f6;$$

$$\alpha 6 = 2 * f1 * u;$$

Definimos x en términos de la constante de Carter

$$x_{\text{plus}} = \frac{+\sqrt{\alpha 1 + \alpha 2 * Q + \frac{1}{2}(\alpha 3 + \alpha 4 * Q + \alpha 5 * Q * Q)^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{\alpha 6}};$$

$$x_{\text{menos}} = \frac{-\sqrt{\alpha 1 + \alpha 2 * Q - \frac{1}{2}(\alpha 3 + \alpha 4 * Q + \alpha 5 * Q * Q)^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{\alpha 6}};$$

Gráfico de la componente g_{tt} para diferentes valores de α

```
Plot[{gtt/.M → 3.7 * 10^6 * 1.98 * 10^30/.α → 0/.a → 0.3, gtt/.M → 3.7 * 10^6 * 1.98 * 10^30/.
α → 0.2/.a → 0.3,
gtt/.M → 3.7 * 10^6 * 1.98 * 10^30/.α → 0.3/.a → 0.3, gtt/.M → 3.7 * 10^6 * 1.98 * 10^30/.
α → 0.4/.a → 0.3},
{r, 0, 1.79 * 1013}, PlotTheme → "Scientific",
FrameLabel → {Style[r, Italic, Black, 15], Style["gtt", Italic, Black, 13]},
PlotStyle → {Orange, Blue, Red, Green},
BaseStyle → {FontSize → 11}, LabelStyle → Directive[Thick, FontFamily → "Helvetica"],
LabelStyle → Thick,
PlotLegends → Placed[{"α=0", "α=0.2", "α=0.3", "α=0.4"}, {.77, .45}], Frame → True]
```

```

Export["T1.png",
Plot[{gtt/.M -> 3.7 * 10^6 * 1.98 * 10^30/.alpha -> 0/.a -> 0.3, gtt/.M -> 3.7 * 10^6 * 1.98 * 10^30/.
alpha -> 0.2/.a -> 0.3,
gtt/.M -> 3.7 * 10^6 * 1.98 * 10^30/.alpha -> 0.3/.a -> 0.3, gtt/.M -> 3.7 * 10^6 * 1.98 * 10^30/.
alpha -> 0.4/.a -> 0.3},
{r, 0, 1.79 * 10^13}, PlotTheme -> "Scientific",
FrameLabel -> {Style[r, Italic, Black, 15], Style["gtt", Italic, Black, 13]},
PlotStyle -> {Orange, Blue, Red, Green},
BaseStyle -> {FontSize -> 11}, LabelStyle -> Directive[Thick, FontFamily -> "Helvetica"]
LabelStyle -> Thick,
PlotLegends -> Placed[{ "alpha=0", "alpha=0.2", "alpha=0.3", "alpha=0.4"}, {.77, .45}]], ImageResolution -> 200]

```

T1.png

$$\text{Energia1} = (1 - M * u) + \text{xplus}^2(M - M1 * u) * u^3 + (M - (M1 + a^2) * u) * Q * u^3;$$

$$\text{Energia2} = (1 - M * u) + \text{xmenos}^2(M - M1 * u) * u^3 + (M - (M1 + a^2) * u) * Q * u^3;$$

$$\text{Solve}[\text{Energia2} == 0, M]$$

$$\{\{M \rightarrow 1.98599 \times 10^{13}\}, \{M \rightarrow 1.76022 \times 10^{25}\}, \{M \rightarrow 2.09024 \times 10^{25}\}\}$$

$$L_{\text{plus}} = \frac{+\sqrt{\alpha_1 + \alpha_2 * Q + \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_4 * Q + \alpha_5 * Q * Q)^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{\alpha_6}} + a * \text{Energia2};$$

$$L_{\text{menos}} = \frac{-\sqrt{\alpha_1 + \alpha_2 * Q - \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_4 * Q + \alpha_5 * Q * Q)^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{\alpha_6}} + a * \text{Energia2};$$

Definimos T en función de la energía y el momento angular

$$T = \text{Energia2} * (r^2 + a^2) - L_{\text{plus}} * a;$$

$$U_t = \left(\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \text{Sin}[\theta]^2 \right) * \frac{\text{Energia2}}{\Sigma_1} + \left(a - \frac{(r^2 + a^2)}{\Delta} \right) * \frac{a * L_{\text{plus}}}{\Sigma_1};$$

$$U_{\theta \text{plus}} = \frac{\sqrt{Q - \left(a^2 (1 - \text{Energia2} * \text{Energia2}) + \frac{L_{\text{plus}}^2}{\text{Sin}[\theta]^2} \right) * \text{Cos}[\theta]^2}}{\Sigma_1};$$

$$U_{\theta \text{menos}} = \frac{-\sqrt{Q - \left(a^2 (1 - \text{Energia2} * \text{Energia2}) + \frac{L_{\text{plus}}^2}{\text{Sin}[\theta]^2} \right) * \text{Cos}[\theta]^2}}{\Sigma_1};$$

$$U_{\phi} = \frac{a * T}{\Delta * \Sigma_1} - \frac{a * \text{Energia2}}{\Sigma_1} + \frac{L_{\text{plus}}}{\Sigma_1 * \text{Sin}[\theta]^2};$$

$$k_{\theta \text{plus}} = \frac{+\sqrt{Q - \left(-a^2 * \text{Energia2} * \text{Energia2} + \frac{L_{\text{plus}}^2}{\text{Sin}[\theta]^2} \right) * \text{Cos}[\theta]^2}}{\Sigma_1};$$

$$k_{\theta \text{menos}} = \frac{-\sqrt{Q - \left(-a^2 * \text{Energia2} * \text{Energia2} + \frac{L_{\text{plus}}^2}{\text{Sin}[\theta]^2} \right) * \text{Cos}[\theta]^2}}{\Sigma_1};$$

$$b_{\text{plus}} = \frac{L_{\text{plus}}}{\text{Energia2}};$$

$$b_{\text{menos}} = \frac{L_{\text{menos}}}{\text{Energia2}};$$

$$w\phi = 3.33;$$

$$w\theta = 0.45;$$

$$k\theta d = 1.1;$$

$$Utd = 0.85;$$

$$ZR = 0.01;$$

$$ZB = 0.02;$$

Definimos 4 desplazamientos, 2 al rojo y 2 al azul para incluir las dos raíces de las velocidades del emisor

Desplazamientos al rojo

$$ZR1 = \left(Ut * w\phi * bmenos - U\phi * bmenos + \left(\frac{g\theta\theta}{Energia2} \right) * (U\phi * w\theta * k\theta d - w\phi * U\theta plus * k\theta plus * bmenos) \right) / \\ \left(Utd * (1 - w\phi * bmenos) + Utd * \left(\frac{g\theta\theta}{Energia2} \right) * \left(w\phi * bmenos - 2 + \left(\frac{g\theta\theta}{Energia2} \right) * w\theta * k\theta d \right) * w\theta * k\theta d \right)$$

$$ZR2 = \left(Ut * w\phi * bmenos - U\phi * bmenos + \left(\frac{g\theta\theta}{Energia2} \right) * (U\phi * w\theta * k\theta d - w\phi * U\theta menos * k\theta menos * bmenos) \right) / \\ \left(Utd * (1 - w\phi * bmenos) + Utd * \left(\frac{g\theta\theta}{Energia2} \right) * \left(w\phi * bmenos - 2 + \left(\frac{g\theta\theta}{Energia2} \right) * w\theta * k\theta d \right) * w\theta * k\theta d \right);$$

Desplazamientos al azul

$$ZB1 = \left(Ut * w\phi * bplus - U\phi * bplus + \left(\frac{g\theta\theta}{Energia2} \right) * (U\phi * w\theta * k\theta d - w\phi * U\theta plus * k\theta plus * bplus) \right) / \\ \left(Utd * (1 - w\phi * bplus) + Utd * \left(\frac{g\theta\theta}{Energia2} \right) * \left(w\phi * bplus - 2 + \left(\frac{g\theta\theta}{Energia2} \right) * w\theta * k\theta d \right) * w\theta * k\theta d \right);$$

$$ZB2 = \left(Ut * w\phi * bplus - U\phi * bplus + \left(\frac{g\theta\theta}{Energia2} \right) * (U\phi * w\theta * k\theta d - w\phi * U\theta menos * k\theta menos * bplus) \right) / \\ \left(Utd * (1 - w\phi * bplus) + Utd * \left(\frac{g\theta\theta}{Energia2} \right) * \left(w\phi * bplus - 2 + \left(\frac{g\theta\theta}{Energia2} \right) * w\theta * k\theta d \right) * w\theta * k\theta d \right);$$

Expandimos el desplazamiento al rojo ZR1 para mostrar la magnitud del cálculo

[illegible]

