

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS
FACULTAD DE CIENCIAS
POSGRADO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS
MAESTRÍA EN FÍSICA**



TESIS:

**DINÁMICA CAÓTICA DE OSCILADORES NO LINEALES UTILIZANDO EL
PÉNDULO CAÓTICO COMO MEDIO DIDÁCTICO EN CIUDAD
UNIVERSITARIA, UNAH AÑO 2017.
SEGUNDA FASE 2018, SEGUNDO PERIODO UNAH
TERCERA FASE 2018, TERCER PERIODO UNAH**

SUSTENTADO POR:

ING. KAREN ELENA LÓPEZ PALACIOS

PREVIO A OPTAR EL TÍTULO DE:

**MASTER EN FÍSICA
PROMOCIÓN III**

TEGUCIGALPA M.D.C. HONDURAS MAYO 2022

AUTORIDADES UNIVERSITARIAS

**DR. FRANCISCO JOSE HERRERA ALVARADO
RECTOR**

**MAE. BELINDA FLORES DE MENDOZA
VICERRECTORA ACADÉMICA**

**ABOG. EMMA VIRGINIA RIVERA MEJÍA
SECRETARIA GENERAL**

**Dr. RAÚL ARMANDO EUCEDA
DIRECTOR DE POSGRADOS**

**MAE. ALEJANDRO GALO
DECANO DE LA FACULTAD**

**DRA. MELISSA CRUZ
COORDINADOR GENERAL DEL POSGRADO DE LA
FACULTAD DE CIENCIAS**

AGRADECIMIENTOS:

Quiero agradecer a Dios todo poderoso por permitirme presentar esta tesis, y en especial a mi mamá María Elena por ser todo para mí, por estar presente en todo momento y a mis hermanas Lidia y Nancy que han sido parte de este proceso, siempre con su acompañamiento incondicional.

Le agradezco a mi Director de tesis quién me tuvo una infinita paciencia, muchas gracias Profesor Alejandro Galo y a los instructores de Laboratorio Luis Felipe y René Hernández quiénes fueron pieza clave en la implementación del laboratorio, y a los profesores de la clase de Mecánica II, Carlos Gabarrete y Lucio Villanueva mi agradecimiento especial.

A mi familia ha tenido siempre un lugar muy especial en mi corazón y a todos mis amigos de la universidad y de la Escuela de Física; con quienes he compartido lágrimas y risas, felicidad y tristezas, gracias a todos por creer en mí.

INDICE GENERAL

RESUMEN	1
INTRODUCCIÓN	2
CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	3
1.1 ANTECEDENTES	3
1.2 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	3
1.3 LOS OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN	4
1.3.1 <i>Objetivo general:</i>	4
1.3.2 <i>Objetivos Específicos:</i>	4
1.4 LAS PREGUNTAS DEL ESTUDIO.....	4
1.5 LA JUSTIFICACIÓN	5
1.6 DELIMITACIONES DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	5
1.7 POSIBLES DEFICIENCIAS EN EL PROCESO DE INVESTIGACIÓN.....	6
1.8 VIABILIDAD DE LA INVESTIGACIÓN	6
CAPÍTULO II: EL MARCO TEÓRICO	7
2.1 RESEÑA HISTÓRICA DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	7
2.1.1 <i>EL CAOS</i>	7
2.2 BASES TEÓRICA	17
2.2.1 <i>Sistemas Lineales y No-Lineales</i>	17
2.2.2 <i>La Importancia de la No-Linealidad</i>	18
2.2.3 <i>La No-Linealidad y el Caos</i>	19
2.2.4 <i>Los Fenómenos No-lineales</i>	21
2.2.5 <i>¿QUÉ SON LOS FENÓMENOS CAÓTICOS?</i>	21
2.2.6 <i>La Pequeña Causa de Poincaré</i>	26
2.2.7 <i>El Problema de los Tres-Cuerpos y la Teoría de KAM</i>	30
2.2.8 <i>Poincaré y el Problema de los Tres-Cuerpos</i>	31
2.2.9 <i>Teoría General de la Estabilidad</i>	32
2.2.10 <i>Trabajos Posteriores</i>	34
2.3 EL ESPACIO DE FASES.....	35
2.3.2 <i>El Atractor de Lorenz</i>	45
2.3.2.1 <i>Formulación matemática del Atractor de Lorenz</i>	48
2.3.3 <i>El Atractor de Rössler</i>	55
2.4 DIFERENTES MEDIDAS DEL CAOS Y COMPLEJIDAD.....	58
2.5 MARCO CONTEXTUAL	59
2.5.1 <i>Marco Contextual pedagógico</i>	59
2.5.2 <i>Simulaciones y ruta hacia el caos</i>	61
2.6.2 <i>GUÍA DEL PÉNDULO CAÓTICO</i>	69
2.6.3 <i>Marco Contextual legal</i>	78

2.6.4 Comparación del Péndulo caótico PASCO con los péndulos comerciales	79
CAPÍTULO III: ENFOQUE Y TIPO DE INVESTIGACIÓN.....	87
3.1 ENFOQUE DE INVESTIGACIÓN	87
3.2 TIPO DE INVESTIGACIÓN.....	87
CAPÍTULO IV: HIPOTESIS Y VARIABLES	88
4.1 HIPÓTESIS.....	88
4.2 Variables	88
4.3 Operacionalización de la Variables.....	89
CAPÍTULO V: ESTRATEGIA METODOLÓGICA:.....	91
5.1 DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN	92
5.2 POBLACIÓN Y MUESTRA.....	92
APLICACIÓN DE ENCUESTA A LA MUESTRA TOTAL DE ESTUDIANTES (20 ESTUDIANTES EN TRES PAC CONSECUTIVOS). EN BASE A LA ENCUESTA REALIZADA SE TIENE UNA MUY BUENA ACEPTACIÓN DEL LABORATORIO. CONSIDERANDO QUE SE TIENE QUE INTEGRAR EL DESARROLLO MATEMÁTICO Y EL USO DE SOFTWARE O PROGRAMAS COMPUTACIONALES PARA SU SOLUCIÓN.	94
CAPÍTULO VI: PLAN DE ANÁLISIS.....	100
CAPÍTULO VII: ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS	102
4.1. PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS	102
APLICACIÓN DE ENCUESTA A LA MUESTRA TOTAL DE ESTUDIANTES (20 ESTUDIANTES EN TRES PAC CONSECUTIVOS). EN BASE A LA ENCUESTA REALIZADA SE TIENE UNA MUY BUENA ACEPTACIÓN DEL LABORATORIO. CONSIDERANDO QUE SE TIENE QUE INTEGRAR EL DESARROLLO MATEMÁTICO Y EL USO DE SOFTWARE O PROGRAMAS COMPUTACIONALES PARA SU SOLUCIÓN.	102
4.2 ANÁLISIS DE LOS DATOS (CONSIDERANDO LOS OBJETIVOS ESPECÍFICOS DE LA INVESTIGACIÓN), EL MARCO TEÓRICO O LA HIPÓTESIS.....	102
APLICACIÓN DE ENCUESTA A LA MUESTRA TOTAL DE ESTUDIANTES (20 ESTUDIANTES EN TRES PAC CONSECUTIVOS)	103
CONCLUSIONES.....	104
GLOSARIO	106
BIBLIOGRAFÍA.....	107
ANEXOS	111

INDICE DE IMÁGENES

1. Fig. 2.1.1	8
2. Fig. 2.1.2.....	17

3. Fig. 2.2.2.1	20
4. Fig. 2.2.7.1.....	33
5. Fig. 2.2.9..1	35
6. Fig. 2.3.1.....	39
7. Fig. 2.3.1.1	42
8. Fig. 2.3.2.....	49
9. Fig. 2.3.2.1.1	56
10. Fig. 2.3.2.2.....	57
11. Fig. 2.3.2.3	58
12. Fig.2. 5.2.1.....	69
13. Fig. 2,5.2.2	70
14. Fig. 2.5.2.3.....	71
15. Fig. 2.6.2.1.....	73
16. Fig.2. 6.2.2.....	75
17. Fig. 2,6.2.3	75
18. Fig. 2.6.2.4.....	76
19. Fig. 4.2.1.....	100
20. Fig. 4.2.2.....	100
21. Fig. 4.2.3.....	101
22. Fig. 4.2.4.....	101

INDICE DE TABLAS

1. Tabla. 2.6.4.1	88
2. Tabla. 4.4.1.....	92
3. Tabla. 4.4.2	93
4. Tabla. 4.4.3.....	94
5. Tabla. 5.2.1.....	95
6. Tabla. 5.2.2.....	96
7. Tabla. 5.2.3.....	96

RESUMEN

El "Caos" es uno de los temas que representa dificultad en el aprendizaje en las diferentes disciplinas de la Física, por lo que, al implementarse el aprendizaje invertido junto con el Péndulo caótico de PASCO y otras herramientas metodológicas, se mejoró la comprensión, motivación y visualización de la aplicabilidad en la vida real del tema de Mecánica No lineal, caos.

Para lo anterior, se diseñaron y elaboraron videos que abordaron la temática tanto a forma teórica como su aplicabilidad en diferentes situaciones propias de cada una de las disciplinas, los cuales quedaron a disposición de los estudiantes en el aula virtual de la clase para su consulta en cualquier momento, así como tener el tema explicado en su libro de texto.

El seguimiento de la comprensión del tema se realizó a través del Padlet un pizarrón electrónico y se diseñó una laboratorio sobre el tema del Caos y se enfatizó utilizar teléfonos inteligentes, tabletas y/o laptops para el desarrollo de las actividades.

ABSTRACT

The "Chaos" is one of the subjects that represents difficulty in the learning in the different disciplines of Physics, reason why, when inverted learning was implemented together with the PASCO Chaotic Pendulum and other methodological tools, understanding, motivation and motivation were improved. and visualization of the real-life applicability of the topic of Nonlinear Mechanics, chaos

For the above, it was designed and elaborated videos that approach the subject in theoretical form as its applicability in different situations of each of the disciplines, which were available to the students in the classroom virtual classroom for consultation in any Moment, as well as having the topic explained in your textbook. In addition, they could use the Internet to look for additional information and thus to gain a better understanding of the subject.

The monitoring of the understanding of the subject was carried out through the Padlet, an electronic whiteboard, and a laboratory on the subject of Chaos was designed, emphasizing the use of smartphones, tablets, and/or laptops for the development of activities.

PALABRAS CLAVE

Aprendizaje invertido, aula invertida, caos, péndulo caótico PASCO.

KEYWORDS

Chaos, inverted classroom, inverted learning, PASCO chaotic pendulum

INTRODUCCIÓN

A nivel mundial el estudio de la mecánica no lineal es abstracto para los estudiantes por lo que este tipo de investigaciones generan un brecha entre el tipo de metodología necesaria para el entendimiento del estudiante utilizando un medio didáctico adecuando como lo es el péndulo caótico para mejorar las competencias adquiridas. Por ejemplo los físicos Morales y Marleny mencionan:

La mecánica no lineal se introduce generalmente a los estudiantes de Física y es quizá uno de los temas más difíciles de abordar ya que además de que implica de un desarrollo matemático importante, lo cual demanda el uso de una tercera dimensión, se da el hecho de que generalmente se presenta como una descripción teórica y como lo señalan Morales mira y Sainer Ortega , en todas las revisiones realizadas en la literatura actual no se percibe un desarrollo ni de los conceptos ni de sus implicaciones.

CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Antecedentes

Muchas fueron las novedades introducidas en la física del siglo XX. Entre las más divulgadas destaca la teoría del caos. Algunas expresiones han calado en el léxico común; como el "efecto mariposa", que acuñó E. N. Lorenz en 1963. Ya no hace falta ser un experto para comprender, de forma intuitiva, que ligeras perturbaciones iniciales en un sistema pueden verse amplificadas hasta tornar a éste en impredecible.

Al experimentador suele molestarle la aparición de fenómenos no deterministas. Por ello, cuando en un dispositivo las respuestas obtenidas son aleatorias y no extrapolables a partir de las condiciones iniciales, lo mejor es volver a empezar: nuevo diseño experimental y nuevo montaje.

En ocasiones, empero, es el propio resultado no predecible el que estimula al investigador. Constituyen buena prueba de ello los artefactos mecánicos que evolucionan en el tiempo sin que acertemos a anticipar cuál será el movimiento siguiente. El reto consiste en crear un sistema muy simple que, abandonado a su propio funcionamiento, termine por resultar impredecible. La construcción de péndulos abre un vasto campo de actividad que nos permite disfrutar de las sutilidades del caos determinista.

1.2 Problema de investigación

El propósito fundamental de este trabajo de tesis es implementar una herramienta auxiliar en la enseñanza de la mecánica no lineal utilizando como medio didáctico un péndulo caótico en la Escuela de Física para realizar una comparación de la enseñanza de la mecánica clásica sin considerar la TICs, laboratorio y experiencias de cátedra (análisis puramente teórico como se ha trabajado en las últimas décadas en la Universidad Nacional Autónoma de Honduras contra la enseñanza de la mecánica Clásica con análisis experimental.

Considerando que en las universidades de vanguardia utilizan un acompañamiento experimental se trabajará con un laboratorio como herramienta para afianzar los conocimientos teóricos.

1.3 Los objetivos de la Investigación

1.3.1 Objetivo general:

Analizar la aceptación del estudiante de la carrera de Física que cursa la asignatura de Mecánica Clásica II ante la implementación de un Laboratorio de Péndulo Caótico como parte experimental importante del tema de Dinámica no lineal que ayude a la comprensión, motivación y visualización de su aplicabilidad utilizando la metodología del aprendizaje invertido.