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\sqrt{\left(\left(\frac{4a^2(1-\frac{GM}{r})}{r} + 2\left(-M + \frac{a^2+GM^2\alpha}{r}\right)\left(-1 + \frac{3M-2GM^2\alpha}{r}\right)\right)^2\right.} \\
& - 4\left(-M + \frac{a^2+GM^2\alpha}{r}\right)^2\left(\frac{4a^2(GM-\frac{GM^2\alpha}{r})}{r^3} - \left(-1 + \frac{3M-2GM^2\alpha}{r}\right)^2\right) \\
& + Q^2\left(\left(\frac{4a^2(-M+\frac{a^2+GM}{r})}{r^4} + 2\left(\frac{-1+\frac{3M}{r}}{r} - \frac{2(a^2+GM^2\alpha)}{r^3}\right)\left(-1 + \frac{3M-2GM^2\alpha}{r}\right)\right)^2\right. \\
& - 4\left(\frac{-1+\frac{3M}{r}}{r} - \frac{2(a^2+GM^2\alpha)}{r^3}\right)^2\left(\frac{4a^2(GM-\frac{GM^2\alpha}{r})}{r^3} - \left(-1 + \frac{3M-2GM^2\alpha}{r}\right)^2\right) \\
& + 2Q\left(-\left(\frac{4a^2(-M+\frac{a^2+GM}{r})}{r^4} + 2\left(\frac{-1+\frac{3M}{r}}{r} - \frac{2(a^2+GM^2\alpha)}{r^3}\right)\left(-1 + \frac{3M-2GM^2\alpha}{r}\right)\right)\left(\frac{4a^2(1-\frac{GM}{r})}{r} + 2\left(-M + \frac{a^2+GM^2\alpha}{r}\right)\right.\right. \\
& \left.\left(-1 + \frac{3M-2GM^2\alpha}{r}\right) + 4\left(\frac{-1+\frac{3M}{r}}{r} - \frac{2(a^2+GM^2\alpha)}{r^3}\right)\left(-M + \frac{a^2+GM^2\alpha}{r}\right)\left(\frac{4a^2(GM-\frac{GM^2\alpha}{r})}{r^3} - \left(-1 + \frac{3M-2GM^2\alpha}{r}\right)^2\right)\right)/ \\
& \left(2r^2\left(\frac{4a^2(GM-\frac{GM^2\alpha}{r})}{r^3} - \left(-1 + \frac{3M-2GM^2\alpha}{r}\right)^2\right)\right)/((a^2-2GMr+r^2+GM^2\alpha)(r^2+a^2\cos[\theta]^2)) \\
& + \frac{1}{r^2+a^2\cos[\theta]^2}\left(\left(\sqrt{\frac{1}{2}Q\left(-\frac{4a^2(-M+\frac{a^2+GM}{r})}{r^4} - 2\left(\frac{-1+\frac{3M}{r}}{r} - \frac{2(a^2+GM^2\alpha)}{r^3}\right)\left(-1 + \frac{3M-2GM^2\alpha}{r}\right)\right)}\right.\right. \\
& \left.+\frac{1}{2}\left(-\frac{4a^2(1-\frac{GM}{r})}{r} - 2\left(-M + \frac{a^2+GM^2\alpha}{r}\right)\left(-1 + \frac{3M-2GM^2\alpha}{r}\right)\right)\right) \\
& + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\left(\frac{4a^2(1-\frac{GM}{r})}{r} + 2\left(-M + \frac{a^2+GM^2\alpha}{r}\right)\left(-1 + \frac{3M-2GM^2\alpha}{r}\right)\right)^2 - 4\left(-M + \frac{a^2+GM^2\alpha}{r}\right)^2\right.} \\
& \left(\frac{4a^2(GM-\frac{GM^2\alpha}{r})}{r^3} - \left(-1 + \frac{3M-2GM^2\alpha}{r}\right)^2\right) + Q^2\left(\left(\frac{4a^2(-M+\frac{a^2+GM}{r})}{r^4} + 2\left(\frac{-1+\frac{3M}{r}}{r} - \frac{2(a^2+GM^2\alpha)}{r^3}\right)\left(-1 + \frac{3M-2GM^2\alpha}{r}\right)\right)^2\right. \\
& - 4\left(\frac{-1+\frac{3M}{r}}{r} - \frac{2(a^2+GM^2\alpha)}{r^3}\right)^2\left(\frac{4a^2(GM-\frac{GM^2\alpha}{r})}{r^3} - \left(-1 + \frac{3M-2GM^2\alpha}{r}\right)^2\right) \\
& + 2Q\left(-\left(\frac{4a^2(-M+\frac{a^2+GM}{r})}{r^4} + 2\left(\frac{-1+\frac{3M}{r}}{r} - \frac{2(a^2+GM^2\alpha)}{r^3}\right)\left(-1 + \frac{3M-2GM^2\alpha}{r}\right)\right)\right. \\
& \left(\frac{4a^2(1-\frac{GM}{r})}{r} + 2\left(-M + \frac{a^2+GM^2\alpha}{r}\right)\left(-1 + \frac{3M-2GM^2\alpha}{r}\right)\right) + 4\left(\frac{-1+\frac{3M}{r}}{r} - \frac{2(a^2+GM^2\alpha)}{r^3}\right)\left(-M + \frac{a^2+GM^2\alpha}{r}\right) \\
& \left.\left(\frac{4a^2(GM-\frac{GM^2\alpha}{r})}{r^3} - \left(-1 + \frac{3M-2GM^2\alpha}{r}\right)^2\right)\right)/\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{4a^2(GM-\frac{GM^2\alpha}{r})}{r^3} - \left(-1 + \frac{3M-2GM^2\alpha}{r}\right)^2}\right) \\
& + a\left(1 + \frac{Q(M-\frac{a^2+GM}{r})}{r^3} - \frac{M}{r} + \left(M - \frac{GM}{r}\right)\left(\frac{1}{2}Q\left(-\frac{4a^2(-M+\frac{a^2+GM}{r})}{r^4} - 2\left(\frac{-1+\frac{3M}{r}}{r} - \frac{2(a^2+GM^2\alpha)}{r^3}\right)\right.\right.\right. \\
& \left.\left(-1 + \frac{3M-2GM^2\alpha}{r}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{4a^2(1-\frac{GM}{r})}{r} - 2\left(-M + \frac{a^2+GM^2\alpha}{r}\right)\left(-1 + \frac{3M-2GM^2\alpha}{r}\right)\right)\right) \\
& - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\left(\frac{4a^2(1-\frac{GM}{r})}{r} + 2\left(-M + \frac{a^2+GM^2\alpha}{r}\right)\left(-1 + \frac{3M-2GM^2\alpha}{r}\right)\right)^2\right.} \\
& - 4\left(-M + \frac{a^2+GM^2\alpha}{r}\right)^2\left(\frac{4a^2(GM-\frac{GM^2\alpha}{r})}{r^3} - \left(-1 + \frac{3M-2GM^2\alpha}{r}\right)^2\right) \\
& + Q^2\left(\left(\frac{4a^2(-M+\frac{a^2+GM}{r})}{r^4} + 2\left(\frac{-1+\frac{3M}{r}}{r} - \frac{2(a^2+GM^2\alpha)}{r^3}\right)\left(-1 + \frac{3M-2GM^2\alpha}{r}\right)\right)^2\right. \\
& - 4\left(\frac{-1+\frac{3M}{r}}{r} - \frac{2(a^2+GM^2\alpha)}{r^3}\right)^2\left(\frac{4a^2(GM-\frac{GM^2\alpha}{r})}{r^3} - \left(-1 + \frac{3M-2GM^2\alpha}{r}\right)^2\right) \\
& + 2Q\left(-\left(\frac{4a^2(-M+\frac{a^2+GM}{r})}{r^4} + 2\left(\frac{-1+\frac{3M}{r}}{r} - \frac{2(a^2+GM^2\alpha)}{r^3}\right)\left(-1 + \frac{3M-2GM^2\alpha}{r}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(-1 + \frac{3M - 2GM^2\alpha}{r} \right) \left(\frac{4a^2(1 - \frac{GM}{r})}{r} + 2 \left(-M + \frac{a^2 + GM^2\alpha}{r} \right) \left(-1 + \frac{3M - 2GM^2\alpha}{r} \right) \right) \\
& + 4 \left(\frac{-1 + \frac{3M}{r}}{r} - \frac{2(a^2 + GM^2\alpha)}{r^3} \right) \left(-M + \frac{a^2 + GM^2\alpha}{r} \right) \left(\frac{4a^2(GM - \frac{GM^2\alpha}{r})}{r^3} - \left(-1 + \frac{3M - 2GM^2\alpha}{r} \right)^2 \right) / \\
& \left(2r^2 \left(\frac{4a^2(GM - \frac{GM^2\alpha}{r})}{r^3} - \left(-1 + \frac{3M - 2GM^2\alpha}{r} \right)^2 \right) - a \left(\left(\sqrt{\frac{1}{2}Q} \left(-\frac{4a^2(-M + \frac{a^2 + GM}{r})}{r^4} - 2 \left(\frac{-1 + \frac{3M}{r}}{r} - \frac{2(a^2 + GM^2\alpha)}{r^3} \right) \right) \right. \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} \left(-\frac{4a^2(1 - \frac{GM}{r})}{r} - 2 \left(-M + \frac{a^2 + GM^2\alpha}{r} \right) \left(-1 + \frac{3M - 2GM^2\alpha}{r} \right) \right) \\
& + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\left(\frac{4a^2(1 - \frac{GM}{r})}{r} + 2 \left(-M + \frac{a^2 + GM^2\alpha}{r} \right) \left(-1 + \frac{3M - 2GM^2\alpha}{r} \right) \right)^2 - 4 \left(-M + \frac{a^2 + GM^2\alpha}{r} \right)^2 \left(\frac{4a^2(GM - \frac{GM^2\alpha}{r})}{r^3} \right)} \right. \\
& - \left(-1 + \frac{3M - 2GM^2\alpha}{r} \right)^2 + Q^2 \left(\left(\frac{4a^2(-M + \frac{a^2 + GM}{r})}{r^4} + 2 \left(\frac{-1 + \frac{3M}{r}}{r} - \frac{2(a^2 + GM^2\alpha)}{r^3} \right) \left(-1 + \frac{3M - 2GM^2\alpha}{r} \right) \right)^2 \\
& - 4 \left(\frac{-1 + \frac{3M}{r}}{r} - \frac{2(a^2 + GM^2\alpha)}{r^3} \right)^2 \left(\frac{4a^2(GM - \frac{GM^2\alpha}{r})}{r^3} - \left(-1 + \frac{3M - 2GM^2\alpha}{r} \right)^2 \right) \\
& + 2Q \left(- \left(\frac{4a^2(-M + \frac{a^2 + GM}{r})}{r^4} + 2 \left(\frac{-1 + \frac{3M}{r}}{r} - \frac{2(a^2 + GM^2\alpha)}{r^3} \right) \left(-1 + \frac{3M - 2GM^2\alpha}{r} \right) \right) \left(\frac{4a^2(1 - \frac{GM}{r})}{r} + 2 \left(-M + \frac{a^2 + GM^2\alpha}{r} \right) \right. \right. \\
& \left. \left(-1 + \frac{3M - 2GM^2\alpha}{r} \right) + 4 \left(\frac{-1 + \frac{3M}{r}}{r} - \frac{2(a^2 + GM^2\alpha)}{r^3} \right) \left(-M + \frac{a^2 + GM^2\alpha}{r} \right) \left(\frac{4a^2(GM - \frac{GM^2\alpha}{r})}{r^3} - \left(-1 + \frac{3M - 2GM^2\alpha}{r} \right)^2 \right) \right) / \\
& \left(\sqrt{2} \sqrt{\frac{4a^2(GM - \frac{GM^2\alpha}{r})}{r^3} - \left(-1 + \frac{3M - 2GM^2\alpha}{r} \right)^2} \right) + a \left(1 + \frac{Q(M - \frac{a^2 + GM}{r})}{r^3} - \frac{M}{r} + \left((M - \frac{GM}{r}) \right. \right. \\
& \left. \left(\frac{1}{2}Q \left(-\frac{4a^2(-M + \frac{a^2 + GM}{r})}{r^4} - 2 \left(\frac{-1 + \frac{3M}{r}}{r} - \frac{2(a^2 + GM^2\alpha)}{r^3} \right) \left(-1 + \frac{3M - 2GM^2\alpha}{r} \right) \right) \right) \\
& + \frac{1}{2} \left(-\frac{4a^2(1 - \frac{GM}{r})}{r} - 2 \left(-M + \frac{a^2 + GM^2\alpha}{r} \right) \left(-1 + \frac{3M - 2GM^2\alpha}{r} \right) \right) \\
& - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\left(\frac{4a^2(1 - \frac{GM}{r})}{r} + 2 \left(-M + \frac{a^2 + GM^2\alpha}{r} \right) \left(-1 + \frac{3M - 2GM^2\alpha}{r} \right) \right)^2} \right. \\
& - 4 \left(-M + \frac{a^2 + GM^2\alpha}{r} \right)^2 \left(\frac{4a^2(GM - \frac{GM^2\alpha}{r})}{r^3} - \left(-1 + \frac{3M - 2GM^2\alpha}{r} \right)^2 \right) \\
& + Q^2 \left(\left(\frac{4a^2(-M + \frac{a^2 + GM}{r})}{r^4} + 2 \left(\frac{-1 + \frac{3M}{r}}{r} - \frac{2(a^2 + GM^2\alpha)}{r^3} \right) \left(-1 + \frac{3M - 2GM^2\alpha}{r} \right) \right)^2 - 4 \left(\frac{-1 + \frac{3M}{r}}{r} - \frac{2(a^2 + GM^2\alpha)}{r^3} \right)^2 \right. \\
& \left(\frac{4a^2(GM - \frac{GM^2\alpha}{r})}{r^3} - \left(-1 + \frac{3M - 2GM^2\alpha}{r} \right)^2 \right) + 2Q \left(- \left(\frac{4a^2(-M + \frac{a^2 + GM}{r})}{r^4} + 2 \left(\frac{-1 + \frac{3M}{r}}{r} - \frac{2(a^2 + GM^2\alpha)}{r^3} \right) \right) \right. \\
& \left(-1 + \frac{3M - 2GM^2\alpha}{r} \right) \left(\frac{4a^2(1 - \frac{GM}{r})}{r} + 2 \left(-M + \frac{a^2 + GM^2\alpha}{r} \right) \left(-1 + \frac{3M - 2GM^2\alpha}{r} \right) \right) + 4 \left(\frac{-1 + \frac{3M}{r}}{r} - \frac{2(a^2 + GM^2\alpha)}{r^3} \right) \\
& \left(-M + \frac{a^2 + GM^2\alpha}{r} \right) \left(\frac{4a^2(GM - \frac{GM^2\alpha}{r})}{r^3} - \left(-1 + \frac{3M - 2GM^2\alpha}{r} \right)^2 \right) / \\
& \left(2r^2 \left(\frac{4a^2(GM - \frac{GM^2\alpha}{r})}{r^3} - \left(-1 + \frac{3M - 2GM^2\alpha}{r} \right)^2 \right) \right) / ((a^2 - 2GMr + r^2 + GM^2\alpha)(r^2 + a^2 \cos[\theta]^2)) \\
& + \frac{1}{r^2 + a^2 \cos[\theta]^2} \left(\left(\sqrt{\frac{1}{2}Q} \left(-\frac{4a^2(-M + \frac{a^2 + GM}{r})}{r^4} - 2 \left(\frac{-1 + \frac{3M}{r}}{r} - \frac{2(a^2 + GM^2\alpha)}{r^3} \right) \left(-1 + \frac{3M - 2GM^2\alpha}{r} \right) \right) \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} \left(-\frac{4a^2(1 - \frac{GM}{r})}{r} - 2 \left(-M + \frac{a^2 + GM^2\alpha}{r} \right) \left(-1 + \frac{3M - 2GM^2\alpha}{r} \right) \right) \\
& + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\left(\frac{4a^2(1 - \frac{GM}{r})}{r} + 2 \left(-M + \frac{a^2 + GM^2\alpha}{r} \right) \left(-1 + \frac{3M - 2GM^2\alpha}{r} \right) \right)^2 - 4 \left(-M + \frac{a^2 + GM^2\alpha}{r} \right)^2} \right)
\end{aligned}$$

Caso especial (plano ecuatorial)

Definimos algunas constantes de importancia

$$G = 6.67 * 10^{-11};$$

$$\alpha = 0.02;$$

$$r = 1.79 * 10^{13};$$

$$\theta = \frac{\pi}{3};$$

$$Q = 0.1;$$

$$M1 = G * M;$$

$$M2 = \alpha * M * M * G;$$

$$u = \frac{1}{r};$$

$$\Sigma1 = r^2 + a^2 * \text{Cos}[\theta]^2;$$

$$\Delta = r^2 - 2 * M1 * r + a^2 + M2;$$

Definimos las componentes del tensor métrico

$$g_{tt} = - \left(\frac{\Delta - a^2 * \text{Sin}[\theta]^2}{\Sigma1} \right);$$

$$g_{rr} = \frac{\Sigma1}{\Delta};$$

$$g_{\theta\theta} = \Sigma1;$$

Definimos las masas M_α y M_β

$$M\alpha = M(1 + \alpha);$$

$$M\beta = \frac{\alpha}{1+\alpha} * M\alpha^2;$$

$$Z_R = 22.5;$$

$$Z_B = -22.501;$$

$$r = 1.79 * 10^{13};$$

Definimos las variables λ y η en términos de los desplazamientos al rojo y al azul.

$$w = M\alpha - \frac{M\beta}{r};$$

$$\lambda = (Z_R + Z_B)^2;$$

$$\eta = (Z_R - Z_B)^2;$$

$$(*G = 6.67 * 10^{-11}*)$$

$$(*C = 3.0 * 10^8*)$$

$$\alpha = 10;$$

Esta es la expresión para la masa, un polinomio de orden 16.

$$\begin{aligned} & ((r^2 + 2 * M\beta - 3 * M\alpha * r)(r^2 - 2 * M\alpha * r + M\beta) * ((2 * M\alpha * r - M\beta)^2 \eta - \lambda(r^4)) - \\ & 4 * r^3 w * (2 * M\alpha * r - M\beta)^2)^2 - (4 * \lambda * r^5 w * ((r^2 - 2 * M\alpha * r + M\beta)^3 * \\ & (((2 * M\alpha * r - M\beta)^2) \eta - \lambda * r^4)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4r^5 (r^2 - 2Mr(1 + \alpha) + M^2\alpha(1 + \alpha))^3 \left(M(1 + \alpha) - \frac{M^2\alpha(1 + \alpha)}{r} \right) \lambda \\
& \left((2Mr(1 + \alpha) - M^2\alpha(1 + \alpha))^2 \eta - r^4 \lambda \right) \\
& + \left(-4r^3 (2Mr(1 + \alpha) - M^2\alpha(1 + \alpha))^2 \left(M(1 + \alpha) - \frac{M^2\alpha(1 + \alpha)}{r} \right) + (r^2 - 2Mr(1 + \alpha) + M^2\alpha(1 + \alpha)) \right) \\
& (r^2 - 3Mr(1 + \alpha) + 2M^2\alpha(1 + \alpha)) \left((2Mr(1 + \alpha) - M^2\alpha(1 + \alpha))^2 \eta - r^4 \lambda \right)^2
\end{aligned}$$

Resolvemos para calcular las raíces de M y obtenemos 16 soluciones

Solve[

$$\begin{aligned}
& (((r^2 + 2 * M\beta - 3 * M\alpha * r)(r^2 - 2 * M\alpha * r + M\beta) * (\eta(2 * M\alpha * r - M\beta)^2 - \lambda * r^4) - \\
& 4 * r^3 w * (2 * M\alpha * r - M\beta)^2) ^2) -
\end{aligned}$$

$$(4 * \lambda * r^5 w * ((r^2 - 2 * M\alpha * r + M\beta)^3) * (\eta((2 * M\alpha * r - M\beta)^2) - \lambda * r^4)) == 0,$$

M]

$$\begin{aligned}
& \{M \rightarrow -1.80803 \times 10^7\}, \{M \rightarrow -1.80799 \times 10^7\}, \{M \rightarrow 1.80805 \times 10^7\}, \{M \rightarrow 1.80809 \times 10^7\}, \\
& \{M \rightarrow 7.51927 \times 10^{11}\}, \{M \rightarrow 7.51967 \times 10^{11}\}, \{M \rightarrow 1.25561 \times 10^{12}\}, \{M \rightarrow 1.25561 \times 10^{12}\}, \\
& \{M \rightarrow 1.93308 \times 10^{12}\}, \{M \rightarrow 1.93314 \times 10^{12}\}, \{M \rightarrow 2.32428 \times 10^{12}\}, \{M \rightarrow 2.32443 \times 10^{12}\}, \\
& \{M \rightarrow 3.57518 \times 10^{12}\}, \{M \rightarrow 3.5783 \times 10^{12}\}, \{M \rightarrow 3.58174 \times 10^{12}\}, \{M \rightarrow 3.58569 \times 10^{12}\}
\end{aligned}$$