1.3.2 Objetivos Específicos:

1. Implementar un Laboratorio de Caos como parte del programa Mecánica Clásica II al grupo de estudiantes de la clase de mecánica clásica II, realizando la práctica de Laboratorio utilizando como medio didáctico el Péndulo caótico PASCO y la guía elaborada y luego validar el resultado obtenido si influye o no en las competencias adquiridas del grupo considerando el componente teórico importante de la temática.
2. Realizar un análisis de los péndulos de Caos que se encuentran disponibles en el mercado para su valoración y aceptación en prácticas de laboratorio.

1.4 Las preguntas del estudio

La metodología de enseñanza para la clase de mecánica clásica II en la temática de mecánica NO lineal en la Escuela de Física se basa el modelo educativo antiguo donde no se utiliza el entorno virtual (simulaciones, laboratorios, modalidad b-learning) por lo que es necesario preguntarnos ¿qué pasaría si consideramos un medio didáctico experimental?,

1.5 La justificación

El trabajo beneficiará a los estudiantes de Física en una mejor comprensión de la mecánica no lineal y tendrá un impacto positivo en un mejor entendimiento de las aplicaciones del concepto.

A nivel mundial el estudio de la mecánica no lineal es abstracto para los estudiantes por lo que este tipo de investigaciones generan un brecha entre el tipo de metodología necesaria para el entendimiento del estudiante utilizando un medio didáctico adecuando como lo es el péndulo caótico para mejorar las competencias adquiridas. Por ejemplo los físicos Morales y Marleny mencionan:

La mecánica no lineal se introduce generalmente a los estudiantes de Física y es quizá uno de los temas más difíciles de abordar ya que además de que implica de un desarrollo matemático importante, lo cual demanda el uso de una tercera dimensión, se da el hecho de que generalmente se presenta como una descripción teórica y como lo señalan Morales mira y Sainer Ortega , en todas las revisiones realizadas en la literatura actual no se percibe un desarrollo ni de los conceptos ni de sus implicaciones.

(Luz marleny Morales Mira, s.f.)

1.6 Delimitaciones del problema de investigación

El alcance de la investigación para este tipo de estudio descriptivo entorno al aprendizaje invertido utilizado en la mecánica no lineal tiene como base mejorar el rendimiento académico con la obtención de las competencias necesarias para un estudiante de física lo

cual beneficia a la institución y ayuda a formar profesionales competentes para nuestra sociedad.

1.7 Posibles deficiencias en el proceso de investigación

El estudio del caos está limitado para la temática de mecánica no lineal por lo que es importante recordar que no podemos tener una muestra grande de población por lo que estamos limitados sólo al análisis de muestras de seis ó siete estudiantes por periodo académico dicha investigación fue extendida hasta tres periodos consecutivos para analizar el comportamiento de los estudiantes en dicho periodo.

1.8 Viabilidad de la investigación Descripción de la clase de MECANICA II

El estudio es factible de realizar en la facultad de Ciencias, Escuela de Física ya que se imparte la clase de mecánica clásica II, donde es muy viable realizar este tipo de metodología en el tema de mecánica no lineal.

MECANICA CLÁSICA II (FS382)

Es una asignatura que se encuentra en el plan de estudios de la carrera de Física, y pretende que los estudiantes dominen los fundamentos básicos de la mecánica clásica, a un nivel universitario que les permita comprender la importancia de esta área en el contexto de la física. Comprender los formalismos Lagrangianos Hamiltonianos para establecer el vínculo entre la mecánica clásica y la mecánica relativista. Comprender las consecuencias en la mecánica de los postulados de la relatividad especial y manejar la formulación cuadvectorial típica. En ella se estudian los espacios de fase y también para finalizar con el temario la mecánica no lineal es decir el Caos.

CAPÍTULO II: EL MARCO TEÓRICO

2.1 Reseña histórica del problema de investigación

Teoría del aprendizaje significativo. La concepción constructivista del aprendizaje y la intervención educativa constituyen la convergencia de diversas aproximaciones psicológicas a problemas como:

2.1.1 EL CAOS

Definir el término **Caos** resulta muy complejo y difícil, debido al origen mismo de la palabra, ésta proviene del griego **Khaos** que significa “**abismo**”, o bien, “**abismo abierto**”. Esta descripción metafórica tiene mucho sentido en la Física moderna. A continuación se presentan diferentes definiciones de las ideas relacionadas con el análisis de la palabra Caos. (Weigend)

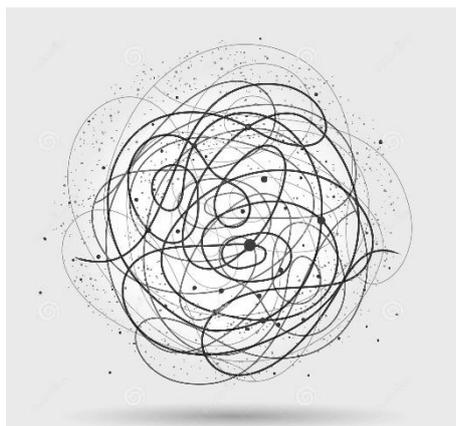


Figura 2.1.1 Bosquejo de una pintura de caos

CAOS.-En Mecánica y Matemáticas, es el comportamiento de sistemas dinámicos gobernados por leyes determinísticas, el cual es aparentemente azaroso o impredecible. Un término más preciso “Caos Determinístico”, sugiere una paradoja debido a que conecta dos nociones que son familiares y que comúnmente se consideran incompatibles. La primera es el azar, o impredecibilidad, como el caso de la trayectoria de una molécula en un gas o en la elección de un individuo de una población. En el análisis convencional, el azar fue considerado más aparente que real, surgiendo de la ignorancia de muchas causas del trabajo. En otras palabras se creía que el mundo era impredecible porque a su vez es complicado. La segunda noción es la de movimiento determinístico, como el de un péndulo o un planeta,

que ha sido aceptada desde el tiempo de Sir Isaac Newton como ejemplo del éxito predictivo de la ciencia, sobre aquello que inicialmente es complejo. (Hall)

CAOS.-En Mecánica Clásica es el comportamiento de un sistema dinámico que puede describirse geoméricamente como el movimiento sobre un “atractor”. Efectivamente las matemáticas de la Mecánica Clásica reconocen tres tipos de atractores: atractor de punto fijo (que caracteriza estados estacionarios), atractor de ciclo límite (ciclos periódicos) y toros (combinaciones de varios ciclos). En la década de los 60’s el matemático americano Stephen Smale descubrió una nueva clase de atractores, a los cuales llamó “atractores extraños”. Dentro de este tipo de atractores la dinámica es caótica. Más tarde reconoció que los atractores extraños han detallado la estructura a todas las escalas de magnificación (una clase de formas geométricas complejas que exhiben comúnmente la propiedad de autosimilaridad), que a su vez conducen a notables desarrollos en el área de gráficas computarizadas. (Véase el capítulo III). Las aplicaciones de las matemáticas del Caos son en extremo diversas, e incluyen el estudio del flujo turbulento de fluidos, irregularidades en el ritmo cardíaco, dinámica de poblaciones, reacciones químicas, física de plasmas y el movimiento de cúmulos de estrellas, entre otras muchas más. De las definiciones anteriores, podemos distinguir dos tipos de Caos, el filosófico y el matemático. En este trabajo sólo nos enfocaremos en el Caos matemático que se analizará a continuación..

El Caos Matemático

De las definiciones anteriores de Caos se puede observar, que definir este término, al menos matemáticamente, es más complejo de lo que parece. En 1986, en una prestigiosa conferencia internacional sobre Caos celebrada en la Real Sociedad de Londres se dio una definición más concreta del término:

CAOS.-Comportamiento estocástico que ocurre en un sistema determinístico.

Estocástico significa aleatorio y determinístico es un término introducido por Pierre Laplace, que en dinámica que se refiere a las leyes inmutables y precisas que sigue un sistema dinámico, es decir su ecuación. El término Caos fue evolucionando paralelamente con la ciencia. A continuación haremos un recuento de esa evolución.

La Visión de un Universo Mecánico

La metáfora de que los cielos se muevan análogamente a cómo funciona la maquinaria de un reloj puede tener una base más literal. Nuestras ideas sobre la cultura griega antigua provienen atención. de una vertiente intelectual: Filosofía, Geometría, Lógica. La tecnología ha recibido menos En parte, esto es debido a que han sobrevivido pocos ejemplos de la tecnología griega. Ahora sabemos que los griegos valoraban la Lógica, matemática intelectual, por encima de la Logística, matemática práctica. Pero nuestras fuentes sobre esta visión del tema no son imparciales. La historia completa de la tecnología griega puede que no se conozca nunca, pero los indicios con los que contamos son fascinantes.

De Copérnico a Newton

En 1473 Nicolás Copérnico se dio cuenta de que la Teoría de Tolomeo contenía un gran número de epiciclos idénticos y descubrió que podía eliminarlos si consideraba que la Tierra giraba alrededor del Sol. Los epiciclos idénticos eran trazas del movimiento de la Tierra, superpuesto sobre los movimientos de los restantes planetas. De golpe, esta Teoría Heliocéntrica redujo el número de epiciclos a treinta y uno.

En cierto sentido, el problema era geométrico y no dinámico. Si un cuerpo se mueve con una velocidad uniforme, entonces la distancia que recorre es el producto de su velocidad por el tiempo transcurrido. Si se mueve con velocidad no uniforme no existe una fórmula tan simple. Los matemáticos anteriores a Newton hicieron importantes progresos, mostrando que varias cuestiones dinámicas básicas podían expresarse en forma geométrica. Sin embargo, rara vez era fácil resolver los problemas geométricos. (Stewart I.)

Una gráfica que muestre cómo varía la velocidad de un cuerpo con el tiempo, tiene la forma de una curva. Por argumentos geométricos, puede mostrarse que la distancia total recorrida es igual al área comprendida bajo la curva. Similarmente, la velocidad es la pendiente de la tangente de otra gráfica, que representa la distancia frente al tiempo. Pero, ¿Cómo hallar estas áreas y tangentes? Newton, e independientemente Gottfried Leibniz, resolvieron estos problemas dividiendo el tiempo en intervalos cada vez más diminutos. El área comprendida bajo la curva, resulta ser la suma de las áreas de un gran número de estrechas bandas verticales.

Newton y Leibniz demostraron que el error cometido por tal aproximación resulta muy diminuto, a medida que el intervalo temporal se hace cada vez menor, y argumentaron que “en el límite” el error puede llegar a anularse totalmente. Del mismo modo, la pendiente de una tangente puede calcularse considerando dos valores del tiempo muy próximos y

permitiendo que la diferencia entre ambos sea arbitrariamente pequeña. Ningún matemático pudo proporcionar de forma lógica una justificación rigurosa para este método, pero ambos estaban convencidos de que era correcto. Leibniz hablaba de cambios “infinitesimales” en el tiempo, Newton tenía una imagen más física de las cantidades que influyen continuamente, y las llamó “fluentes y fluxiones”.

De Newton a Poincaré

La revolución del pensamiento científico que culminó con Newton, nos llevó a una visión del Universo como un gigantesco engranaje que funcionaba como un mecanismo de extraordinaria precisión. De acuerdo con esta visión, una máquina es, por encima de todo predecible. Bajo las mismas condiciones realizará las mismas cosas. Un ingeniero que sepa las especificaciones de la máquina y su estado en un momento dado puede, en principio, calcular exactamente lo que hará en cualquier instante posterior. Newton formuló sus leyes en la forma matemática que no sólo relacionaban entre sí cantidades, sino también las velocidades de cambio de dichas cantidades. Cuando un cuerpo cae libremente bajo una gravedad constante, no es su posición la magnitud que permanece constante; si así fuera, permanecería suspendido sin soporte alguno. Tampoco es la velocidad –el ritmo de cambio de la posición- la magnitud que permanece constante. Cuanto más cae un cuerpo, más rápido lo hace: por eso es más peligroso caerse desde un edificio alto que desde uno bajo. (Hall)

Las diversas ramas de la Física fueron cayendo una a una, bajo el dominio matemático. Joseph Fourier desarrolló una ecuación para describir el flujo de calor y obtuvo un método nuevo y potente para resolverla, ahora conocido como Análisis de Fourier. La idea principal consiste en representar cualquier forma de onda como una superposición de curvas sinusoidales.

La deformación de materiales sometidos a tensión, fundamental para la Ingeniería, condujo a las ecuaciones de la elasticidad. Análisis más profundos de la gravitación condujeron a ecuaciones que ahora denominamos en honor de Pierre Simon Laplace y de Simon Denis Poisson. Las mismas ecuaciones aparecían de nuevo en Hidrodinámica y Electroestática, y se desarrolló una generalización común, conocida como la “Teoría del Potencial”.

La Teoría del Potencial permitió a los matemáticos abordar problemas tales, como la atracción gravitatoria debida a una masa elipsoidal. Esto es importante en Astronomía, puesto que la mayoría de los planetas no son esferas, sino que están ligeramente achatados en sus polos. En el siglo XVIII (y principios del XIX) fue un periodo en el que se forjaron

la mayoría de las grandes teorías de la Física Matemática Clásica, siendo las principales excepciones las ecuaciones de Navier-Stokes, del flujo de un fluido viscoso, y las ecuaciones del Electromagnetismo, debidas a James Clerk Maxwell, que aparecieron un poco después. El descubrimiento de las ondas de radio vino a través de las ecuaciones de Maxwell.

Surgió un paradigma contundente. La forma de modelar la naturaleza era mediante ecuaciones diferenciales. Pero hubo un precio que pagar. Los matemáticos del siglo XVIII se dieron de topes en la pared, en un problema que ha plagado la Mecánica Teórica hasta nuestros días.