Tomamos la raíz # 5 la cual nos da una masa positiva

M =

$$\begin{aligned}
& \text{Root} [r^{16} \text{ZB}^4 + 4r^{16} \text{ZB}^3 \text{ZR} + 6r^{16} \text{ZB}^2 \text{ZR}^2 + 4r^{16} \text{ZBZR}^3 + r^{16} \text{ZR}^4 + \\
& (-6r^{15} \text{ZB}^4 - 24r^{15} \text{ZB}^3 \text{ZR} - 36r^{15} \text{ZB}^2 \text{ZR}^2 - 24r^{15} \text{ZBZR}^3 - 6r^{15} \text{ZR}^4 - 6r^{15} \text{ZB}^4 \alpha - \\
& 24r^{15} \text{ZB}^3 \text{ZR} \alpha - 36r^{15} \text{ZB}^2 \text{ZR}^2 \alpha - 24r^{15} \text{ZBZR}^3 \alpha - 6r^{15} \text{ZR}^4 \alpha) \#1 + \\
& (5r^{14} \text{ZB}^4 + 52r^{14} \text{ZB}^3 \text{ZR} + 94r^{14} \text{ZB}^2 \text{ZR}^2 + 52r^{14} \text{ZBZR}^3 + 5r^{14} \text{ZR}^4 + 12r^{14} \text{ZB}^4 \alpha + \\
& 112r^{14} \text{ZB}^3 \text{ZR} \alpha + 200r^{14} \text{ZB}^2 \text{ZR}^2 \alpha + 112r^{14} \text{ZBZR}^3 \alpha + 12r^{14} \text{ZR}^4 \alpha + 7r^{14} \text{ZB}^4 \alpha^2 + \\
& 60r^{14} \text{ZB}^3 \text{ZR} \alpha^2 + 106r^{14} \text{ZB}^2 \text{ZR}^2 \alpha^2 + 60r^{14} \text{ZBZR}^3 \alpha^2 + 7r^{14} \text{ZR}^4 \alpha^2) \#1^2 + \\
& (32r^{13} \text{ZB}^2 + 52r^{13} \text{ZB}^4 + 64r^{13} \text{ZBZR} - 48r^{13} \text{ZB}^3 \text{ZR} + 32r^{13} \text{ZR}^2 - 200r^{13} \text{ZB}^2 \text{ZR}^2 - \\
& 48r^{13} \text{ZBZR}^3 + 52r^{13} \text{ZR}^4 + 96r^{13} \text{ZB}^2 \alpha + 156r^{13} \text{ZB}^4 \alpha + 192r^{13} \text{ZBZR} \alpha - 176r^{13} \text{ZB}^3 \text{ZR} \alpha +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 96r^{13}Z\mathbf{R}^2\alpha - 664r^{13}Z\mathbf{B}^2Z\mathbf{R}^2\alpha - 176r^{13}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}^3\alpha + 156r^{13}Z\mathbf{R}^4\alpha + 96r^{13}Z\mathbf{B}^2\alpha^2 + \\
& 156r^{13}Z\mathbf{B}^4\alpha^2 + 192r^{13}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}\alpha^2 - 208r^{13}Z\mathbf{B}^3Z\mathbf{R}\alpha^2 + 96r^{13}Z\mathbf{R}^2\alpha^2 - 728r^{13}Z\mathbf{B}^2Z\mathbf{R}^2\alpha^2 - \\
& 208r^{13}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}^3\alpha^2 + 156r^{13}Z\mathbf{R}^4\alpha^2 + 32r^{13}Z\mathbf{B}^2\alpha^3 + 52r^{13}Z\mathbf{B}^4\alpha^3 + 64r^{13}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}\alpha^3 - \\
& 80r^{13}Z\mathbf{B}^3Z\mathbf{R}\alpha^3 + 32r^{13}Z\mathbf{R}^2\alpha^3 - 264r^{13}Z\mathbf{B}^2Z\mathbf{R}^2\alpha^3 - 80r^{13}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}^3\alpha^3 + 52r^{13}Z\mathbf{R}^4\alpha^3) \#1^3 + \\
& (-160r^{12}Z\mathbf{B}^2 - 180r^{12}Z\mathbf{B}^4 - 320r^{12}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R} - 48r^{12}Z\mathbf{B}^3Z\mathbf{R} - 160r^{12}Z\mathbf{R}^2 + 520r^{12}Z\mathbf{B}^2Z\mathbf{R}^2 - \\
& 48r^{12}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}^3 - 180r^{12}Z\mathbf{R}^4 - 704r^{12}Z\mathbf{B}^2\alpha - 806r^{12}Z\mathbf{B}^4\alpha - 1408r^{12}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}\alpha - \\
& 152r^{12}Z\mathbf{B}^3Z\mathbf{R}\alpha - 704r^{12}Z\mathbf{R}^2\alpha + 2332r^{12}Z\mathbf{B}^2Z\mathbf{R}^2\alpha - 152r^{12}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}^3\alpha - 806r^{12}Z\mathbf{R}^4\alpha - \\
& 1152r^{12}Z\mathbf{B}^2\alpha^2 - 1339r^{12}Z\mathbf{B}^4\alpha^2 - 2304r^{12}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}\alpha^2 - 164r^{12}Z\mathbf{B}^3Z\mathbf{R}\alpha^2 - 1152r^{12}Z\mathbf{R}^2\alpha^2 + \\
& 3886r^{12}Z\mathbf{B}^2Z\mathbf{R}^2\alpha^2 - 164r^{12}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}^3\alpha^2 - 1339r^{12}Z\mathbf{R}^4\alpha^2 - 832r^{12}Z\mathbf{B}^2\alpha^3 - 980r^{12}Z\mathbf{B}^4\alpha^3 - \\
& 1664r^{12}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}\alpha^3 - 64r^{12}Z\mathbf{B}^3Z\mathbf{R}\alpha^3 - 832r^{12}Z\mathbf{R}^2\alpha^3 + 2856r^{12}Z\mathbf{B}^2Z\mathbf{R}^2\alpha^3 - \\
& 64r^{12}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}^3\alpha^3 - 980r^{12}Z\mathbf{R}^4\alpha^3 - 224r^{12}Z\mathbf{B}^2\alpha^4 - 267r^{12}Z\mathbf{B}^4\alpha^4 - 448r^{12}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}\alpha^4 - \\
& 4r^{12}Z\mathbf{B}^3Z\mathbf{R}\alpha^4 - 224r^{12}Z\mathbf{R}^2\alpha^4 + 782r^{12}Z\mathbf{B}^2Z\mathbf{R}^2\alpha^4 - 4r^{12}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}^3\alpha^4 - 267r^{12}Z\mathbf{R}^4\alpha^4) \#1^4 + \\
& (64r^{11}Z\mathbf{B}^2 + 128r^{11}Z\mathbf{B}^4 + 640r^{11}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R} + 640r^{11}Z\mathbf{B}^3Z\mathbf{R} + 64r^{11}Z\mathbf{R}^2 - 1536r^{11}Z\mathbf{B}^2Z\mathbf{R}^2 + \\
& 640r^{11}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}^3 + 128r^{11}Z\mathbf{R}^4 + 736r^{11}Z\mathbf{B}^2\alpha + 1012r^{11}Z\mathbf{B}^4\alpha + 4032r^{11}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}\alpha + \\
& 3312r^{11}Z\mathbf{B}^3Z\mathbf{R}\alpha + 736r^{11}Z\mathbf{R}^2\alpha - 8712r^{11}Z\mathbf{B}^2Z\mathbf{R}^2\alpha + 3312r^{11}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}^3\alpha + 1012r^{11}Z\mathbf{R}^4\alpha + \\
& 2344r^{11}Z\mathbf{B}^2\alpha^2 + 2814r^{11}Z\mathbf{B}^4\alpha^2 + 9808r^{11}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}\alpha^2 + 6840r^{11}Z\mathbf{B}^3Z\mathbf{R}\alpha^2 + \\
& 2344r^{11}Z\mathbf{R}^2\alpha^2 - 19596r^{11}Z\mathbf{B}^2Z\mathbf{R}^2\alpha^2 + 6840r^{11}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}^3\alpha^2 + 2814r^{11}Z\mathbf{R}^4\alpha^2 + \\
& 3256r^{11}Z\mathbf{B}^2\alpha^3 + 3650r^{11}Z\mathbf{B}^4\alpha^3 + 11632r^{11}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}\alpha^3 + 7048r^{11}Z\mathbf{B}^3Z\mathbf{R}\alpha^3 + \\
& 3256r^{11}Z\mathbf{R}^2\alpha^3 - 21876r^{11}Z\mathbf{B}^2Z\mathbf{R}^2\alpha^3 + 7048r^{11}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}^3\alpha^3 + 3650r^{11}Z\mathbf{R}^4\alpha^3 + \\
& 2104r^{11}Z\mathbf{B}^2\alpha^4 + 2266r^{11}Z\mathbf{B}^4\alpha^4 + 6768r^{11}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}\alpha^4 + 3624r^{11}Z\mathbf{B}^3Z\mathbf{R}\alpha^4 + \\
& 2104r^{11}Z\mathbf{R}^2\alpha^4 - 12132r^{11}Z\mathbf{B}^2Z\mathbf{R}^2\alpha^4 + 3624r^{11}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}^3\alpha^4 + 2266r^{11}Z\mathbf{R}^4\alpha^4 + \\
& 520r^{11}Z\mathbf{B}^2\alpha^5 + 546r^{11}Z\mathbf{B}^4\alpha^5 + 1552r^{11}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}\alpha^5 + 744r^{11}Z\mathbf{B}^3Z\mathbf{R}\alpha^5 + 520r^{11}Z\mathbf{R}^2\alpha^5 - \\
& 2676r^{11}Z\mathbf{B}^2Z\mathbf{R}^2\alpha^5 + 744r^{11}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}^3\alpha^5 + 546r^{11}Z\mathbf{R}^4\alpha^5) \#1^5 + \\
& (256r^{10} + 640r^{10}Z\mathbf{B}^2 + 432r^{10}Z\mathbf{B}^4 - 1280r^{10}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R} - 2368r^{10}Z\mathbf{B}^3Z\mathbf{R} + 640r^{10}Z\mathbf{R}^2 + \\
& 3872r^{10}Z\mathbf{B}^2Z\mathbf{R}^2 - 2368r^{10}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}^3 + 432r^{10}Z\mathbf{R}^4 + 1536r^{10}\alpha + 3616r^{10}Z\mathbf{B}^2\alpha + \\
& 2256r^{10}Z\mathbf{B}^4\alpha - 9664r^{10}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}\alpha - 15872r^{10}Z\mathbf{B}^3Z\mathbf{R}\alpha + 3616r^{10}Z\mathbf{R}^2\alpha + 27232r^{10}Z\mathbf{B}^2Z\mathbf{R}^2\alpha - \\
& 15872r^{10}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}^3\alpha + 2256r^{10}Z\mathbf{R}^4\alpha + 3840r^{10}\alpha^2 + 8088r^{10}Z\mathbf{B}^2\alpha^2 + 4511r^{10}Z\mathbf{B}^4\alpha^2 - \\
& 29904r^{10}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}\alpha^2 - 43932r^{10}Z\mathbf{B}^3Z\mathbf{R}\alpha^2 + 8088r^{10}Z\mathbf{R}^2\alpha^2 + 78858r^{10}Z\mathbf{B}^2Z\mathbf{R}^2\alpha^2 - \\
& 43932r^{10}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}^3\alpha^2 + 4511r^{10}Z\mathbf{R}^4\alpha^2 + 5120r^{10}\alpha^3 + 8984r^{10}Z\mathbf{B}^2\alpha^3 + 4116r^{10}Z\mathbf{B}^4\alpha^3 - \\
& 48592r^{10}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}\alpha^3 - 64368r^{10}Z\mathbf{B}^3Z\mathbf{R}\alpha^3 + 8984r^{10}Z\mathbf{R}^2\alpha^3 + 120568r^{10}Z\mathbf{B}^2Z\mathbf{R}^2\alpha^3 - \\
& 64368r^{10}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}^3\alpha^3 + 4116r^{10}Z\mathbf{R}^4\alpha^3 + 3840r^{10}\alpha^4 + 4984r^{10}Z\mathbf{B}^2\alpha^4 + 1362r^{10}Z\mathbf{B}^4\alpha^4 - \\
& 43792r^{10}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}\alpha^4 - 52712r^{10}Z\mathbf{B}^3Z\mathbf{R}\alpha^4 + 4984r^{10}Z\mathbf{R}^2\alpha^4 + 102796r^{10}Z\mathbf{B}^2Z\mathbf{R}^2\alpha^4 - \\
& 52712r^{10}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}^3\alpha^4 + 1362r^{10}Z\mathbf{R}^4\alpha^4 + 1536r^{10}\alpha^5 + 1128r^{10}Z\mathbf{B}^2\alpha^5 - 268r^{10}Z\mathbf{B}^4\alpha^5 - \\
& 20784r^{10}Z\mathbf{B}Z\mathbf{R}\alpha^5 - 22896r^{10}Z\mathbf{B}^3Z\mathbf{R}\alpha^5 + 1128r^{10}Z\mathbf{R}^2\alpha^5 + 46392r^{10}Z\mathbf{B}^2Z\mathbf{R}^2\alpha^5 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 22896r^{10}\text{ZBZR}^3\alpha^5 - 268r^{10}\text{ZR}^4\alpha^5 + 256r^{10}\alpha^6 + 16r^{10}\text{ZB}^2\alpha^6 - 201r^{10}\text{ZB}^4\alpha^6 - \\
& 4064r^{10}\text{ZBZR}\alpha^6 - 4124r^{10}\text{ZB}^3\text{ZR}\alpha^6 + 16r^{10}\text{ZR}^2\alpha^6 + 8666r^{10}\text{ZB}^2\text{ZR}^2\alpha^6 - \\
& 4124r^{10}\text{ZBZR}^3\alpha^6 - 201r^{10}\text{ZR}^4\alpha^6) \#1^6 + \\
& (-768r^9\text{ZB}^2 - 960r^9\text{ZB}^4 + 1536r^9\text{ZBZR} + 3840r^9\text{ZB}^3\text{ZR} - 768r^9\text{ZR}^2 - 5760r^9\text{ZB}^2\text{ZR}^2 + \\
& 3840r^9\text{ZBZR}^3 - 960r^9\text{ZR}^4 - 1024r^9\alpha - 7680r^9\text{ZB}^2\alpha - 8096r^9\text{ZB}^4\alpha + 15360r^9\text{ZBZR}\alpha + \\
& 34432r^9\text{ZB}^3\text{ZR}\alpha - 7680r^9\text{ZR}^2\alpha - 52672r^9\text{ZB}^2\text{ZR}^2\alpha + 34432r^9\text{ZBZR}^3\alpha - \\
& 8096r^9\text{ZR}^4\alpha - 6144r^9\alpha^2 - 29648r^9\text{ZB}^2\alpha^2 - 28056r^9\text{ZB}^4\alpha^2 + 62304r^9\text{ZBZR}\alpha^2 + \\
& 127680r^9\text{ZB}^3\text{ZR}\alpha^2 - 29648r^9\text{ZR}^2\alpha^2 - 199248r^9\text{ZB}^2\text{ZR}^2\alpha^2 + 127680r^9\text{ZBZR}^3\alpha^2 - \\
& 28056r^9\text{ZR}^4\alpha^2 - 15360r^9\alpha^3 - 59760r^9\text{ZB}^2\alpha^3 - 52340r^9\text{ZB}^4\alpha^3 + 135200r^9\text{ZBZR}\alpha^3 + \\
& 256352r^9\text{ZB}^3\text{ZR}\alpha^3 - 59760r^9\text{ZR}^2\alpha^3 - 408024r^9\text{ZB}^2\text{ZR}^2\alpha^3 + 256352r^9\text{ZBZR}^3\alpha^3 - \\
& 52340r^9\text{ZR}^4\alpha^3 - 20480r^9\alpha^4 - 69280r^9\text{ZB}^2\alpha^4 - 57120r^9\text{ZB}^4\alpha^4 + 171200r^9\text{ZBZR}\alpha^4 + \\
& 302848r^9\text{ZB}^3\text{ZR}\alpha^4 - 69280r^9\text{ZR}^2\alpha^4 - 491456r^9\text{ZB}^2\text{ZR}^2\alpha^4 + 302848r^9\text{ZBZR}^3\alpha^4 - \\
& 57120r^9\text{ZR}^4\alpha^4 - 15360r^9\alpha^5 - 46688r^9\text{ZB}^2\alpha^5 - 36600r^9\text{ZB}^4\alpha^5 + 127296r^9\text{ZBZR}\alpha^5 + \\
& 211392r^9\text{ZB}^3\text{ZR}\alpha^5 - 46688r^9\text{ZR}^2\alpha^5 - 349584r^9\text{ZB}^2\text{ZR}^2\alpha^5 + 211392r^9\text{ZBZR}^3\alpha^5 - \\
& 36600r^9\text{ZR}^4\alpha^5 - 6144r^9\alpha^6 - 17040r^9\text{ZB}^2\alpha^6 - 12776r^9\text{ZB}^4\alpha^6 + 51680r^9\text{ZBZR}\alpha^6 + \\
& 80960r^9\text{ZB}^3\text{ZR}\alpha^6 - 17040r^9\text{ZR}^2\alpha^6 - 136368r^9\text{ZB}^2\text{ZR}^2\alpha^6 + 80960r^9\text{ZBZR}^3\alpha^6 - \\
& 12776r^9\text{ZR}^4\alpha^6 - 1024r^9\alpha^7 - 2608r^9\text{ZB}^2\alpha^7 - 1876r^9\text{ZB}^4\alpha^7 + 8864r^9\text{ZBZR}\alpha^7 + \\
& 13152r^9\text{ZB}^3\text{ZR}\alpha^7 - 2608r^9\text{ZR}^2\alpha^7 - 22552r^9\text{ZB}^2\text{ZR}^2\alpha^7 + 13152r^9\text{ZBZR}^3\alpha^7 - 1876r^9\text{ZR}^4\alpha^7) \\
& \#1^7 + \\
& (576r^8\text{ZB}^4 - 2304r^8\text{ZB}^3\text{ZR} + 3456r^8\text{ZB}^2\text{ZR}^2 - 2304r^8\text{ZBZR}^3 + 576r^8\text{ZR}^4 + 3200r^8\text{ZB}^2\alpha + \\
& 8224r^8\text{ZB}^4\alpha - 6400r^8\text{ZBZR}\alpha - 32896r^8\text{ZB}^3\text{ZR}\alpha + 3200r^8\text{ZR}^2\alpha + 49344r^8\text{ZB}^2\text{ZR}^2\alpha - \\
& 32896r^8\text{ZBZR}^3\alpha + 8224r^8\text{ZR}^4\alpha + 1664r^8\alpha^2 + 25792r^8\text{ZB}^2\alpha^2 + 43256r^8\text{ZB}^4\alpha^2 - \\
& 51584r^8\text{ZBZR}\alpha^2 - 175776r^8\text{ZB}^3\text{ZR}\alpha^2 + 25792r^8\text{ZR}^2\alpha^2 + 265040r^8\text{ZB}^2\text{ZR}^2\alpha^2 - \\
& 175776r^8\text{ZBZR}^3\alpha^2 + 43256r^8\text{ZR}^4\alpha^2 + 9984r^8\alpha^3 + 87352r^8\text{ZB}^2\alpha^3 + 118892r^8\text{ZB}^4\alpha^3 - \\
& 176528r^8\text{ZBZR}\alpha^3 - 493760r^8\text{ZB}^3\text{ZR}\alpha^3 + 87352r^8\text{ZR}^2\alpha^3 + 749736r^8\text{ZB}^2\text{ZR}^2\alpha^3 - \\
& 493760r^8\text{ZBZR}^3\alpha^3 + 118892r^8\text{ZR}^4\alpha^3 + 24960r^8\alpha^4 + 161856r^8\text{ZB}^2\alpha^4 + \\
& 193127r^8\text{ZB}^4\alpha^4 - 332928r^8\text{ZBZR}\alpha^4 - 822244r^8\text{ZB}^3\text{ZR}\alpha^4 + 161856r^8\text{ZR}^2\alpha^4 + \\
& 1258234r^8\text{ZB}^2\text{ZR}^2\alpha^4 - 822244r^8\text{ZBZR}^3\alpha^4 + 193127r^8\text{ZR}^4\alpha^4 + 33280r^8\alpha^5 + \\
& 177744r^8\text{ZB}^2\alpha^5 + 193124r^8\text{ZB}^4\alpha^5 - 374112r^8\text{ZBZR}\alpha^5 - 844560r^8\text{ZB}^3\text{ZR}\alpha^5 + \\
& 177744r^8\text{ZR}^2\alpha^5 + 1302872r^8\text{ZB}^2\text{ZR}^2\alpha^5 - 844560r^8\text{ZBZR}^3\alpha^5 + 193124r^8\text{ZR}^4\alpha^5 + \\
& 24960r^8\alpha^6 + 115936r^8\text{ZB}^2\alpha^6 + 117266r^8\text{ZB}^4\alpha^6 - 250688r^8\text{ZBZR}\alpha^6 - \\
& 527480r^8\text{ZB}^3\text{ZR}\alpha^6 + 115936r^8\text{ZR}^2\alpha^6 + 820428r^8\text{ZB}^2\text{ZR}^2\alpha^6 - 527480r^8\text{ZBZR}^3\alpha^6 + \\
& 117266r^8\text{ZR}^4\alpha^6 + 9984r^8\alpha^7 + 41656r^8\text{ZB}^2\alpha^7 + 39784r^8\text{ZB}^4\alpha^7 - 92816r^8\text{ZBZR}\alpha^7 - \\
& 184272r^8\text{ZB}^3\text{ZR}\alpha^7 + 41656r^8\text{ZR}^2\alpha^7 + 288976r^8\text{ZB}^2\text{ZR}^2\alpha^7 - 184272r^8\text{ZBZR}^3\alpha^7 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 39784r^8Z\alpha^7 + 1664r^8\alpha^8 + 6368r^8ZB^2\alpha^8 + 5799r^8ZB^4\alpha^8 - 14656r^8ZBZR\alpha^8 - \\
& 27684r^8ZB^3ZR\alpha^8 + 6368r^8ZR^2\alpha^8 + 43770r^8ZB^2ZR^2\alpha^8 - 27684r^8ZBZR^3\alpha^8 + 5799r^8ZR^4\alpha^8) \\