Obtener las ecuaciones es una cosa, resolverlas es otra muy diferente. El mismo Euler dijo: “Si no nos está permitido penetrar en un conocimiento completo concerniente a los movimientos de los fluidos, no se debe a la Mecánica, o a la insuficiencia de los principios conocidos del movimiento a los que hemos de atribuir la causa. Es el mismo análisis el que aquí nos abandona”

Los principales logros del siglo XVIII consistieron en obtener ecuaciones para modelar los fenómenos físicos. Pero hubo mucho menos suerte al resolver las ecuaciones.

A pesar de eso, había un ilimitado optimismo y un sentimiento general de que los problemas de la naturaleza habían quedado ampliamente resueltos. El éxito del paradigma de la ecuación diferencial fue impresionante y vasto. Muchos problemas, incluyendo los básicos y los importantes, condujeron a ecuaciones que podían ser resueltas. Comenzó un proceso de autoselección, por el que las ecuaciones que no podían resolverse eran, automáticamente, de menos interés que aquéllas que sí se podían resolver. Por supuesto, los libros de texto a partir de los cuales las nuevas generaciones aprendían las técnicas, sólo contenían problemas resolubles. La premisa era que el Universo sigue un camino dinámico único y predeterminado. Sólo puede hacer una cosa. Pierre Simon Laplace (1749-1827), en sus Ensayos Filosóficos Sobre Las Probabilidades, lo expresa de la siguiente manera:

“Un ser inteligente que en un instante dado conociera todas las fuerzas que animan la naturaleza y las posiciones de los seres que la forman, y que fuera lo suficientemente inmenso como para poder analizar dichos datos, podría condensar en una única fórmula el movimiento de los objetos más grandes del Universo y el de los átomos más ligeros. Nada sería incierto para dicho ser, tanto el futuro como el pasado estarían presentes ante sus ojos.”

De las afirmaciones de Laplace, podemos comprender el clima de entusiasmo que prevalecía en la ciencia de aquella época, cuando un fenómeno tras otro –mecánica, calor, ondas, sonido, luz, magnetismo, electricidad- eran dominados por la misma técnica. El paradigma

del determinismo clásico había nacido: si las ecuaciones describen la evolución del sistema unívocamente, en ausencia de perturbaciones externas aleatorias, su comportamiento está entonces unívocamente especificado en todo instante. Sin embargo, aún había cuestiones sin respuestas, tales como el movimiento de tres cuerpos bajo la gravedad. Pero de un modo u otro, tales ecuaciones eran vistas como excepciones.

Y, de hecho, incluso el determinismo matemático de las ecuaciones del movimiento tenían huecos. Una de las idealizaciones comunes, de la Mecánica Newtoniana, es considerar partículas elásticas duras. Si colisionan dos de tales partículas, salen rebotadas con ángulos y velocidades bien determinados. Pero las leyes de Newton no son suficientes para determinar el resultado de la colisión simultánea de tres de esas partículas. Las pretensiones eran muchas y los resultados eran defectuosos.

En 1750, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) recogió las ideas de Euler y, a partir de ellas, elaboró una reformulación sobre la Dinámica. Como resultado de este trabajo se produjeron dos ideas importantes.

Ambas habían estado presentes durante décadas, pero Lagrange pudo formularlas de manera concreta. La primera idea de Lagrange fue el principio de conservación de la energía. La Mecánica Clásica reconocía dos formas de energía. La energía potencial es la energía que un cuerpo tiene en virtud de su posición. Por ejemplo, en un cuerpo gravitatorio, la energía potencial es proporcional a la altura. Un cuerpo en la cima de una colina posee más energía potencial que uno en un valle, por ello la escalada a una colina es más fatigosa que un paseo a lo largo de la playa. La energía cinética es la energía que tiene un cuerpo en virtud de su velocidad: se ha de trabajar mucho más para frenar un caballo desbocado que cuando se trota sobre él. Durante el movimiento, y en ausencia de fricción, estas dos formas de energía pueden convertirse una a la otra.

Cuando Galileo dejó caer su célebre bala de cañón desde la torre inclinada de Pisa, ésta comenzó con mucha energía potencial pero no cinética, e intercambiaba energía potencial por cinética conforme caía. Es decir, descendió y aceleró, a final de cuentas: la energía total, es decir, la energía cinética más la potencial, no cambian. Cuando una bala de cañón cae de un parapeto pierde energía potencial y, por tanto, ha de ganar energía cinética. Es decir, se acelera. La segunda ley de Newton del movimiento expresa efectivamente este argumento cualitativo en una forma cuantitativa.²

La segunda idea de Lagrange fue introducir coordenadas generalizadas. Las coordenadas son un truco para convertir la Geometría en Álgebra, asociando un conjunto de números con

cada punto. Los matemáticos encontraban conveniente trabajar con varios sistemas de coordenadas, dependiendo del problema que estaban abordando.

Dinámica de nuevo, con mayores generalidades aún. En la versión de Hamilton de la teoría, el estado de un sistema dinámico se especifica por un conjunto general de coordenadas de posición (similares a las de Lagrange) junto con un conjunto relacionado de coordenadas de momento (las velocidades correspondientes multiplicadas por la masa). Una cantidad única, ahora conocida como el hamiltoniano del sistema, define la energía total en términos de las posiciones y momentos. El ritmo de cambio con el tiempo, de las coordenadas de posición y de momento, se expresa en función del hamiltoniano mediante un sistema de ecuaciones unificado y simple. A pesar de todos los importantes logros alcanzados en la Física y la Matemática Clásica, permanecieron sin tocar algunas áreas de la naturaleza. Los matemáticos podían calcular el movimiento de un satélite de Júpiter, pero no el de un copo de nieve en una ventisca. Podían describir el crecimiento de una burbuja de jabón, pero no el de un árbol.

Los matemáticos habían podido concretar, algo del orden del Universo y las razones de ese orden, pero todavía vivían en un mundo desordenado.

Creían, que gran parte del desorden (o caos) obedecía a las mismas leyes fundamentales; su incapacidad para aplicar aquellas leyes a cualquier efecto eran simplemente una cuestión de complejidad. El movimiento de dos masas puntuales podía calcularse de forma precisa. El caso de tres partículas era ya demasiado difícil para una solución completa, aunque podía resolverse de forma aproximada. El movimiento a largo plazo de los aproximadamente cincuenta cuerpos mayores en el sistema solar era imposible de controlar en su totalidad. (Stewart I.)

La Matemática Faltante: “Probabilidad” La Teoría de la Probabilidad se originó con un tema bastante práctico, el juego. El jugador tiene un sentido instintivo de las probabilidades en una apuesta, Girolamo Cardano (1501-1576), el erudito del juego, un genio intelectual y pícaro incorregible, fue el primero en escribir sobre la Probabilidad.

En 1654, el caballero de Mére le preguntó a Blaise Pascal (1623- 1662) cómo repartir mejor las apuestas en un juego de azar cuando se interrumpe. Pascal escribió a Pierre de Fermat (1601-1665) y entre los dos encontraron una respuesta. Ésta se imprimió en 1657 en el primer libro que se dedicó igualmente a la Teoría de la Probabilidad “De ratiocinis in ludo aleae” de Christian Huygens.

La Probabilidad, proviene de la publicación de la obra de Laplace “Teoría Analítica de las Probabilidades”, en 1812. De acuerdo con él, la probabilidad de un suceso es el número de maneras en que puede ocurrir, dividido por el número total de cosas que pueden suceder, sobre el supuesto de que estas últimas son igualmente probables. Una de las partes más importantes de la Teoría de las Probabilidades es la Estadística, y ésta a su vez, centra muchos de sus estudios en la famosa distribución normal. Ésta es una curva, en forma de campana, que modela fielmente las proporciones de una población que tiene alguna característica particular.

La distribución normal fue denominada originalmente la ley del error, debido al trabajo de los astrónomos y matemáticos del siglo XVIII, quienes cuando trataron de calcular las órbitas de los cuerpos celestes, se vieron forzados a tomar en cuenta el error observacional. La ley del error describe cómo se aglomeran los valores observados alrededor de un valor promedio, y proporciona estimaciones de las posibilidades de que ocurra un error de un valor determinado. Adolphe Quetelet (1796-1874) la importó a las ciencias sociales, y aplicó el método a todo lo que se le ocurrió: medidas del cuerpo humano, delitos, matrimonios, suicidios. En comparación con la Mecánica Celeste de Laplace a la suya la tituló deliberadamente Mecánica Social. Quetelet fue lo suficientemente hábil para extraer conclusiones generales de la supuesta constancia de los valores sociales, y sugirió la idea de un hombre promedio. No sólo pensaba en la condición humana como una especie de dinámica social, quería ocuparse de ella como si fuese un ingeniero. Ajustando, estabilizando, amortiguando las oscilaciones. Para él el hombre promedio no era una abstracción matemática, sino un ideal moral.

Las ciencias sociales difieren de las ciencias físicas en muchos aspectos, uno de los cuales es que los experimentos controlados son raramente realizables en las ciencias sociales. Si un físico desea examinar el efecto del calor en una barra de metal, puede calentarla a varias temperaturas y comparar los resultados. Si un economista desea examinar el efecto de una política fiscal en la economía de un país, puede aplicarla o no, pero no puede permitirse el lujo de aplicar diferentes regímenes fiscales a la misma economía bajo las mismas condiciones. Alrededor de 1880, las ciencias sociales comenzaron a desarrollar un sustituto del experimento controlado, derivado de los primeros trabajos de Quetelet sobre la distribución normal. El trabajo más importante fue realizado por tres hombres: Francis Galton, Ysidro Edgeworth y Karl Pearson. Cada uno de ellos destacaba en su propio campo de conocimientos: Galton, en Antropología; Edgeworth, en Economía, y Pearson, en Filosofía. Entre ellos convirtieron la Estadística en una ciencia más o menos exacta.

Al final del siglo XIX la ciencia había adquirido dos paradigmas muy diferentes para los modelos matemáticos. El primero y más antiguo, era el análisis de gran precisión por medio de las ecuaciones diferenciales; en principio, era capaz de determinar la evolución completa del Universo, pero en la práctica, sólo era aplicable a problemas simples y bien estructurados. El segundo era el análisis estadístico de cantidades promediadas, que trabajaban con cantidades globales del movimiento de sistemas altamente complejos. No había prácticamente contacto alguno, a nivel matemático, entre ambos métodos. Las leyes estadísticas no se calculaban como consecuencia matemática de las leyes de la Dinámica, eran algo extra y se basaban en la intuición física.

A medida que fue transcurriendo el siglo XX, la metodología estadística fue ocupando su lugar al lado del modelo determinista. Apareció una palabra nueva para reflejar que incluso el azar tenía sus propias leyes: estocástico (La palabra griega *stochastikos* significa de buena puntería y de este modo expresa la idea de usar las leyes del azar para el beneficio personal). La matemática de procesos estocásticos – secuencia de sucesos determinados por el azar- creció junto con los procesos deterministas.

El orden ya no fue nunca más sinónimo de ley y el desorden de fuera de ley. Ambos, el orden y el desorden, tenían leyes. Pero estas leyes eran de diferentes comportamientos. Una ley para lo ordenado, otra para lo desordenado. Dos paradigmas, dos teorías. Dos formas de ver el mundo. El Determinismo para los sistemas simples con pocos grados de libertad, la Estadística para los sistemas complicados con muchos grados de libertad. Cualquier sistema, era aleatorio o no lo era. Si lo era, los científicos usaban algún método estocástico; si no, preparaban sus ecuaciones deterministas.

Los dos paradigmas eran igualmente aceptados por los científicos, eran igualmente útiles, igualmente importantes, igualmente matemáticos. Iguales, pero diferentes. Muy diferentes. Los científicos sabían que eran diferentes, y sabían por qué; los sistemas simples se comportan de forma simple, los sistemas complicados, se comportan de forma complicada. Entre la simplicidad y la complejidad no puede haber un terreno común.

Pero los científicos en su afán por entender cada vez mejor las cosas se cuestionan y peor aún, cuando se sabe algo con firmeza, los cuestionamientos son más profundos. Si no se cuestiona, se vive a base de fe y no de ciencia.

¿Puede un sistema determinista simple comportarse como uno aleatorio? El progreso completo de la ciencia estaba basado en la creencia de que la forma de buscar la simplicidad

en la naturaleza es hallando ecuaciones diferenciales para describirla. ¡Que pregunta tan tonta!

En el momento de la historia al que acabamos de llegar sólo se podía distinguir una voz disidente y de forma débil e incierta, era simplemente una indicación temblorosa de problemas futuros, dicha voz se elevó una sola vez, después calló, una voz que –si se escuchó- fue ignorada. Era la voz de un hombre que presumiblemente fue el matemático más grande de su época, otro revolucionario de la turbulenta ciencia de la Dinámica. La voz de un hombre que tocó el Caos...

Y se horrorizó por ello. Nacido en Nancy, Francia, el gran Henri Poincaré (1854-1912). Entre sus innumerables descubrimientos e invenciones fundó la moderna teoría cualitativa de los sistemas dinámicos. Fue un unificador, buscador de principios generales, el último de los tradicionalistas y el primero de los modernos (ver figura I.2.5-1). Se movió, prácticamente, por todos los temas de la Matemática de su época: Ecuaciones Diferenciales, Teoría de Números, Análisis Complejo, Mecánica, Astronomía, Física Matemática. Su creación más destacable fue la Topología: el estudio general de la continuidad. Él la denominó análisis situs, análisis de la posición. Y la aplicó a uno de los problemas más difíciles en la frontera de la Dinámica.

La memoria por la que se le concedió el premio a Poincaré se titulaba (en francés) El Problema de los Tres Cuerpos y las Ecuaciones de la Dinámica. Se publicó en 1890 y tenía 270 páginas en el original.