& \#1^8 + \\
& (-2496r^7ZB^4\alpha + 9984r^7ZB^3ZR\alpha - 14976r^7ZB^2ZR^2\alpha + 9984r^7ZBZR^3\alpha - 2496r^7ZR^4\alpha - \\
& 5632r^7ZB^2\alpha^2 - 25792r^7ZB^4\alpha^2 + 11264r^7ZBZR\alpha^2 + 103168r^7ZB^3ZR\alpha^2 - \\
& 5632r^7ZR^2\alpha^2 - 154752r^7ZB^2ZR^2\alpha^2 + 103168r^7ZBZR^3\alpha^2 - 25792r^7ZR^4\alpha^2 - \\
& 1408r^7\alpha^3 - 42048r^7ZB^2\alpha^3 - 111928r^7ZB^4\alpha^3 + 84096r^7ZBZR\alpha^3 + 449696r^7ZB^3ZR\alpha^3 - \\
& 42048r^7ZR^2\alpha^3 - 675536r^7ZB^2ZR^2\alpha^3 + 449696r^7ZBZR^3\alpha^3 - 111928r^7ZR^4\alpha^3 - \\
& 8448r^7\alpha^4 - 133952r^7ZB^2\alpha^4 - 269658r^7ZB^4\alpha^4 + 268448r^7ZBZR\alpha^4 + \\
& 1090984r^7ZB^3ZR\alpha^4 - 133952r^7ZR^2\alpha^4 - 1642652r^7ZB^2ZR^2\alpha^4 + 1090984r^7ZBZR^3\alpha^4 - \\
& 269658r^7ZR^4\alpha^4 - 21120r^7\alpha^5 - 236160r^7ZB^2\alpha^5 - 397370r^7ZB^4\alpha^5 + 475040r^7ZBZR\alpha^5 + \\
& 1621480r^7ZB^3ZR\alpha^5 - 236160r^7ZR^2\alpha^5 - 2448220r^7ZB^2ZR^2\alpha^5 + 1621480r^7ZBZR^3\alpha^5 - \\
& 397370r^7ZR^4\alpha^5 - 28160r^7\alpha^6 - 248960r^7ZB^2\alpha^6 - 368516r^7ZB^4\alpha^6 + 503360r^7ZBZR\alpha^6 + \\
& 1518224r^7ZB^3ZR\alpha^6 - 248960r^7ZR^2\alpha^6 - 2299416r^7ZB^2ZR^2\alpha^6 + 1518224r^7ZBZR^3\alpha^6 - \\
& 368516r^7ZR^4\alpha^6 - 21120r^7\alpha^7 - 156992r^7ZB^2\alpha^7 - 210732r^7ZB^4\alpha^7 + 319424r^7ZBZR\alpha^7 + \\
& 877168r^7ZB^3ZR\alpha^7 - 156992r^7ZR^2\alpha^7 - 1332872r^7ZB^2ZR^2\alpha^7 + 877168r^7ZBZR^3\alpha^7 - \\
& 210732r^7ZR^4\alpha^7 - 8448r^7\alpha^8 - 54848r^7ZB^2\alpha^8 - 68098r^7ZB^4\alpha^8 + 112416r^7ZBZR\alpha^8 + \\
& 286536r^7ZB^3ZR\alpha^8 - 54848r^7ZR^2\alpha^8 - 436876r^7ZB^2ZR^2\alpha^8 + 286536r^7ZBZR^3\alpha^8 - \\
& 68098r^7ZR^4\alpha^8 - 1408r^7\alpha^9 - 8192r^7ZB^2\alpha^9 - 9538r^7ZB^4\alpha^9 + 16928r^7ZBZR\alpha^9 + \\
& 40584r^7ZB^3ZR\alpha^9 - 8192r^7ZR^2\alpha^9 - 62092r^7ZB^2ZR^2\alpha^9 + 40584r^7ZBZR^3\alpha^9 - 9538r^7ZR^4\alpha^9) \\
& \#1^9 + \\
& (4720r^6ZB^4\alpha^2 - 18880r^6ZB^3ZR\alpha^2 + 28320r^6ZB^2ZR^2\alpha^2 - 18880r^6ZBZR^3\alpha^2 + \\
& 4720r^6ZR^4\alpha^2 + 5440r^6ZB^2\alpha^3 + 42960r^6ZB^4\alpha^3 - 10880r^6ZBZR\alpha^3 - 171840r^6ZB^3ZR\alpha^3 + \\
& 5440r^6ZR^2\alpha^3 + 257760r^6ZB^2ZR^2\alpha^3 - 171840r^6ZBZR^3\alpha^3 + 42960r^6ZR^4\alpha^3 + \\
& 656r^6\alpha^4 + 39208r^6ZB^2\alpha^4 + 169059r^6ZB^4\alpha^4 - 78416r^6ZBZR\alpha^4 - 677044r^6ZB^3ZR\alpha^4 + \\
& 39208r^6ZR^2\alpha^4 + 1015970r^6ZB^2ZR^2\alpha^4 - 677044r^6ZBZR^3\alpha^4 + 169059r^6ZR^4\alpha^4 + \\
& 3936r^6\alpha^5 + 121000r^6ZB^2\alpha^5 + 376508r^6ZB^4\alpha^5 - 242064r^6ZBZR\alpha^5 - \\
& 1510928r^6ZB^3ZR\alpha^5 + 121000r^6ZR^2\alpha^5 + 2268840r^6ZB^2ZR^2\alpha^5 - 1510928r^6ZBZR^3\alpha^5 + \\
& 376508r^6ZR^4\alpha^5 + 9840r^6\alpha^6 + 207280r^6ZB^2\alpha^6 + 519855r^6ZB^4\alpha^6 - 414880r^6ZBZR\alpha^6 - \\
& 2091780r^6ZB^3ZR\alpha^6 + 207280r^6ZR^2\alpha^6 + 3143850r^6ZB^2ZR^2\alpha^6 - 2091780r^6ZBZR^3\alpha^6 + \\
& 519855r^6ZR^4\alpha^6 + 13120r^6\alpha^7 + 212880r^6ZB^2\alpha^7 + 456240r^6ZB^4\alpha^7 - 426400r^6ZBZR\alpha^7 - \\
& 1841600r^6ZB^3ZR\alpha^7 + 212880r^6ZR^2\alpha^7 + 2770720r^6ZB^2ZR^2\alpha^7 - 1841600r^6ZBZR^3\alpha^7 + \\
& 456240r^6ZR^4\alpha^7 + 9840r^6\alpha^8 + 131080r^6ZB^2\alpha^8 + 248785r^6ZB^4\alpha^8 - 262800r^6ZBZR\alpha^8 - \\
& 1007740r^6ZB^3ZR\alpha^8 + 131080r^6ZR^2\alpha^8 + 1517910r^6ZB^2ZR^2\alpha^8 - 1007740r^6ZBZR^3\alpha^8 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 248785r^6Zr^4\alpha^8 + 3936r^6\alpha^9 + 44808r^6ZB^2\alpha^9 + 77124r^6ZB^4\alpha^9 - 89936r^6ZBZR\alpha^9 - \\
& 313584r^6ZB^3ZR\alpha^9 + 44808r^6Zr^2\alpha^9 + 472920r^6ZB^2Zr^2\alpha^9 - 313584r^6ZBZR^3\alpha^9 + \\
& 77124r^6Zr^4\alpha^9 + 656r^6\alpha^{10} + 6560r^6ZB^2\alpha^{10} + 10413r^6ZB^4\alpha^{10} - 13184r^6ZBZR\alpha^{10} - \\
& 42508r^6ZB^3ZR\alpha^{10} + 6560r^6Zr^2\alpha^{10} + 64190r^6ZB^2Zr^2\alpha^{10} - 42508r^6ZBZR^3\alpha^{10} + \\
& 10413r^6Zr^4\alpha^{10}) \#1^{10} + \\
& (-5088r^5ZB^4\alpha^3 + 20352r^5ZB^3ZR\alpha^3 - 30528r^5ZB^2Zr^2\alpha^3 + 20352r^5ZBZR^3\alpha^3 - \\
& 5088r^5Zr^4\alpha^3 - 3120r^5ZB^2\alpha^4 - 43484r^5ZB^4\alpha^4 + 6240r^5ZBZR\alpha^4 + 173936r^5ZB^3ZR\alpha^4 - \\
& 3120r^5Zr^2\alpha^4 - 260904r^5ZB^2Zr^2\alpha^4 + 173936r^5ZBZR^3\alpha^4 - 43484r^5Zr^4\alpha^4 - \\
& 160r^5\alpha^5 - 22096r^5ZB^2\alpha^5 - 162028r^5ZB^4\alpha^5 + 44192r^5ZBZR\alpha^5 + 648288r^5ZB^3ZR\alpha^5 - \\
& 22096r^5Zr^2\alpha^5 - 972520r^5ZB^2Zr^2\alpha^5 + 648288r^5ZBZR^3\alpha^5 - 162028r^5Zr^4\alpha^5 - \\
& 960r^5\alpha^6 - 67056r^5ZB^2\alpha^6 - 343932r^5ZB^4\alpha^6 + 134112r^5ZBZR\alpha^6 + 1376784r^5ZB^3ZR\alpha^6 - \\
& 67056r^5Zr^2\alpha^6 - 2065704r^5ZB^2Zr^2\alpha^6 + 1376784r^5ZBZR^3\alpha^6 - 343932r^5Zr^4\alpha^6 - \\
& 2400r^5\alpha^7 - 113040r^5ZB^2\alpha^7 - 455020r^5ZB^4\alpha^7 + 226080r^5ZBZR\alpha^7 + \\
& 1822720r^5ZB^3ZR\alpha^7 - 113040r^5Zr^2\alpha^7 - 2735400r^5ZB^2Zr^2\alpha^7 + 1822720r^5ZBZR^3\alpha^7 - \\
& 455020r^5Zr^4\alpha^7 - 3200r^5\alpha^8 - 114320r^5ZB^2\alpha^8 - 384308r^5ZB^4\alpha^8 + 228640r^5ZBZR\alpha^8 + \\
& 1540752r^5ZB^3ZR\alpha^8 - 114320r^5Zr^2\alpha^8 - 2312888r^5ZB^2Zr^2\alpha^8 + 1540752r^5ZBZR^3\alpha^8 - \\
& 384308r^5Zr^4\alpha^8 - 2400r^5\alpha^9 - 69360r^5ZB^2\alpha^9 - 202404r^5ZB^4\alpha^9 + 138720r^5ZBZR\alpha^9 + \\
& 812256r^5ZB^3ZR\alpha^9 - 69360r^5Zr^2\alpha^9 - 1219704r^5ZB^2Zr^2\alpha^9 + 812256r^5ZBZR^3\alpha^9 - \\
& 202404r^5Zr^4\alpha^9 - 960r^5\alpha^{10} - 23376r^5ZB^2\alpha^{10} - 60788r^5ZB^4\alpha^{10} + 46752r^5ZBZR\alpha^{10} + \\
& 244208r^5ZB^3ZR\alpha^{10} - 23376r^5Zr^2\alpha^{10} - 366840r^5ZB^2Zr^2\alpha^{10} + 244208r^5ZBZR^3\alpha^{10} - \\
& 60788r^5Zr^4\alpha^{10} - 160r^5\alpha^{11} - 3376r^5ZB^2\alpha^{11} - 7972r^5ZB^4\alpha^{11} + 6752r^5ZBZR\alpha^{11} + \\
& 32064r^5ZB^3ZR\alpha^{11} - 3376r^5Zr^2\alpha^{11} - 48184r^5ZB^2Zr^2\alpha^{11} + 32064r^5ZBZR^3\alpha^{11} - \\
& 7972r^5Zr^4\alpha^{11}) \#1^{11} + \\
& (3420r^4ZB^4\alpha^4 - 13680r^4ZB^3ZR\alpha^4 + 20520r^4ZB^2Zr^2\alpha^4 - 13680r^4ZBZR^3\alpha^4 + \\
& 3420r^4Zr^4\alpha^4 + 1064r^4ZB^2\alpha^5 + 28250r^4ZB^4\alpha^5 - 2128r^4ZBZR\alpha^5 - 113000r^4ZB^3ZR\alpha^5 + \\
& 1064r^4Zr^2\alpha^5 + 169500r^4ZB^2Zr^2\alpha^5 - 113000r^4ZBZR^3\alpha^5 + 28250r^4Zr^4\alpha^5 + \\
& 16r^4\alpha^6 + 7472r^4ZB^2\alpha^6 + 101999r^4ZB^4\alpha^6 - 14944r^4ZBZR\alpha^6 - 408012r^4ZB^3ZR\alpha^6 + \\
& 7472r^4Zr^2\alpha^6 + 612026r^4ZB^2Zr^2\alpha^6 - 408012r^4ZBZR^3\alpha^6 + 101999r^4Zr^4\alpha^6 + \\
& 96r^4\alpha^7 + 22488r^4ZB^2\alpha^7 + 210264r^4ZB^4\alpha^7 - 44976r^4ZBZR\alpha^7 - 841152r^4ZB^3ZR\alpha^7 + \\
& 22488r^4Zr^2\alpha^7 + 1261776r^4ZB^2Zr^2\alpha^7 - 841152r^4ZBZR^3\alpha^7 + 210264r^4Zr^4\alpha^7 + \\
& 240r^4\alpha^8 + 37600r^4ZB^2\alpha^8 + 270685r^4ZB^4\alpha^8 - 75200r^4ZBZR\alpha^8 - 1082980r^4ZB^3ZR\alpha^8 + \\
& 37600r^4Zr^2\alpha^8 + 1624590r^4ZB^2Zr^2\alpha^8 - 1082980r^4ZBZR^3\alpha^8 + 270685r^4Zr^4\alpha^8 + \\