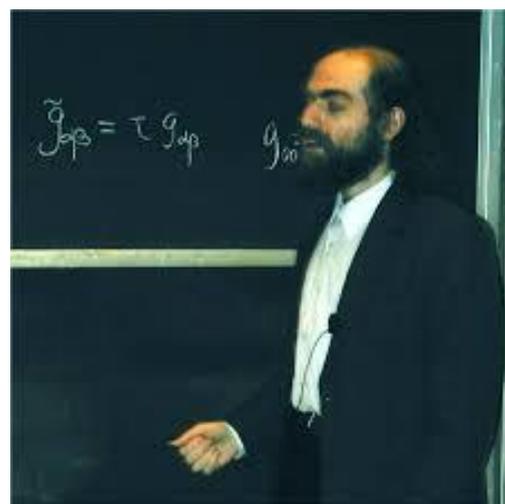


Figura 2.1.2 Henri Poincaré

La primera parte establecía propiedades de las ecuaciones dinámicas; la segunda aplicaba los resultados al problema de un número arbitrario de cuerpos moviéndose sometidos a la gravitación newtoniana. Así, de este modo llegamos a la conclusión de que la naturaleza posee muchas regularidades que pueden ser registradas, analizadas, y tal vez, predichas y controladas. Todo en la naturaleza parecía estar regido por leyes muy precisas y exactas que explicaban el desarrollo del Universo, ahora sabemos que sistemas que obedecen leyes inmutables y precisas no siempre actúan de manera predecible y regular. Leyes deterministas pueden producir comportamientos que parecen aleatorios.

Los conceptos de predicción o de repetibilidad de un experimento adquieren nuevos aspectos cuando se analizan desde la óptica del Caos, se descubrió que con reglas muy bien establecidas y con el conocimiento total de las condiciones iniciales que rigen un sistema, éste puede tomar caminos muy diferentes y no poder tener control del sistema en evolución. Es por ello que la importancia en el estudio de fenómenos que son totalmente deterministas y que producen comportamientos tan inesperados, nos lleve a tener diversas técnicas de caracterización de series tiempo así como también técnicas modernas predicción. [16]

La importancia de la caracterización de las series de tiempo radica en que nos podemos anticipar un paso, es decir, podemos encontrar la explicación de por qué algunas series son mejores predecibles que otras, y cuáles son imposibles de predecir, aún con las mejores técnicas modernas de predicción que son muy poderosas como las llamadas técnicas neurocomputacionales y otras relacionadas. En este campo se encuentran las Redes Neuronales Artificiales, y la literatura ha mostrado que actualmente son las mejores en cuanto a predicción del fenómeno en estudio por series de tiempo, debido a que su importancia radica en que puede tratar con series que son muy complejas, no-lineales y que además no es necesario contar con las ecuaciones matemáticas que gobiernan o describan tales fenómenos.

2.2 Bases teórica

2.2.1 Sistemas Lineales y No-Lineales

Como se mencionó el Caos se puede entender de dos formas, una filosófica y otra matemática; sin embargo, necesitamos describir un tipo de comportamiento particularmente complejo que algunos sistemas dinámicos.

Caos en sí es realmente sólo un tipo de comportamiento que se exhibe en estos sistemas. Su esfera de influencia está más ligada a la llamada “Dinámica No-Lineal”, el estudio de este comportamiento dinámico lo centraremos con el fluir del tiempo (que es, el comportamiento en tiempo) de un sistema no-lineal. Iniciemos con la siguiente definición, aunque burda, nos indicará el camino para llegar a una más satisfactoria:

Un sistema no-lineal es aquel que se puede modelar matemáticamente con ecuaciones que en algunos casos evolucionan con el tiempo y éstas son no-lineales; esto es, las variables dinámicas que describen las propiedades del sistema (por ejemplo, posición, velocidad, aceleración, presión, etc...) aparecen en las ecuaciones en una forma que está lejos de tener variables con exponente 1. (-Hilborn)

Se dice que un sistema es lineal cuando y sólo cuando la siguiente condición se satisface: Supóngase que $g(x, t)$ y $h(x, t)$ son soluciones linealmente independientes, de la ecuación del sistema que evoluciona con el tiempo; entonces $c * g(x, t) + d * h(x, t)$ es además una solución, donde c y d son cualesquiera constantes reales o complejas. $g(x, t)$ y $h(x, t)$ son funciones linealmente independientes en una cierta región siempre que la combinación lineal $\alpha * g(x, t) + \beta * h(x, t) = 0$ exige que $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ para toda x y t en la región mencionada.

Además se puede expresar la noción de linealidad en términos de la respuesta de un sistema a un estímulo. Suponga que $h(x, t)$ da la respuesta del sistema a un estímulo particular $S(t)$. Si se cambia $S(t)$ a $2 S(t)$, un sistema lineal tendrá la respuesta $2 h(x, t)$. Para un sistema no-lineal, la respuesta será más grande o más pequeña que $2 h(x, t)$.

En consecuencia tenemos frente a nosotros un sistema modelado por una ecuación lineal.

2.2.2 La Importancia de la No-Linealidad

La Dinámica No-lineal está inmersa en el estudio de los sistemas cuyas ecuaciones que evolucionan con el tiempo son no-lineales. ¿Por qué es importante estudiar la no-linealidad? La idea básica es la siguiente: Si un parámetro que describe un sistema lineal, como la constante de rigidez k , es modificado ligeramente, entonces la frecuencia y amplitud de las

oscilaciones resultantes cambiarán, pero la naturaleza cualitativa del comportamiento (simples oscilaciones armónicas en este ejemplo) permanecerá casi igual. En efecto, cambiando proporcionalmente los parámetros longitud y tiempo de los ejes, se observa que el comportamiento para cualquier valor de k es semejante para algún otro valor de k .

Como veremos posteriormente, para sistemas no-lineales, un cambio pequeño en uno de sus parámetros puede conducir a cambios radicalmente diferentes tanto en el comportamiento cuantitativo como en el cualitativo. Para un valor definido, es posible que el comportamiento sea periódico, para otro valor ligeramente diferente, es posible que el comportamiento sea completamente aperiódico. Se podría señalar que casi todos los sistemas reales son no-lineales al menos en alguna extensión.

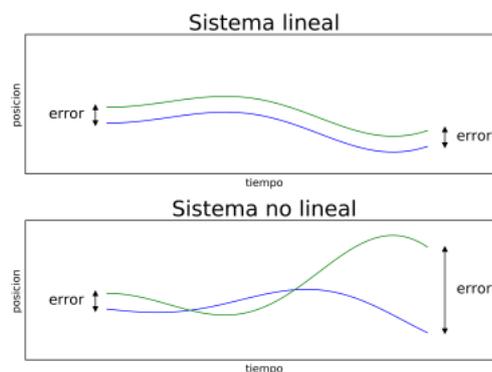


Figura 2.2.2.1 Comportamiento frente a las condiciones iniciales.

2.2.3 La No-Linealidad y el Caos

Como se había mencionado anteriormente, modificando ligeramente los parámetros de entrada en sistemas no-lineales, a veces muy simples, éstos pueden dar lugar a un comportamiento complejo llamado Caos. El sustantivo Caos y el adjetivo caótico con frecuencia son usados para describir cómo en un sistema dado, al transcurrir el tiempo, evoluciona en un movimiento aperiódico (es decir que nunca se repite exactamente igual) y es aparentemente aleatorio o ruidoso. Subrayando que esta aleatoriedad caótica es aparente y tiene un orden bien definido, en algún sentido, por las ecuaciones que describen el sistema.

En general, se necesitan las siguientes hipótesis para determinar el comportamiento de un sistema, que en general suelen llamarse determinísticos:

- 1.- Ecuaciones que evolucionan con el tiempo;
- 2.- los valores de los parámetros que describen el sistema;

3.- las condiciones iniciales.

Si vemos un sistema con un comportamiento complejo que parece aleatorio, podemos tratar de explicarlo dando un argumento basado en la noción de “ruido” o uno basado en el de la “complejidad”. Si estamos de acuerdo con el primer argumento, entonces en consecuencia el comportamiento complejo puede deberse a la influencia de efectos externos que no fueron controlados como picos eléctricos, vibraciones mecánicas o fluctuaciones de temperatura. Ya que estas perturbaciones externas están cambiando de una forma incontrolada (y tal vez aleatoria). Por el otro lado, si estamos de acuerdo con el argumento de complejidad, vemos que la mayoría de los sistemas reales en Biología, Química, Física, Ingeniería, y en muchas disciplinas más, están hechos de billones y billones de átomos y moléculas, todos ellos interactuando, y debido a que no se tiene control preciso (o aun conocido) del comportamiento de todos esos átomos y de 45 moléculas (tal vez, lo mejor que se puede hacer es controlar su comportamiento promedio), no es sorprendente que esta carencia de control conduzca a fluctuaciones y aleatoriedades en el comportamiento total del sistema. (Espinoza, 2004)

Para ser un poco más precisos, podemos decir que esos sistemas complejos tienen muchos grados de libertad³, y su actividad es lo que conduce al comportamiento aparentemente aleatorio. Por supuesto, en muchos casos, ambos, ruido y complejidad, pueden ser factores que contribuyen en gran medida a que el sistema contenga un mayor número de grados de libertad.

Una de las consecuencias del estudio del Caos es que éste provee una explicación alternativa para esta aparente aleatoriedad -una que depende no sobre ruido sino sobre complejidad-. El comportamiento caótico aparece en sistemas que están esencialmente libres de ruido y son además relativamente simples -sólo unos pocos grados de libertad están activos-. Por supuesto, si creemos que el Caos juega un papel en cualquier experimento dado, necesitamos establecer que el ruido no es un factor mayor, y que debemos saber el número de grados de libertad activos. La Teoría del Caos nos provee herramientas para llevar a cabo este análisis.

Se ha enfatizado el estudio del comportamiento de un sistema que evoluciona con el tiempo. Cabe mencionar que otra rama importante de la Dinámica No-lineal extiende este estudio a esos sistemas que tienen una extensión espacial significativa, pero no será objeto de estudio de esta tesis.

2.2.4 Los Fenómenos No-lineales

A lo largo de muchos años, hemos visto que en diversas ciencias se han ido elaborado poco a poco estudios sobre los fenómenos no-lineales y cómo en algunas situaciones no han sido posible describirlos de manera satisfactoria, en otros casos sencillamente se han eludido. Por ejemplo, en el caso de la Meteorología, un problema muy importante es poder predecir el clima que prevalecerá no sólo al día siguiente, sino una semana, un mes, un año después. Sin embargo, a pesar de que esta ciencia se ha desarrollado bastante y mucha gente ha trabajado en ella durante más de un siglo, este tipo de predicciones no ha podido llevarse a cabo de manera satisfactoria. Lo mismo pasa en muchas otras áreas.

En la Física podemos mencionar el fenómeno de la turbulencia. Cuando un fluido se mueve a lo largo de un tubo, en ciertas condiciones el fluido lo hace de manera muy tranquila y regular; se dice que el flujo es laminar y sus propiedades sí han podido ser determinadas. Sin embargo, en otras circunstancias, por ejemplo si aumentamos la presión para aumentar el fluido hacia la salida, el flujo se vuelve turbulento: empiezan a aparecer primero pequeños remolinos, después remolinos más y más grandes, y el movimiento del fluido se vuelve muy irregular. Se dice que el flujo ha entrado en turbulencia. Este efecto no se ha podido entender satisfactoriamente en más de cien años de estudio de la Hidrodinámica.

En la Economía tampoco se han podido entender los motivos por los cuales en cierto momento el índice de la bolsa de valores empieza a subir y luego comienza a descender. En muchas ocasiones parece ser un fenómeno azaroso.

Los casos anteriores ilustran algunos de los problemas que han quedado sin solución. Sin embargo, con el advenimiento de los estudios de la Dinámica No-lineal se ha podido tener una interpretación diferente del fenómeno que es bastante prometedora. Un aspecto importante, que es común a diferentes fenómenos, es la posibilidad de que se puedan hacer predicciones sobre los mismos. Por ejemplo, si se sabe que un día está lloviendo, se quisiera predecir si seguirá esta situación al día siguiente o si se mantendrá dentro de dos días más. Es decir, ¿existirá la posibilidad de poder predecir lo que ocurrirá en el futuro si sabemos en qué situación nos encontramos ahora?

2.2.5 ¿QUÉ SON LOS FENÓMENOS CAÓTICOS?

Sistemas simples pueden generar comportamientos muy complicados y el mismo sistema, con pequeñas variaciones en las condiciones iniciales, se puede comportar en formas

radicalmente diferentes. Este tipo de comportamiento impredecible es caótico. Estudios recientes en Matemáticas, Física y Ciencia Aplicada han conducido a métodos para estudiar Caos y han mostrado que no sólo hay orden en el Caos, sino que el Universo es posiblemente más caótico de lo que nos podamos imaginar.

2.2.5.1 Sensibilidad a las Condiciones Iniciales

Las leyes del movimiento de Isaac Newton, expuestas a fines del siglo XVII, implican que si se conoce la fuerza que se aplica sobre una partícula se puede conocer la trayectoria que ésta seguirá. Sin embargo, esta posibilidad contiene una condición: debe especificarse la posición y la velocidad que tiene la partícula en el instante inicial. Es decir, si se pueden precisar las condiciones iniciales de la partícula, las leyes de Newton permiten conocer completamente su futuro, lo cual resultará válido para cualquier sistema que tenga cualquier número de partículas. Basado en estos hechos, el matemático francés Pierre Simon de Laplace (1749-1827) llegó a jactarse de que si se le dieran las posiciones y velocidades iniciales de cada una de las partículas que componen el Universo, podría predecir el futuro por el resto del tiempo. En el año de 1776 Laplace escribió lo siguiente:

“El estado presente del sistema de la naturaleza es evidentemente una consecuencia de lo que era en el momento anterior y, si imaginamos una inteligencia que en un instante dado abarcara todas las relaciones entre los entes de este Universo, podría decir las posiciones respectivas, los movimientos y las propiedades generales de todos estos entes en cualquier tiempo del pasado o del futuro. La Astronomía Física, la rama del conocimiento que hace el honor más alto a la mente humana, nos da una idea, aunque imperfecta, de lo que sería tal inteligencia.”

“La simplicidad de la ley del movimiento de los cuerpos celestes y las relaciones entre sus masas y distancias, permite al análisis seguir su movimiento hasta cierto punto; y, para determinar el estado del sistema de estos grandes cuerpos en los siglos pasados o futuros, le basta al matemático que sus posiciones y velocidades sean conocidas por la observación en cualquier momento del tiempo. El hombre debe esta capacidad al poder del instrumento que emplea y al pequeño número de relaciones que utiliza en sus cálculos. Pero la ignorancia de las diversas causas implicadas en la producción de sucesos, así como su complejidad, junto a la imperfección del análisis, impide que lleguemos a la misma certidumbre sobre la vasta mayoría de los fenómenos. Por ello hay cosas inciertas para nosotros, cosas más o menos

probables, y buscamos compensar la imposibilidad de conocerlas determinando su diferente grado de probabilidad. Así es como debemos a la debilidad de la mente humana una de las más delicadas e ingeniosas de las teorías matemáticas, la ciencia del Azar y la Probabilidad.” Este hecho conlleva a un riguroso determinismo en las leyes de la naturaleza. Pero en el año de 1903 Poincaré escribió lo siguiente: “...nosotros solamente podemos conocer la situación inicial de manera aproximada. Si esto nos permitiera predecir la situación que sigue en el tiempo con la misma aproximación, es todo lo que necesitaríamos, y podríamos decir que el fenómeno ha sido predicho, que está regido por leyes. Pero esto no es siempre así; puede ocurrir que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales produzcan condiciones muy diferentes en los fenómenos finales. Si un pequeño error en las condiciones iniciales produce un enorme error en las condiciones finales, la predicción se vuelve imposible y tenemos un fenómeno fortuito.

Consideremos un fenómeno físico muy simple, la caída de los cuerpos. Una piedra cae al soltarla debido a que experimenta una fuerza, la de gravedad, que está dirigida hacia el centro de la Tierra. Con base en las leyes de Newton se puede encontrar que la trayectoria que sigue la piedra es una línea recta vertical. Sin embargo, la misma piedra sujeta a la misma fuerza (su peso) también puede moverse a lo largo de otra trayectoria.

Nos podemos hacer la siguiente pregunta: si en los dos casos la misma piedra estuvo sujeta a la misma fuerza, ¿por qué en un caso se movió a lo largo de una línea recta vertical y en el otro a lo largo de una parábola? Como podemos apreciar, a pesar de ser la misma piedra y la misma fuerza, hubo una diferencia.

- En el primer caso se soltó la piedra, lo que significa que en el instante inicial su velocidad fue nula.
- En el segundo caso se le dio a la piedra, en el instante inicial, una velocidad dirigida hacia arriba.

Por lo tanto, en los dos casos hubo condiciones iniciales diferentes y, en consecuencia, las trayectorias seguidas fueron distintas, a pesar de que en ambos casos la piedra estuvo sujeta a la misma fuerza, la gravedad. Este ejemplo nos ilustra un hecho muy importante: para conocer el tipo de evolución que sigue un sistema se necesitan conocer, además de las leyes que lo rigen (en los casos de arriba, las de Newton y la fuerza de gravedad), las condiciones

iniciales del sistema. Bajo las mismas leyes, diferentes condiciones iniciales producen distintas evoluciones en el tiempo.

La cuestión a la que se refirió Poincaré tiene que ver con lo siguiente. Tomemos dos piedras iguales. Soltemos la primera piedra desde cierto punto, digamos el A, sobre el suelo. Al mismo tiempo soltemos la segunda piedra desde el punto B, que está muy cercano al punto A. Nos damos cuenta de que, no obstante que en ambos casos las velocidades iniciales de las piedras son iguales (cero), sus posiciones iniciales no son iguales ya que las soltamos desde dos puntos distintos, aunque difieren muy poco. Decimos que las condiciones iniciales de ambas piedras no son las mismas, aunque sí muy parecidas.

Veamos qué pasa con las posiciones que van ocupando las dos piedras en sus caídas. Si nos fijamos medio segundo después de haber soltado las piedras veríamos (figura 3.1-2b) que están en las posiciones C y D, respectivamente. Nos damos cuenta de que la distancia entre los puntos C y D también es muy pequeña (de hecho es igual a la de los puntos iniciales A y B). En consecuencia, si la diferencia de condiciones iniciales es muy pequeña, entonces al transcurrir el tiempo la diferencia entre las posiciones de las dos piedras sigue siendo muy pequeña. Es decir, en este caso, las trayectorias que siguen son muy cercanas

Veamos ahora otra situación. Supongamos que soltamos las dos piedras iguales desde puntos cercanos a la cima de una montaña. La primera en la cima C, y la otra desde el punto A de la montaña, es decir, un lugar que no es ya la cima, pero muy cercano a ella.

¿Qué ocurre ahora con las trayectorias de las piedras? Pues la primera se quedará en la cima, mientras que la segunda rodará por la ladera de la montaña. En consecuencia, después de cierto intervalo, digamos 3 segundos, la separación entre las posiciones de ambas piedras será muy grande: una en la cima y la otra abajo. En este caso, nuevamente las condiciones iniciales de las dos piedras son muy parecidas pero ahora sus posiciones, al transcurrir el tiempo, difieren marcadamente. Es decir, con el paso temporal en este caso no se conservan las posiciones muy cercanas unas de otras.

Otro ejemplo, en la que se observan dos bolas de billar que inciden sobre una mesa que tiene varios obstáculos convexos. Las posiciones iniciales de las bolas son ligeramente distintas. Vemos que aun cuando las velocidades iniciales de las bolas sean las mismas, las trayectorias que siguen son completamente diferentes

De los dos casos que hemos considerado podemos afirmar que hay dos tipos de situaciones: 1) Condiciones iniciales muy parecidas producen condiciones finales también muy parecidas, y 2) condiciones iniciales muy parecidas producen condiciones finales completamente diferentes.

Ahora bien, para determinar la evolución de un sistema cuando el tiempo transcurre debemos conocer las leyes que lo rigen, así como sus condiciones iniciales. Si fuera posible determinar con toda precisión estas condiciones iniciales entonces podríamos saber en cualquier instante las características que tiene el sistema. A esto se refería Laplace cuando decía que si se le daban las condiciones iniciales del Universo podría determinar el futuro. Sin embargo, en una situación real no podemos afirmar que se puedan determinar con toda precisión las condiciones iniciales. Al medir estas cantidades siempre se cometerán errores, que son inevitables. Por lo tanto, lo más que se puede hacer es fijar las condiciones iniciales en forma aproximada. Estas condiciones iniciales diferirán de las verdaderas condiciones iniciales del sistema en muy poco si los errores cometidos son pequeños. ¿Qué podemos decir acerca de la trayectoria que seguirá el sistema?, ¿Podemos predecirla?

De lo que se ha visto puede ocurrir una de dos posibilidades:

1) Si estamos en un caso en que diferencias de condiciones iniciales producen condiciones finales muy parecidas, entonces podremos predecir qué ocurre con el sistema, con el transcurso del tiempo, también con un error pequeño. En este caso la separación entre las trayectorias es muy pequeña y la predicción que se haga será muy parecida a la trayectoria real.

2) Si se está en el caso en que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales producen condiciones finales muy distintas, entonces la trayectoria real que siga el sistema se separará muy marcadamente de la trayectoria que podamos predecir. En este caso nuestra predicción está muy lejos de la realidad, por lo que no hay posibilidad de hacer predicción válida alguna, o si la hay el error sería muy grande.

El ejemplo del billar y las anteriores discusiones a éste, son discusiones en la que se presentaron hechos plausibles sin llegar a una demostración. Se puede hacer un análisis matemático riguroso del billar con obstáculos convexos, dicho análisis fue realizado por el ruso Yakov G. Sinai seguido por otros matemáticos. Este tipo de sistemas con sensibilidad a las condiciones iniciales tienen análisis matemáticos muy complejos.

2.2.6 La Pequeña Causa de Poincaré

Como vimos en la sección anterior, el recorrido de una bola sobre una mesa de billar con obstáculos convexos da lugar a un fenómeno un poco extraño. Supongamos que modificamos la condición inicial, reemplazando la posición y la velocidad reales de la bola por una posición y una velocidad imaginarias ligeramente diferentes. Entonces la trayectoria real y

la trayectoria imaginaria, que al comienzo estaban muy próximas, empezarán a divergir cada vez más rápidamente hasta que de pronto no tengan nada que ver una con la otra. Esto es a lo que los científicos han llamado “sensibilidad a las condiciones iniciales”. Conceptualmente éste es un descubrimiento muy importante.

El movimiento de la bola de billar está determinado sin ambigüedad por la condición inicial, y aun así estamos esencialmente limitados en la predicción de su trayectoria. Tenemos a la vez determinismo e impredecibilidad a largo plazo. Nuestro conocimiento de la condición inicial está siempre empañado por una cierta imprecisión: no somos capaces de distinguir la condición inicial real de las numerosas condiciones iniciales imaginarias que están próximas a ella. Y por consiguiente, no sabemos cuál de las predicciones posibles es la correcta.

Pero si no podemos predecir el comportamiento de una bola de billar, ¿Qué sucede con el movimiento de los planetas? ¿Y con la evolución de los fenómenos meteorológicos? El movimiento de los planetas es predecible con siglos de antelación, pero las previsiones meteorológicas fiables están limitadas a una o dos semanas. Sin embargo, debemos hacer algunas aclaraciones sobre la bola de billar antes de avanzar en nuestra discusión sobre la predecibilidad. Al estudiar el movimiento de la bola de billar hemos despreciado el rozamiento. ¿Teníamos derecho a hacer esta aproximación? Este tipo de problemas se plantean constantemente en Física: ¿Son admisibles las idealizaciones que se utilizan?

En el caso de la bola de billar, la presencia del rozamiento implica que la bola acabará por detenerse. Pero si se detiene mucho tiempo, después de que el movimiento se haya hecho impredecible, resultaba práctico suponer que no había rozamiento. (La teoría de la bola de billar con obstáculos convexos tiene la ventaja de ser bastante fácil de analizar, pero su aplicación a un billar real daría lugar a serias dificultades).

Pero ahora surge un problema más serio: ¿Hasta qué punto el fenómeno de la sensibilidad a las condiciones iniciales es general? Al analizar el sistema de la bola de billar con obstáculos convexos, hemos llegado a la conclusión de que una pequeña variación inicial conducirá a la impredecibilidad futura a largo plazo. Este comportamiento puede presentarse en todo tipo

de sistema, puede tratarse de un sistema mecánico sin rozamiento, o de un sistema con una fuente de energía que reemplaza a la que se disipa por rozamiento, o incluso a un sistema más general con componentes eléctricos, químicos, etc... Lo que cuenta es que exista una evolución temporal determinística bien definida. En tal caso, los matemáticos dicen que se tiene un sistema dinámico. Los planetas que giran en torno a una estrella constituyen un sistema dinámico (idealizado con un sistema mecánico sin rozamiento). Un fluido viscoso en cuyo interior rota una hélice es también un sistema dinámico (disipativo en este caso pues existe un rozamiento interno, llamado disipación, en el fluido viscoso). Y si encontramos una evolución temporal determinística que idealice de forma apropiada la historia de la humanidad será también un sistema dinámico. Pero volvamos a la pregunta anterior: la sensibilidad a las condiciones iniciales ¿Es la excepción a la regla para los sistemas dinámicos? La evolución temporal ¿Es o no es, en general, predecible a largo plazo? De hecho, hay varias posibilidades. En algunos casos, por ejemplo, para un péndulo con rozamiento, no hay sensibilidad a las condiciones iniciales ya que se puede predecir el comportamiento del péndulo y cómo evolucionará hacia un estado de reposo. En otros casos, se tiene sensibilidad a las condiciones iniciales cualquiera que éstas sean, como es el caso de la bola de billar con obstáculos convexos. Finalmente, muchos sistemas dinámicos tienen un comportamiento mixto, para el que la predicción a largo plazo es posible para ciertas condiciones iniciales pero no para otras. Sin embargo, el problema de las condiciones iniciales no es nuevo. Ya nuestros antepasados habían descubierto que el futuro era difícil de predecir y que pequeñas causas podían tener grandes efectos.

Lo relativamente nuevo es la demostración de que para ciertos sistemas, un pequeño cambio en la condición inicial produce habitualmente un cambio en la evolución posterior del sistema, de modo que las predicciones a largo plazo resultan completamente vanas. Esta demostración fue llevada a cabo a finales del siglo XIX por el matemático francés Jacques Hadamard.

El sistema considerado por Hadamard era una especie de billar alabeado en el que la superficie plana de la mesa estaba reemplazada por una superficie con curvatura negativa⁴. Lo interesante del problema era el movimiento de un punto que permanece ligado a la superficie sobre la que se desplaza sin rozamiento. De este modo el billar de Hadamard es lo que en términos técnicos se denomina el flujo geodésico sobre una superficie de curvatura negativa. Dicho flujo permitió a Hadamard demostrar el teorema de sensibilidad a las

condiciones iniciales. (El correspondiente teorema de billar con obstáculos convexos es mucho más difícil y sólo fue demostrado por Sinai mucho más tarde, en los años setenta). Uno de los que en aquella época comprendieron la importancia filosófica del resultado de Hadamard, fue el físico Pierre Duhem (Duhem tenía ideas muy avanzadas para su tiempo, pero sus convicciones políticas eran netamente reaccionarias). En un libro publicado en 1906 y dirigido al gran público, Duhem tituló un apartado “Ejemplo de Deducción Matemática que Nunca debe Utilizarse”. Como él explica esta deducción matemática es el cálculo de una trayectoria sobre el billar de Hadamard. Ésta “nunca debe utilizarse”, pues una pequeña variación que necesariamente esté presente en la condición inicial, da lugar a una gran incertidumbre en la trayectoria calculada si se espera el tiempo suficiente, y esto convierte a la predicción en algo sin valor.