& 320r^4\alpha^9 + 37720r^4ZB^2\alpha^9 + 222850r^4ZB^4\alpha^9 - 75440r^4ZBZR\alpha^9 - 891720r^4ZB^3ZR\alpha^9 + \\
& 37720r^4Zr^2\alpha^9 + 1337740r^4ZB^2Zr^2\alpha^9 - 891720r^4ZBZR^3\alpha^9 + 222850r^4Zr^4\alpha^9 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 240r^4\alpha^{10} + 22704r^4ZB^2\alpha^{10} + 114585r^4ZB^4\alpha^{10} - 45408r^4ZBZR\alpha^{10} - \\
& 458580r^4ZB^3ZR\alpha^{10} + 22704r^4ZR^2\alpha^{10} + 687990r^4ZB^2ZR^2\alpha^{10} - 458580r^4ZBZR^3\alpha^{10} + \\
& 114585r^4ZR^4\alpha^{10} + 96r^4\alpha^{11} + 7592r^4ZB^2\alpha^{11} + 33644r^4ZB^4\alpha^{11} - 15184r^4ZBZR\alpha^{11} - \\
& 134672r^4ZB^3ZR\alpha^{11} + 7592r^4ZR^2\alpha^{11} + 202056r^4ZB^2ZR^2\alpha^{11} - 134672r^4ZBZR^3\alpha^{11} + \\
& 33644r^4ZR^4\alpha^{11} + 16r^4\alpha^{12} + 1088r^4ZB^2\alpha^{12} + 4319r^4ZB^4\alpha^{12} - 2176r^4ZBZR\alpha^{12} - \\
& 17292r^4ZB^3ZR\alpha^{12} + 1088r^4ZR^2\alpha^{12} + 25946r^4ZB^2ZR^2\alpha^{12} - 17292r^4ZBZR^3\alpha^{12} + \\
& 4319r^4ZR^4\alpha^{12}) \#1^{12} + \\
& (-1468r^3ZB^4\alpha^5 + 5872r^3ZB^3ZR\alpha^5 - 8808r^3ZB^2ZR^2\alpha^5 + 5872r^3ZBZR^3\alpha^5 - \\
& 1468r^3ZR^4\alpha^5 - 200r^3ZB^2\alpha^6 - 11902r^3ZB^4\alpha^6 + 400r^3ZBZR\alpha^6 + 47608r^3ZB^3ZR\alpha^6 - \\
& 200r^3ZR^2\alpha^6 - 71412r^3ZB^2ZR^2\alpha^6 + 47608r^3ZBZR^3\alpha^6 - 11902r^3ZR^4\alpha^6 - \\
& 1400r^3ZB^2\alpha^7 - 42210r^3ZB^4\alpha^7 + 2800r^3ZBZR\alpha^7 + 168840r^3ZB^3ZR\alpha^7 - \\
& 1400r^3ZR^2\alpha^7 - 253260r^3ZB^2ZR^2\alpha^7 + 168840r^3ZBZR^3\alpha^7 - 42210r^3ZR^4\alpha^7 - \\
& 4200r^3ZB^2\alpha^8 - 85526r^3ZB^4\alpha^8 + 8400r^3ZBZR\alpha^8 + 342104r^3ZB^3ZR\alpha^8 - \\
& 4200r^3ZR^2\alpha^8 - 513156r^3ZB^2ZR^2\alpha^8 + 342104r^3ZBZR^3\alpha^8 - 85526r^3ZR^4\alpha^8 - \\
& 7000r^3ZB^2\alpha^9 - 108290r^3ZB^4\alpha^9 + 14000r^3ZBZR\alpha^9 + 433160r^3ZB^3ZR\alpha^9 - \\
& 7000r^3ZR^2\alpha^9 - 649740r^3ZB^2ZR^2\alpha^9 + 433160r^3ZBZR^3\alpha^9 - 108290r^3ZR^4\alpha^9 - \\
& 7000r^3ZB^2\alpha^{10} - 87738r^3ZB^4\alpha^{10} + 14000r^3ZBZR\alpha^{10} + 350952r^3ZB^3ZR\alpha^{10} - \\
& 7000r^3ZR^2\alpha^{10} - 526428r^3ZB^2ZR^2\alpha^{10} + 350952r^3ZBZR^3\alpha^{10} - 87738r^3ZR^4\alpha^{10} - \\
& 4200r^3ZB^2\alpha^{11} - 44422r^3ZB^4\alpha^{11} + 8400r^3ZBZR\alpha^{11} + 177688r^3ZB^3ZR\alpha^{11} - \\
& 4200r^3ZR^2\alpha^{11} - 266532r^3ZB^2ZR^2\alpha^{11} + 177688r^3ZBZR^3\alpha^{11} - 44422r^3ZR^4\alpha^{11} - \\
& 1400r^3ZB^2\alpha^{12} - 12850r^3ZB^4\alpha^{12} + 2800r^3ZBZR\alpha^{12} + 51400r^3ZB^3ZR\alpha^{12} - \\
& 1400r^3ZR^2\alpha^{12} - 77100r^3ZB^2ZR^2\alpha^{12} + 51400r^3ZBZR^3\alpha^{12} - 12850r^3ZR^4\alpha^{12} - \\
& 200r^3ZB^2\alpha^{13} - 1626r^3ZB^4\alpha^{13} + 400r^3ZBZR\alpha^{13} + 6504r^3ZB^3ZR\alpha^{13} - 200r^3ZR^2\alpha^{13} - \\
& 9756r^3ZB^2ZR^2\alpha^{13} + 6504r^3ZBZR^3\alpha^{13} - 1626r^3ZR^4\alpha^{13}) \#1^{13} + \\
& (393r^2ZB^4\alpha^6 - 1572r^2ZB^3ZR\alpha^6 + 2358r^2ZB^2ZR^2\alpha^6 - 1572r^2ZBZR^3\alpha^6 + 393r^2ZR^4\alpha^6 + \\
& 16r^2ZB^2\alpha^7 + 3156r^2ZB^4\alpha^7 - 32r^2ZBZR\alpha^7 - 12624r^2ZB^3ZR\alpha^7 + 16r^2ZR^2\alpha^7 + \\
& 18936r^2ZB^2ZR^2\alpha^7 - 12624r^2ZBZR^3\alpha^7 + 3156r^2ZR^4\alpha^7 + 112r^2ZB^2\alpha^8 + \\
& 11088r^2ZB^4\alpha^8 - 224r^2ZBZR\alpha^8 - 44352r^2ZB^3ZR\alpha^8 + 112r^2ZR^2\alpha^8 + 66528r^2ZB^2ZR^2\alpha^8 - \\
& 44352r^2ZBZR^3\alpha^8 + 11088r^2ZR^4\alpha^8 + 336r^2ZB^2\alpha^9 + 22260r^2ZB^4\alpha^9 - 672r^2ZBZR\alpha^9 - \\
& 89040r^2ZB^3ZR\alpha^9 + 336r^2ZR^2\alpha^9 + 133560r^2ZB^2ZR^2\alpha^9 - 89040r^2ZBZR^3\alpha^9 + \\
& 22260r^2ZR^4\alpha^9 + 560r^2ZB^2\alpha^{10} + 27930r^2ZB^4\alpha^{10} - 1120r^2ZBZR\alpha^{10} - \\
& 111720r^2ZB^3ZR\alpha^{10} + 560r^2ZR^2\alpha^{10} + 167580r^2ZB^2ZR^2\alpha^{10} - 111720r^2ZBZR^3\alpha^{10} + \\
& 27930r^2ZR^4\alpha^{10} + 560r^2ZB^2\alpha^{11} + 22428r^2ZB^4\alpha^{11} - 1120r^2ZBZR\alpha^{11} - \\
& 89712r^2ZB^3ZR\alpha^{11} + 560r^2ZR^2\alpha^{11} + 134568r^2ZB^2ZR^2\alpha^{11} - 89712r^2ZBZR^3\alpha^{11} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 22428r^2ZR^4\alpha^{11} + 336r^2ZB^2\alpha^{12} + 11256r^2ZB^4\alpha^{12} - 672r^2ZBZR\alpha^{12} - \\
& 45024r^2ZB^3ZR\alpha^{12} + 336r^2ZR^2\alpha^{12} + 67536r^2ZB^2ZR^2\alpha^{12} - 45024r^2ZBZR^3\alpha^{12} + \\
& 11256r^2ZR^4\alpha^{12} + 112r^2ZB^2\alpha^{13} + 3228r^2ZB^4\alpha^{13} - 224r^2ZBZR\alpha^{13} - 12912r^2ZB^3ZR\alpha^{13} + \\
& 112r^2ZR^2\alpha^{13} + 19368r^2ZB^2ZR^2\alpha^{13} - 12912r^2ZBZR^3\alpha^{13} + 3228r^2ZR^4\alpha^{13} + \\
& 16r^2ZB^2\alpha^{14} + 405r^2ZB^4\alpha^{14} - 32r^2ZBZR\alpha^{14} - 1620r^2ZB^3ZR\alpha^{14} + 16r^2ZR^2\alpha^{14} + \\
& 2430r^2ZB^2ZR^2\alpha^{14} - 1620r^2ZBZR^3\alpha^{14} + 405r^2ZR^4\alpha^{14}) \#1^{14} + \\
& (-60rZB^4\alpha^7 + 240rZB^3ZR\alpha^7 - 360rZB^2ZR^2\alpha^7 + 240rZBZR^3\alpha^7 - 60rZR^4\alpha^7 - \\
& 480rZB^4\alpha^8 + 1920rZB^3ZR\alpha^8 - 2880rZB^2ZR^2\alpha^8 + 1920rZBZR^3\alpha^8 - 480rZR^4\alpha^8 - \\
& 1680rZB^4\alpha^9 + 6720rZB^3ZR\alpha^9 - 10080rZB^2ZR^2\alpha^9 + 6720rZBZR^3\alpha^9 - 1680rZR^4\alpha^9 - \\
& 3360rZB^4\alpha^{10} + 13440rZB^3ZR\alpha^{10} - 20160rZB^2ZR^2\alpha^{10} + 13440rZBZR^3\alpha^{10} - \\
& 3360rZR^4\alpha^{10} - 4200rZB^4\alpha^{11} + 16800rZB^3ZR\alpha^{11} - 25200rZB^2ZR^2\alpha^{11} + \\
& 16800rZBZR^3\alpha^{11} - 4200rZR^4\alpha^{11} - 3360rZB^4\alpha^{12} + 13440rZB^3ZR\alpha^{12} - \\
& 20160rZB^2ZR^2\alpha^{12} + 13440rZBZR^3\alpha^{12} - 3360rZR^4\alpha^{12} - 1680rZB^4\alpha^{13} + \\
& 6720rZB^3ZR\alpha^{13} - 10080rZB^2ZR^2\alpha^{13} + 6720rZBZR^3\alpha^{13} - 1680rZR^4\alpha^{13} - \\
& 480rZB^4\alpha^{14} + 1920rZB^3ZR\alpha^{14} - 2880rZB^2ZR^2\alpha^{14} + 1920rZBZR^3\alpha^{14} - 480rZR^4\alpha^{14} - \\
& 60rZB^4\alpha^{15} + 240rZB^3ZR\alpha^{15} - 360rZB^2ZR^2\alpha^{15} + 240rZBZR^3\alpha^{15} - 60rZR^4\alpha^{15}) \#1^{15} + \\
& (4ZB^4\alpha^8 - 16ZB^3ZR\alpha^8 + 24ZB^2ZR^2\alpha^8 - 16ZBZR^3\alpha^8 + 4ZR^4\alpha^8 + 32ZB^4\alpha^9 - 128ZB^3ZR\alpha^9 + \\
& 192ZB^2ZR^2\alpha^9 - 128ZBZR^3\alpha^9 + 32ZR^4\alpha^9 + 112ZB^4\alpha^{10} - 448ZB^3ZR\alpha^{10} + 672ZB^2ZR^2\alpha^{10} - \\
& 448ZBZR^3\alpha^{10} + 112ZR^4\alpha^{10} + 224ZB^4\alpha^{11} - 896ZB^3ZR\alpha^{11} + 1344ZB^2ZR^2\alpha^{11} - \\
& 896ZBZR^3\alpha^{11} + 224ZR^4\alpha^{11} + 280ZB^4\alpha^{12} - 1120ZB^3ZR\alpha^{12} + 1680ZB^2ZR^2\alpha^{12} - \\
& 1120ZBZR^3\alpha^{12} + 280ZR^4\alpha^{12} + 224ZB^4\alpha^{13} - 896ZB^3ZR\alpha^{13} + 1344ZB^2ZR^2\alpha^{13} - \\
& 896ZBZR^3\alpha^{13} + 224ZR^4\alpha^{13} + 112ZB^4\alpha^{14} - 448ZB^3ZR\alpha^{14} + 672ZB^2ZR^2\alpha^{14} - \\
& 448ZBZR^3\alpha^{14} + 112ZR^4\alpha^{14} + 32ZB^4\alpha^{15} - 128ZB^3ZR\alpha^{15} + 192ZB^2ZR^2\alpha^{15} - \\
& 128ZBZR^3\alpha^{15} + 32ZR^4\alpha^{15} + 4ZB^4\alpha^{16} - 16ZB^3ZR\alpha^{16} + 24ZB^2ZR^2\alpha^{16} - 16ZBZR^3\alpha^{16} + 4ZR^4\alpha^{16}) \\
& \#1^{16} \& , 5];
\end{aligned}$$