Otro francés escribía libros de Filosofía de la Ciencia en esa misma época: el famoso matemático Henri Poincaré. En su libro “Ciencia y Método” publicado en 1908, discute el problema de la impredecibilidad aunque no de una manera técnica.

Una observación esencial de Poincaré es que el azar y el determinismo se han hecho compatibles por la impredecibilidad a largo plazo. Poincaré lo explica de la siguiente manera:

“Una causa muy pequeña que escapa a nuestra atención determina un efecto considerable que no podemos dejar de observar y entonces decimos que el efecto es debido al azar. Si conociésemos exactamente las leyes de la naturaleza y la situación del Universo en el momento inicial, podríamos predecir exactamente la situación de ese mismo universo en un momento posterior. Pero, aun cuando se diese el caso de que las leyes de la naturaleza no tuvieran ningún secreto para nosotros, incluso así sólo podríamos conocer la situación inicial aproximadamente.

Si esto nos permitiese predecir la situación siguiente con la misma aproximación, eso es todo lo que necesitamos y diríamos que el fenómeno habríase predicho, que está gobernado por leyes. Pero no siempre es así, puede ocurrir que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales las produzcan grandes en el fenómeno final. Un pequeño error en las primeras producirá un abultado error en las segundas. La predicción se hace imposible y aparece el fenómeno fortuito.” Poincaré sabía lo útiles que son las probabilidades del mundo físico.

Sabía que el azar forma parte de la vida de todos los días. Y como también creía en el determinismo clásico (la incertidumbre cuántica todavía no existía en su época), quería encontrar dónde estaba la fuente del azar. Sus reflexiones sobre el problema le

proporcionaron varias respuestas. Él vio varios mecanismos mediante los cuales la descripción determinista del mundo podía dar lugar de manera natural a la idealización probabilística.

Uno de estos mecanismos es el de la sensibilidad a las condiciones iniciales. Poincaré discute dos ejemplos de sensibilidad a las condiciones iniciales. El primero es el de un gas compuesto por numerosas moléculas que se mueven a gran velocidad en todas direcciones y sufren numerosos choques entre sí. Estos choques, dice Poincaré, dan lugar a sensibilidad en las condiciones iniciales (la situación es análoga al ejemplo de la bola de billar chocando con un obstáculo convexo). La impredecibilidad del movimiento de las partículas en el gas justifica una descripción probabilística.

El segundo ejemplo de Poincaré concierne a la Meteorología. También aquí dice “existe sensibilidad a las condiciones iniciales”. Por otra parte, nuestro conocimiento de las condiciones iniciales es siempre algo impreciso y ello explica la poca fiabilidad de las previsiones del tiempo que se van a hacer. Así, como no podemos prever cuándo suceden los fenómenos meteorológicos, pensamos que su sucesión tiene lugar al azar.

Para un especialista contemporáneo, lo más sorprendente de las ideas de Poincaré es su carácter completamente moderno. La dinámica de un gas de esferas elásticas por una parte, la circulación general de la atmósfera por otra, han sido objeto de estudios fundamentales durante los últimos años y el punto de vista que se adoptó fue el de Poincaré. David Ruelle matemático francés y precursor de las teorías del Caos, habla en su libro “Azar y Caos” acerca del olvido por parte de los científicos, de las teorías de Poincaré sobre las condiciones iniciales y también encuentra las posibles razones de dicho olvido, David Ruelle dice:

“Lo que es muy sorprendente, es el largo intervalo que ha transcurrido entre las ideas de Poincaré y el moderno estudio por parte de los físicos del fenómeno de la sensibilidad a las condiciones iniciales. El estudio reciente de lo que ahora llamamos Caos no se ha beneficiado de los estudios de Hadamard, Duhem y Poincaré. Las matemáticas de Poincaré han tenido su papel, pero sus ideas sobre predicciones meteorológicas tuvieron que ser descubiertas de forma independiente. Yo veo dos razones para el sorprendente intervalo que separa a Poincaré de los estudios modernos sobre el Caos.

La primera es el descubrimiento de la Mecánica Cuántica, que conmocionó el mundo de la Física y ocupó todas las energías de varias generaciones de físicos. La Mecánica Cuántica hace intervenir al azar de una forma nueva e intrínseca. Entonces

¿Por qué pretender ahora introducir al azar mediante la sensibilidad a las condiciones iniciales en Mecánica Clásica? Veo otra razón para el olvido de las ideas de Hadamard, Duhem y Poincaré: estas ideas llegaron demasiado pronto cuando no existían medios para explotarlas. Poincaré no tenía a su disposición esas útiles herramientas matemáticas, que son la teoría de la medida o el teorema ergódico, y por lo tanto no podía expresar sus brillantes intuiciones en un lenguaje preciso. Hay que señalar también que cuando no alcanzamos a tratar un problema matemático, siempre podemos estudiarlo numéricamente con la computadora. Pero evidentemente este método, que ha ligado un papel tan esencial en el estudio del Caos, no existía a comienzos del siglo XX.”

2.2.7 El Problema de los Tres-Cuerpos y la Teoría de KAM. El problema de los tres-cuerpos es uno de los problemas más celebrados en Mecánica Celeste. Se menciona una historia general del problema, haciendo un resumen del trabajo asociado con éste y que explica su conexión con la pregunta de la estabilidad del Sistema Solar. En particular nos enfocaremos en la contribución del matemático francés, del que tanto hemos hablado, Henri Poincaré cuyo intento de encontrar una solución lo llevó al descubrimiento de la matemática del Caos. (Moon)

El problema de los tres-cuerpos puede describirse como sigue: tres partículas se mueven en el espacio bajo su mutua atracción gravitacional; dadas sus condiciones iniciales, determinan su subsiguiente movimiento.

Por lo tanto pueden describirse por una serie de nueve ecuaciones diferenciales de segundo orden. El problema naturalmente se extiende a cualquier número de partículas, y en el caso de n-partículas este es conocido como el problema de los n-cuerpos.

Con el paso de los años el intento de encontrar una solución al problema de los tres-cuerpos ha generado una riqueza de investigación.

Entre los años de 1750 y el comienzo del siglo XX más de 800 artículos relacionados con el problema fueron publicados, invocando a una llamada de distinguidos matemáticos y astrónomos, y por consiguiente, como es frecuente el caso con ese tipo de problemas, su importancia es ahora percibida tanto de gran importancia en los avances matemáticos generados por los intentos a su solución, como el problema en sí. Estos avances han venido de muchos campos diferentes, incluyendo, en época reciente, el análisis de los sistemas dinámicos.

Un caso especial del problema de los tres-cuerpos que se ha caracterizado prominentemente en la investigación como resultado de su forma simplificada y sus aplicaciones prácticas es a lo que Poincaré llamó el problema “restringido” de los tres-cuerpos. En esta formulación dos de los cuerpos, conocidos como los primarios, giran alrededor de su centro de masa en trayectorias circulares bajo la influencia de su atracción gravitacional mutua y por consiguiente, forman un sistema de dos cuerpos en el que el movimiento es conocido. Un tercer cuerpo, generalmente conocido como el planetóide, que se asume sin masa con respecto a los otros dos, se mueve en el plano definido por los otros dos cuerpos girando y mientras comienza a ser influenciado gravitacionalmente por ellos, no ejerce influencia por sí mismo. El problema entonces es comprobar el movimiento del tercer cuerpo.

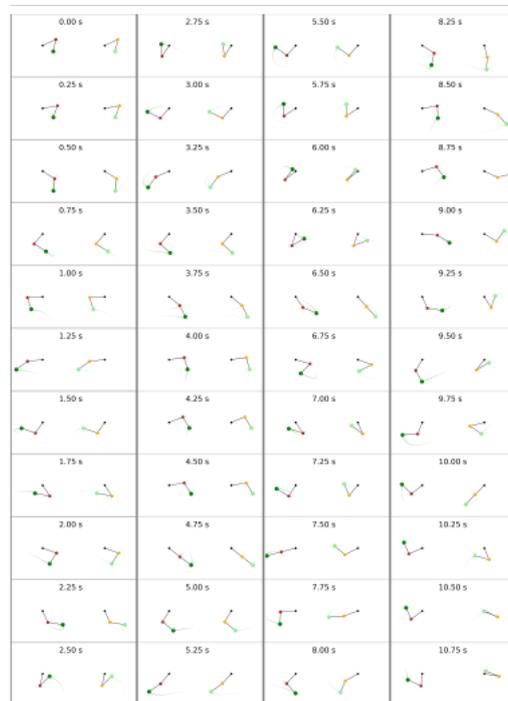


Figura 2.2.7.1 Simulación de dos péndulos dobles (Santos Burguette, Cimarro Grande, & Fuentes Marron, México)

2.2. 8 Poincaré y el Problema de los Tres-Cuerpos

La famosa memoria de Poincaré sobre el problema de los tres-cuerpos fue publicada en 1890, pero la historia de su publicación comenzó cinco años antes. En Julio de 1885, aparecieron noticias anunciando una importante competencia internacional de matemáticas, que

comenzó a ser patrocinada por el Rey Oscar II de Suecia y Noruega para marcar su 60 aniversario en 1889. El organizador de la competencia y uno de los jueces fue el matemático sueco Gosta Mittag-Leffler (1846-1927), los otros jueces fueron Karl Weierstrass (1815-1897) de Berlín y Charles Hermite (1822-1901) de Paris. Se fijaron cuatro preguntas y una, planteada por Weierstrass, requirió una solución al problema de los n -cuerpos. La pregunta que reflejaba en Weierstrass un gran entendimiento e interés en el problema, fue la de encontrar una solución bajo las condiciones particulares en que no ocurrieran colisiones

Para Poincaré, la competencia actuó como un estímulo para sintetizar muchas de las ideas que él había desarrollado en la década anterior. La pregunta de la estabilidad del Sistema Solar fue una en la que él había estado explícitamente interesado por varios años y por algún tiempo había construido una pila de técnicas con las que lanzaría una ofensiva. Muchas de esas técnicas fueron originadas en su pionera investigación sobre la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, que han aparecido en series de cuatro memorias publicadas entre 1881 y 1886, y en el que él había discutido la idea de estabilidad por primera vez. Para la competencia él había intentado abordar el problema de n -cuerpos comenzando con el problema general de tres-cuerpos y extendiendo así sus resultados, pero las dificultades inherentes lo condujeron a enfocar su atención casi exclusivamente sobre el problema restringido de los tres cuerpos. A pesar de no resolver el problema de n -cuerpos, su trabajo sobre el problema restringido fue reconocido como sobresaliente y en Enero de 1889 se le concedió el premio y en 1890 su memoria fue publicada como la entrada ganadora en la competencia. Desde su publicación, la memoria ha sido reconocida por generaciones subsiguientes de matemáticos como un hito en el estudio y desarrollo de la Mecánica Celeste y la Dinámica. Ahora ambas son famosas por suministrar los fundamentos para autores de renombre en un trabajo de tres volúmenes sobre Mecánica Celeste, “Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste”, y por contener la primera descripción matemática del comportamiento caótico en un sistema dinámico.

2.2.9 Teoría General de la Estabilidad

El deseo de Poincaré de abordar el problema de la estabilidad del Sistema Solar significó que la estabilidad per se fue un tópico natural a perseguir.

Él primero discutió la estabilidad de soluciones a ecuaciones diferenciales en 1885 y durante el mismo periodo además estuvo investigando la estabilidad de otro tipo: el de diferentes

formas de masas de rotación de un fluido. Esto suministró la primera conexión entre su trabajo y el del matemático ruso Alexander Lyapunov (1857-1918). Lyapunov además se comprometió en una investigación cualitativa dentro de la teoría de la estabilidad, y en 1892 (algunos años después de su terminación) su investigación fue publicada en una memoria notable. Este fue el primer intento de crear una teoría matemática completa de estabilidad para la dinámica de n -cuerpos en movimiento. Desafortunadamente, su aparición en Rusia significó que sus contenidos fueron casi inaccesibles a la amplia comunidad matemática. Fue solamente con la publicación de una traducción en francés en 1907 que sus ideas comenzaron a penetrar los círculos matemáticos de Europa occidental y su estudio de la pregunta de la estabilidad fue reconocida como formación a un importante complemento al que Poincaré había emprendido.

Aunque Lyapunov reconoció libremente la influencia de las ideas de Poincaré, él utilizó una definición de estabilidad que fue mucho más estricta que la definición de Poisson de estabilidad usada por Poincaré.

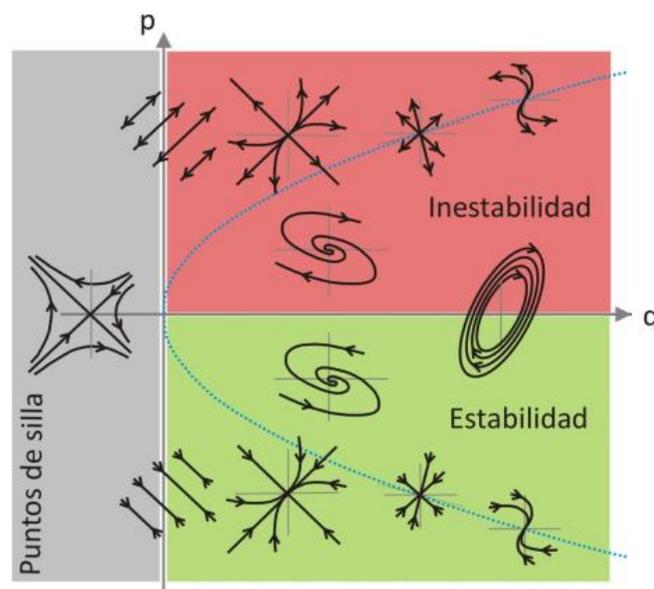


Figura 2.2.9.1 Estabilidad e inestabilidad

Lyapunov definió la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales como estable, si otras soluciones que comenzaron a un tiempo dado lo suficientemente cerca de la solución dada, permanece arbitrariamente cerca de todos los otros tiempos posteriores.

Hubo muchas similitudes entre los resultados obtenidos por Lyapunov y los obtenidos por Poincaré, pero la varianza en sus definiciones de estabilidad significaron que el propósito de sus análisis fueran sustancialmente diferentes. La teoría de Lyapunov, mientras que es

extremadamente rigurosa y detallada, estuvo limitada en su rango por su definición que es también realmente demandante. Para Lyapunov si una solución es estable no solamente el movimiento con perturbaciones no puede desviarse más allá del movimiento que no las tiene, sino que también cada punto en la trayectoria del movimiento con perturbaciones tiene que estar muy cerca de los puntos correspondientes en el movimiento sin perturbaciones. Puesto que en términos prácticos hay algunos sistemas dinámicos que satisfacen completamente el criterio de Lyapunov, la aplicación de su teoría está esencialmente confinada al análisis local. Por otro lado, la teoría de la estabilidad de Poincaré, por estar basada en una definición menos restringida, podía aplicarse a problemas de una naturaleza más compleja de aquéllos considerados por Lyapunov. El punto de partida para Poincaré fue su teoría de integrales invariantes que, en conjunto con su definición, significó que él podía

atacar preguntas generales de la estabilidad de sistemas dinámicos, obteniendo resultados como su teorema de recurrencia que le permitió un entendimiento del comportamiento de las soluciones del problema restringido de los tres-cuerpos. Por lo tanto su teoría lo condujo al

conocimiento del comportamiento global de los sistemas, conocimiento que podría haber sido imposible de obtener sin la precisión de la teoría de Lyapunov, aunque ésta fue contrabalanceada por la imprecisión que la acompaña en su análisis local.

La inaccesibilidad inicial del trabajo de Lyapunov significó que las ideas de Poincaré fueron conocidas en la primera respuesta. Sin embargo, la teoría de Poincaré, así como es capaz de una gran generalización y de tener una definición que fue intuitivamente más natural que la de Lyapunov, suministró un marco preciso y convencional en el cual trabajar. Ahora la teoría es generalmente considerada como uno de los logros fundamentales dentro de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales.

La literatura ha crecido sustancialmente alrededor del trabajo de Poincaré, más recientemente en el área de la teoría de control, y en 1992 el centenario de la publicación original de la memoria fue conmemorada por la aparición de una traducción en Inglés.

2.2.10 Trabajos Posteriores

La pregunta de la convergencia de las series de Lindstedt suministró el punto de partida para algunos desarrollos remarcables en el siglo XX. Poincaré había mostrado que las series fueron, aparte de algunos casos excepcionales, divergentes. Había, sin embargo, una

cláusula. Él dejó claro que no había dado una prueba rigurosa para los casos cuando las frecuencias se pueden fijar por adelantado. Con el trabajo de Kolmogorov, Arnold y Moser, que comenzó en el año de 1950, sabemos que en esos casos la mayoría de las soluciones de las series formales son de hecho convergentes. Sus resultados forman la base para lo que es ahora conocido como la teoría Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM), que proporciona métodos para integrar sistemas hamiltonianos con perturbaciones, válidos para periodos de tiempo infinitos. De particular significado es el hecho de que la teoría de KAM establece concluyentemente la existencia de soluciones de series convergentes para el problema de n -cuerpos.

Hubo, además, muchos matemáticos que estudiaron el trabajo de Poincaré sobre el problema de los tres-cuerpos dando lugar a nuevos descubrimientos en otros campos relacionados. Jacques Hadamard (1865- 1963) y George Birkhoff (1884-1944) persiguieron los aspectos cualitativos de la investigación de Poincaré, mientras que Ivor Bendixson (1861-1935) trabajó en ecuaciones diferenciales ordinarias y Elie Cartan (1869-1951) trabajó sobre la teoría de las integrales invariantes.

Pero a pesar del éxito de la memoria de Poincaré, durante los primeros años del siglo XX hubo intentos no muy serios para investigar más a fondo el comportamiento de las soluciones asintóticas de Poincaré.

En gran medida esto puede ser explicado por la inhabilidad de comprometerse en un análisis cuantitativo debido a las técnicas computacionales inadecuadas. El advenimiento de la computadora digital moderna ha significado que esos análisis sean ahora posibles, ya que en los últimos veinte años se ha visto una creciente investigación de los sistemas no-lineales produciendo una gran riqueza de nuevos resultados.

Una consecuencia bien conocida de esto ha sido el desarrollo del análisis matemático del Caos, el corazón en el que se ha situado la teoría de Poincaré de soluciones asintóticas. Además de los problemas de computación numérica, también estaba la dificultad de que el comportamiento aparentemente aleatorio que se exhiben en las soluciones asintóticas de Poincaré no se adecuaban al modelo Laplaciano de un Universo mecanicista, que generalmente era aceptado por todos.

2.3 El Espacio de Fases

Como lo mencionamos anteriormente, hace más de 100 años Henri Poincaré probó que el movimiento de tres cuerpos en interacción bajo la fuerza de la gravedad puede ser

extremadamente complicado. Su descubrimiento fue la primera evidencia de lo que ahora llamamos Caos: que es el comportamiento irregular que se presenta en sistemas dinámicos no-lineales simples sin rasgos aleatorios construidos en éstos, o bien determinísticos. El análisis del Caos es emocionante debido a que abre la posibilidad de simplificar fenómenos muy complicados, es preocupante debido a que introduce nuevas dudas acerca del procedimiento tradicional de la construcción de modelos de Ciencia y, entre otras cosas, es fascinante debido a sus entrelazamientos entre Matemáticas, Ciencia y Tecnología.

Hay dos estilos principales de pensamiento matemático. El primero es formal y remoto, simbólico y abstracto, centrado en la manipulación virtuosa de fórmulas aún más complejas. El segundo es visual y orgánico, explotando la habilidad remarcable de la mente humana para dibujar y moldear contornos y formas. En el primero debe tratarse del Álgebra mientras que en el segundo debe ser Geometría, pero una Geometría que desde luego está lejos del estereotipo pomposo usualmente reprochado sobre la pobre, muy sufrida, incomprendida Euclidiana. Hay una buena parte de Álgebra en los anales de Caos, pero también un inusual gran número de retratos. El rol de los cálculos formales es forzar a los matemáticos a checar que los resultados realmente sean válidos. Pero los resultados en sí tienden a ser geométricos en carácter: podemos explicarlos y descubrirlos dibujando retratos. Así fue como Poincaré hizo su gran descubrimiento.

Desde el año de 1960 la aproximación geométrica de Poincaré fue desarrollada dentro de la poderosa herramienta del análisis del Caos llamada “Dinámica Topológica” por la Escuela Americana de Steven Smale en Berkeley, California, y la Escuela Soviética de Andrei Kolmogorov, Yasha Sinai y Vladimir Arnold en Moscú. El verdadero análisis del Caos tiene un sabor geométrico muy fuerte: espacio de fases, trayectorias, flujos, mapas, fuentes, sumideros, sillas de montar, atractores, bifurcaciones, etcétera. Cualquier estudioso del Caos que no sólo quiera admirar un hermoso retrato sino comprender qué es el retrato, debe estar muy bien familiarizado con este vocabulario geométrico.

La palabra espacio ha sufrido una severa metamorfosis, al menos en matemáticas. Convencionalmente, la palabra se refiere a las cosas tridimensionales en las que habitamos o, ‘eso en que el material de los cuerpos tienen extensión’. En matemáticas, espacio puede significar casi cualquier cosa. Un matemático que pregunta: ¿En qué espacio estás trabajando?, no se refiere al tamaño de tu oficina; es una petición para una descripción de la estructura completa de la totalidad de objetos del tipo que estamos considerando. Desde este

punto de vista, un matemático de no muy amplios estudios dice: un espacio polinomial, es decir un elemento del espacio de todos los polinomios.

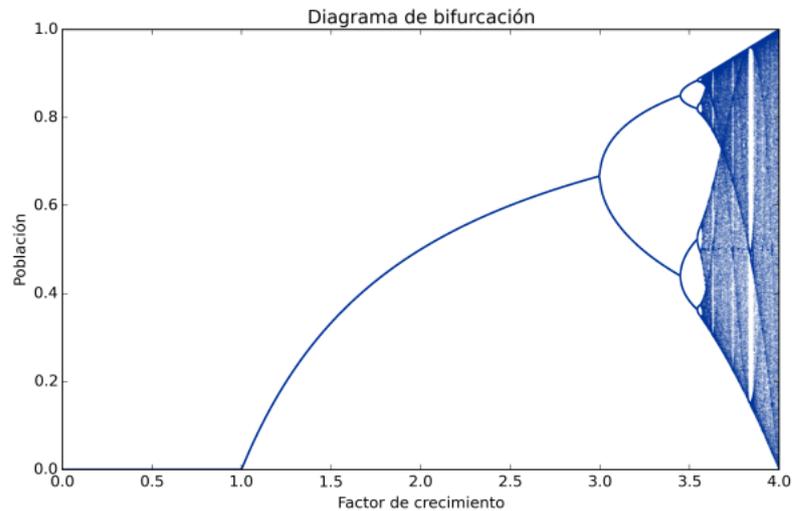


Figura 2.3.1 Diagrama de Bifurcación (Santos Burguette, Cimarro Grande, & Fuentes Marron, México)

El Caos es un fenómeno dinámico. Ocurre cuando el estado de un sistema cambia con el tiempo. Hay cambios regulares, esa cosa de los sistemas dinámicos clásicos y los caóticos, y no hay duda de que también de los más desordenados, que aún todavía no entendemos. La entidad que cambia es alguna variable, o conjunto de variables, que determinan el estado del sistema. Los valores de este conjunto de variables, en un instante particular de tiempo, determina todo lo que deseamos saber acerca del sistema.

Por ejemplo, pensemos en una bola de billar sobre una mesa. Para determinar su estado necesitamos saber, al menos, dónde está (dos variables, sus coordenadas espaciales) y qué tan rápido se mueve (dos más). Si estamos interesados en el giro que se produce con el taco de billar, necesitamos dos variables más para especificar la dirección del eje del giro, y dos más para medir sus correspondientes velocidades. Aún en esta descripción simplificada, una bola de billar es un objeto mucho más complicado, necesitamos ocho variables distintas sólo para especificar su estado instantáneo. Ahora dejemos que el tiempo fluya. La bola se mueve siguiendo las leyes de la dinámica. De cualquier forma en la que se le pegue a la bola, el

estado de la bola de billar cambia. Ésa es la descripción física. La visión geométrica es equivalente, pero con un énfasis diferente.

En lugar de pensar en el estado físico de la bola, nos enfocaremos en aquéllas cantidades que la determinan. Un punto sobre una línea puede estar especificado sólo por una cantidad, su distancia a la izquierda o derecha de algún punto determinado, u origen. Para un punto sobre el plano, necesitamos dos de esas cantidades, sus coordenadas relativas a un sistema elegido de ejes.

Para un punto en un espacio tridimensional, necesitamos tres cantidades. ¿Qué geometría podría necesitar ocho coordenadas? Obviamente, la geometría de un espacio octadimensional. Ése es un espacio ficticio, en el sentido de que existe más en la mente que en el objeto real; pero representa fielmente una entidad física genuina: el conjunto de todos los estados posibles de la bola de billar. Nosotros le llamamos el espacio de fases de la bola. Si un punto en el espacio ordinario se mueve, éste traza una curva. Cuando una bola de billar sigue las leyes de la dinámica, sus ocho coordenadas se mueven continuamente, así que nos dará como resultado una curva en un espacio de fases octadimensional. Ocho dimensiones es muy difícil de visualizar, una forma de visualizar más de tres dimensiones es graficarlas en grupos de dos o tres.

Para entender mejor lo anterior tomemos el ejemplo de medir la temperatura de algún atleta cuando corre en algún lugar en particular, observando este parámetro por un tiempo, probablemente cambiará. Los diferentes valores observados pueden etiquetarse por las observaciones que se hagan en diferentes tiempos.

La medición de la temperatura nos lleva a ver que también involucramos la variable tiempo, es decir, las mediciones observadas van cambiando continuamente con el fluir del tiempo, al añadir otro eje de coordenadas en donde grafiquemos también el tiempo de observación. Lo que podemos apreciar es su gráfica de la serie de tiempo obtenida del fenómeno en estudio.

Los cambios en el estado actual del sistema se observan y se representan como una curva en el espacio de fases. Cada punto en esta curva carga una etiqueta de registro del tiempo de observación. A ésta se le llama una trayectoria del modelo.

Para ver intuitivamente cómo se construye una gráfica en el espacio de fases observemos las figuras. Para ver cómo se construye una gráfica de espacio de fases matemáticamente ésta

se explicará la siguiente temática, por ahora, nos basta con esta idea para adentrarnos en el fascinante tema de los “atractores.