Este gráfico muestra la variación de M vs α

```

Plot[{M/.ZR -> 1.55/.ZB -> -8.5/.r -> 1.79 * 1013}, {α, 0, 10.111}, PlotTheme -> "Scientific",
FrameLabel -> {Style["α", Italic, Black, 14], Style[M, Italic, Black, 18]},
PlotStyle -> {Blue}]

```

```
Export["PB8.png", , ImageResolution -> 300]
```

PB8.png

Esta es la expresión para el parámetro de rotación en función de la masa.

$$a = \sqrt{\frac{(\lambda * r^4 * (r^2 - 2 * M\alpha * r + M\beta))}{(2 * M\alpha * r - M\beta)^2 - \lambda * r^4}};$$

Este gráfico muestra la variación de a vs α

`Clear[M]`

$$a = \sqrt{\frac{(\lambda * r^4 * (r^2 - 2 * M\alpha * r + M\beta))}{(2 * M\alpha * r - M\beta)^2 - \lambda * r^4}};$$

`Plot[{a/.ZR -> 1.55/.ZB -> -8.5/.r -> 1.79 * 1013/.M -> 2.5879 * 1026},{α, 0, 10.111},`

`PlotTheme -> "Scientific",`

`FrameLabel -> {Style["α", Italic, Black, 14], Style[a, Italic, Black, 18]},`

`PlotStyle -> {Blue}]`

`Export["PB1.png", , ImageResolution -> 300]`

PB1.png

Escribimos la expresión para a de otra forma

$$a^2 = \frac{(\lambda * r^4 * (r^2 - 2 * M\alpha * r + M\beta))}{(2 * M\alpha * r - M\beta)^2 - \lambda * r^4};$$

`Clear[a]`

Este gráfico muestra la variación de a vs α para diferentes valores de los desplazamientos al rojo y al azul

```

a =  $\sqrt{\frac{(\lambda * r^4 * (r^2 - 2 * M\alpha * r + M\beta))}{(2 * M\alpha * r - M\beta)^2 - \lambda * r^4}}$ ;
Plot[{a/.M → 2.5879 * 1026/.r → 1.79 * 1013/.ZR → 1.55/.ZB → -8.5,
a/.M → 2.5879 * 1026/.r → 1.79 * 1013/.ZR → 2.55/.ZB → -9.5,
a/.M → 2.5879 * 1026/.r → 1.79 * 1013/.ZR → 3.55/.ZB → -10.5,
a/.M → 2.5879 * 1026/.r → 1.79 * 1013/.ZR → 4.55/.ZB → -11.5}, {α, 0, 10.111},
PlotTheme → "Scientific",
FrameLabel → {Style["α", Italic, Black, 15], Style[a, Italic, Black, 20]},
PlotStyle → {Blue, Green, Red, Purple},
PlotLegends →
Placed[{', 'Zr=1.55 y Zb=-8.5', ', 'Zr=2.55 y Zb=-9.5', ', 'Zr=3.55 y Zb=-10.5', ', 'Zr=4.55 y Zb=-11.5'}, {0.75, 0.65}], Frame → True]

```

```

Export["PB2.png",
Plot[{a/.M → 2.5879 * 1026/.r → 1.79 * 1013/.ZR → 1.55/.ZB → -8.5,
a/.M → 2.5879 * 1026/.r → 1.79 * 1013/.ZR → 2.55/.ZB → -9.5,
a/.M → 2.5879 * 1026/.r → 1.79 * 1013/.ZR → 3.55/.ZB → -10.5,
a/.M → 2.5879 * 1026/.r → 1.79 * 1013/.ZR → 4.55/.ZB → -11.5}, {α, 0, 10.111},
PlotTheme → "Scientific",
FrameLabel → {Style["α", Italic, Black, 15], Style[a, Italic, Black, 20]},
PlotStyle → {Blue, Green, Red, Purple},
PlotLegends →
Placed[{', 'Zr=1.55 y Zb=-8.5', ', 'Zr=2.55 y Zb=-9.5', ', 'Zr=3.55 y Zb=-10.5', ', 'Zr=4.55 y Zb=-11.5'}, {0.75, 0.65}], Frame → True], ImageResolution → 190]

```

PB2.png

Este gráfico 3D muestra la variación de M vs Zr y Zb.

```

Plot3D[{a/.M → 2.5879 * 1026/.α → 2/.r → 1.79 * 1013,
a/.M → 2.5879 * 1026/.α → 4.5/.r → 1.79 * 1013,
a/.M → 2.5879 * 1026/.α → 7.25/.r → 1.79 * 1013,
a/.M → 2.5879 * 1026/.α → 10.111/.r → 1.79 * 1013}, {ZR, 1.55, 4.55},
{ZB, -8.5, -11.5}, PlotTheme → "Scientific", AxesLabel → {"Zr", "Zb", a},

```

```

PlotStyle → {{Yellow, Directive[Opacity[0.6]]}, {Blue, Directive[Opacity[0.7]]},
{Red, Directive[Opacity[0.8]]}, {Green, Directive[Opacity[0.9]]}} (*,
ColorFunction → “BlueGreenYellow”*), BoxRatios → {1, 1, 0.8}, Mesh → Full,
BaseStyle → {FontSize → 8}, LabelStyle → Directive[Thick, FontFamily → “Cambria Math”],
LabelStyle → Thick, MaxRecursion → 1, PlotPoints → 60, ClippingStyle → None,
PlotTheme → “Detailed”, FaceGrids → None]

```

```

Export[“PB7.png”, ,

```

```

ImageResolution → 300]

```

```

PB7.png

```

Bibliografía

- [1] K. Yagi and L.C. Stein. *Classical Quantum Gravity* 33, (054001), 2016.
- [2] Octavio Miramontes y Karen Volke. *Fronteras de la Física en el siglo XXI*. ISBN 978-1-938128-03-5. Copi arXives, México, D.F., 2013.
- [3] V.S. Manko and I.D. Novikov. *Classical quantum gravity*, (2477), 1992.
- [4] C. Bambi and J. Cosmol. *Astropart. Physics*, (009), 2011.
- [5] C.M. Will. *Theory and experiment in gravitational physics*. ISBN. 0521439736. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1993.
- [6] T. Johannsen. *Classical Quantum Gravity* 33, (113001), 2016.
- [7] S. Carroll. *Spacetime and Geometry*. ISBN 978-93-325-7165-5. Pearson Education, 2016.
- [8] A. Herrera-Aguilar and U. Nucamendi. *Physics review*, (045024), 2015.
- [9] Pankaj Sheoran, Alfredo Herrera-Aguilar, and Ulises Nucamendi. Mass and spin of a kerr black hole in modified gravity and a test of the kerr black hole hypothesis. *arXiv*, 1712.03344v2, 2018.
- [10] Hannu Karttunen, Pekka Kroger, Heikki Oja, Markku Poutanen, and Karl Johan Donner. *Fundamental Astronomy*. ISBN 3-540-00179-4. Springer Verlag, New York, 2003.

- [11] K. Glampedakis and S. Babak. *Classical quantum gravity*, (4167), 2006.
- [12] N.M.J. Woodhouse. *General Relativity*. ISBN 1615-2085. Springer Undergraduate Mathematics Series, 2007.
- [13] S. Chandrasekhar. *The mathematical theory of black holes*. ISBN 0198512910. Oxford University Press, New York, 1983.
- [14] C.M. Will. 2014.
- [15] J. Murata and S. Tanaka. *Classical quantum gravity*, (033001), 2015.
- [16] C. Bambi. *Mod. Physics*, (Lett. A 26 2453), 2011.
- [17] James J. Callahan. *The Geometry of Spacetime*. ISBN 978-1-4419-3142-9. Springer Verlag, New York, 2000.
- [18] <http://teoria-de-la-relatividad.blogspot.com/2009/03/20-el-tensor-metrico.html>.
- [19] A.K. Raychaudhuri, S. Banerji, and A. Banerjee. *General Relativity, Astrophysics and Cosmology*. ISBN 0-387-40628-X. Springer Verlag, New York, 2003.
- [20] J.M. Bardeen, W.H. Press, and S.A. Teuklsky. *Astrophysics journal* 178, (347), 1972.
- [21] J.W. Moffat. *Eur. Physics journal*, (175), 2015.
- [22] J.W. Moffat. Scalar-tensor-vector gravity theory. *arXiv*, gr-qc/0506021v7, 2005.
- [23] J.W. Moffat and S. Rahvar. *Mon. Not. R. Astron. Soc*, (1439), 2013.
- [24] D.C. Wilkins. *Physics review*, (814), 1972.
- [25] B. Carter. *Physics review* 174, (1559), 1968.

Índice de figuras

1.1	Órbitas de estrellas alrededor de Sgr A*	2
3.1	Ergósfera entorno al horizonte de sucesos.	24
4.1	Variación de g_{tt} para diferentes valores de α	27
4.2	El gráfico nos muestra la variación de las orbitas para diferentes valores de α , imagen cortesía de Bryan Larios.	28
4.3	Desplazamiento al rojo y al azul, tomado de [9]	41
4.4	Gráfico de M vs α .	47
4.5	Gráfico de a vs α	47
4.6	Gráfico de a vs α .	48
4.7	Gráfico de a vs α .	48
4.8	Gráfico en 3 dimensiones de a vs z_r y z_b para diferentes valores de α manteniendo r constante.	49