2.3.1 Atractores

El marco general del que emerge el Caos es la llamada teoría de los sistemas dinámicos. Un sistema dinámico consta de dos partes: la noción de estado (la información esencial sobre un sistema) y una dinámica (una regla que describe cómo evoluciona el estado en el tiempo). La evolución puede representarse, como lo mencionamos anteriormente, en un espacio de fases o diagrama de estados, construcción abstracta cuyas coordenadas son las componentes del estado. En general, las coordenadas del espacio de fases varían con el contexto; en el caso de un sistema mecánico podrían ser posiciones y velocidades y, en el de un modelo ecológico, las poblaciones de las diferentes especies. (Espinoza, 2004)

El péndulo simple constituye un buen ejemplo de un sistema dinámico. Todo lo que se necesita para determinar su movimiento son dos variables: posición y velocidad. El estado es, pues, un punto en un plano, cuyas coordenadas son la posición y la velocidad.

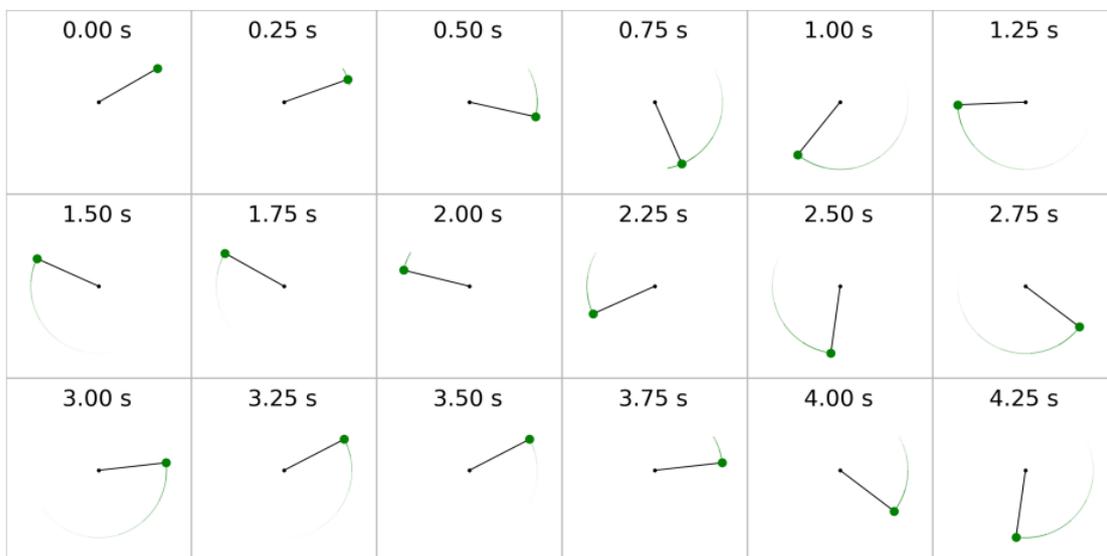


Figura 2.3.1 Simulación numérica del movimiento de un péndulo simple.

Las leyes de Newton dan una regla expresada matemáticamente en una ecuación diferencial, que describe la evolución de dicho estado. Conforme el péndulo oscila a un lado y otro, el estado se mueve a lo largo de una trayectoria, o camino, en el plano. En el caso ideal de un péndulo sin rozamiento, la trayectoria es un ciclo; si no, describe una espiral que tiende a un punto a medida que se va frenando el péndulo.

El espacio de fases es un espacio abstracto cuyas coordenadas son los grados de libertad del movimiento de un sistema. Por ejemplo, el movimiento de un péndulo está completamente determinado por su posición y su velocidad iniciales. Por ello, su configuración se define por un punto en un plano cuyas coordenadas son la posición y la velocidad. Mientras el péndulo oscila de un lado al otro, sigue una “trayectoria” o camino a través del espacio de fases.

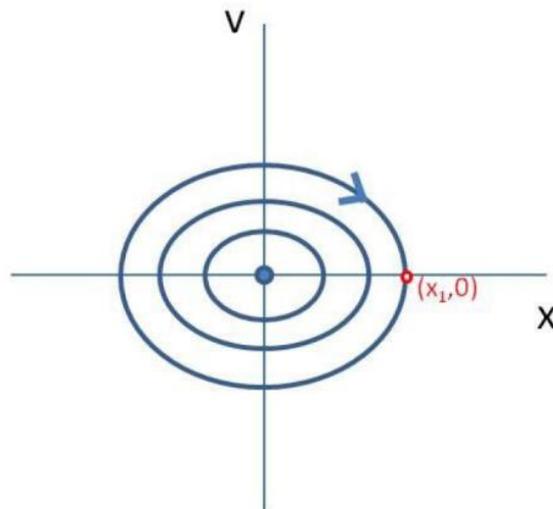


Figura 2.3.2 Diagrama de fase de un péndulo simple. (Santos Burguette, Cimarro Grande, & Fuentes Marron, México)

En el caso de un péndulo ideal no sometido a rozamiento, la trayectoria es una curva cerrada (abajo a la izquierda); pero si hubiera rozamiento, la trayectoria describiría una espiral que se acercaría a un punto (abajo a la derecha).

La evolución temporal de un sistema dinámico puede desarrollarse de manera continua o discreta en el tiempo. En el primer caso, se habla de un flujo; en el segundo, de una aplicación. Un péndulo se mueve continuamente de un estado a otro describiéndose así por un flujo continuo en el tiempo. El número de insectos que nacen cada año en una cierta región y el intervalo temporal entre gotas sucesivas de un grifo que gotea, se explican de modo más natural mediante una aplicación discreta en el tiempo.

Para saber cómo evoluciona un sistema con un estado inicial dado, se puede recurrir a la dinámica (las ecuaciones del movimiento), que explica el movimiento por incrementos a lo largo de la trayectoria. Para determinar el comportamiento de un sistema con este método,

se necesita un trabajo de cálculo que es proporcional al tiempo durante el que se desea seguir la trayectoria. En el caso de sistemas simples, como un péndulo sin rozamiento, puede ocurrir que las ecuaciones admitan una solución explícita, es decir, una fórmula que exprese cualquier estado futuro en función del inicial. Una solución explícita proporciona un atajo, un algoritmo simple que precisa sólo del estado inicial y el tiempo final para predecir el futuro, sin pasar por los estados intermedios. Con tal solución, el trabajo de cálculo necesario para seguir el movimiento es más o menos independiente del tiempo deseado. A modo de ejemplo, dadas las ecuaciones del movimiento planetario y lunar, y las posiciones y velocidades de la Tierra y la Luna, los eclipses pueden predecirse con años de antelación. Los éxitos en la obtención de soluciones explícitas en el caso de muchos sistemas simples, durante los primeros desarrollos de la Física, suscitaron la esperanza de que tales soluciones existieran para cualquier sistema mecánico. Desgraciadamente hoy en día sabemos que esto en general no es así. El comportamiento impredecible de los sistemas dinámicos caóticos no puede expresarse mediante una solución explícita.

Consecuentemente, no hay atajos para predecir su comportamiento. No obstante, el espacio de fases proporciona una herramienta poderosa para describir el comportamiento de los sistemas caóticos. La utilidad de la imagen que así se obtiene, reside en la posibilidad de representar el comportamiento de los sistemas de manera geométrica. Por ejemplo, un péndulo con rozamiento termina por detenerse, lo que significa que la trayectoria se aproxima a un punto en el espacio de fases. Este punto no se mueve: está fijo; por atraer a las trayectorias próximas, recibe el nombre de “atractor”. Si se da un pequeño empujón al péndulo, vuelve al mismo punto fijo atractor.

Cualquier sistema, que con el paso del tiempo tiende al reposo, puede caracterizarse por un punto fijo en el espacio de fases. Este es el caso de un fenómeno muy general por el que las pérdidas debidas al rozamiento o a la viscosidad, por ejemplo, provocan que las trayectorias sean atraídas hacia una región menor del espacio de fases con menos dimensiones. Se dice que una región así constituye un atractor. Grosso modo, un atractor es a lo que tiende, o a lo que es atraído, el comportamiento de un sistema. Algunos sistemas no tienden al reposo a largo plazo, sino que recorren periódicamente una sucesión de estados. Fijémonos en un reloj de péndulo, en él la energía perdida por rozamiento se repone con la almacenada en un muelle o un peso. El péndulo repite su movimiento una y otra vez. En el espacio de fases, tal movimiento corresponde a un ciclo, a una trayectoria periódica. Independientemente de cómo empiece a balancearse el péndulo, el ciclo al que se aproxima a largo plazo es siempre

el mismo. Tales atractores son llamados “ciclos límite o periódico”. Otro sistema familiar con un atractor periódico es la onda de la función seno o coseno.

Hay otros tipos de atractores los cuales explicaremos utilizando un sistema con dos grados de libertad, es decir, uno en el que podemos dibujar las figuras en el plano. De hecho, este sistema no corresponderá a ningún modelo físico particular. Se tratará de una construcción puramente matemática, pensada para ilustrar el comportamiento típico que presentaría un sistema con dos grados de libertad. Dada una ecuación diferencial, podemos visualizar el movimiento de todos los puntos iniciales posibles si pensamos en un fluido imaginario que corre a lo largo de las trayectorias de la ecuación. Si escogemos un punto de partida, es decir, un conjunto de condiciones iniciales para la ecuación, entonces las coordenadas de su movimiento subsecuente son las soluciones de la ecuación diferencial para dicha condición inicial. El flujo se indica con líneas curvas, que corresponden a la evolución temporal de las coordenadas de varios puntos iniciales. Las flechas indican la dirección del movimiento a medida que transcurre el tiempo. Podemos notar cómo el flujo encaja en su conjunto: las flechas en las curvas más próximas se hallan alineadas muy juntas.

Esto significa que el fluido imaginario, cuyo flujo está representado por las líneas, no se separa: el movimiento es continuo. Existen cuatro características de este flujo particular las cuales me gustaría resaltar:

Primero, en la parte izquierda hay un punto hacia el cual confluyen en espiral todas las líneas de flujo próximas. Se le conoce como sumidero. Es bastante similar a un tubo de desagüe por el cual hace «glu-glú» el fluido.

Enfrente, en la parte derecha, hay un tubo de desagüe al revés, un punto a partir del cual el fluido se desparrama en espiral. Se le llama fuente.

Piénsese en un fluido saliendo a borbotones por un manantial. En la parte de en medio existe un lugar donde las líneas de flujo parecen entrecruzarse. Se le conoce como silla de montar. De hecho, las líneas no se cruzan. Si dos chorros de un fluido real chocan uno con el otro, se ven estas sillas de montar. Finalmente, rodeando la fuente, a la derecha, hay un bucle que se cierra una sola vez. Este es un ciclo límite. Se parece a un remolino, donde el fluido gira y gira. Un torbellino. Espacio de fases de un flujo en un plano que muestra (de izquierda a derecha) un sumidero, una silla de montar, un ciclo límite y una fuente.

A continuación veamos estos atractores más a detalle: 1. Sumideros.-Un sumidero es un lugar en donde una línea de flujo se degenera para convertirse en un único punto, hacia el cual

confluyen todos los puntos vecinos. Si el sistema inicia su movimiento en el punto central de un sumidero no sucede nada. Simplemente se queda ahí. Así pues, el sumidero representa un

estado estacionario del sistema. Mientras tanto, si el sistema comienza su movimiento por un punto próximo al sumidero, se moverá hacia él. Esto significará que el estado estacionario en un sumidero es estable. Si tomamos el punto que representa el estado de un sistema y lo alejamos un poco del sumidero, entonces dicho punto gira en espiral dirigiéndose de nuevo hacia el punto de donde partió. Los sumideros entonces son estados estacionarios estables.

.Sillas de Montar.-Estos atractores son más interesantes. En cierto sentido, son estados estacionarios que son estables en algunas direcciones e inestables en otras. Imaginemos un jinete con poca experiencia montado en un caballo, sobre una silla que ha sido engrasada. Si el jinete se mueve hacia adelante o hacia atrás en la silla, simplemente se deslizará retrocediendo a la posición central.

Pero si empieza a resbalar hacia los lados, volcará. Su posición es estable con respecto a los desplazamientos hacia delante y hacia atrás, pero inestable con respecto a los desplazamientos laterales.

Debido a este tipo de analogía, a tales puntos se les da el nombre de “sillas de montar”.

. En la que se muestra un silla de montar: las líneas que se cruzan en el centro son sus separatrices

El punto de en medio de la “cruz”, el punto de silla propiamente dicho es –igual que todas las trayectorias que se reducen a puntos únicos- un estado estacionario. Dos líneas de flujo se denominan las separatrices de la silla. Se designan de esta forma porque separan el modo en que fluyen puntos próximos. Imaginémonos recorriendo una separatriz si empezamos justo por encima de ella, daremos un giro brusco hacia la izquierda a medida que nos aproximemos al punto de silla, si empezamos por abajo, efectuaremos un giro brusco hacia la derecha.

Ciclos Límite.-Los ciclos límite son realmente interesantes. Si empezamos uno siempre estamos dando vueltas, repitiendo constantemente el mismo movimiento. El movimiento es “periódico”.

Hay dos tipos básicos de ciclos límite. El que se muestra un ciclo límite estable: los puntos próximos se mueven hacia él. También existe un ciclo límite inestable: los puntos próximos se alejan de él.

En la que se muestra un ciclo límite estable que es un bucle cerrado hacia el cual convergen las trayectorias vecinas Poincaré y el matemático sueco Ivar Bendixon, demostraron un teorema que prueba que típicamente sólo tienen lugar estos cuatro tipos de comportamiento, en un sistema de ecuaciones diferenciales en el plano.

En la actualidad sabemos que no es cierto que toda ecuación diferencial se comporte solamente de estas cuatro formas. Un sistema puede tener varios atractores. Si así ocurre, diferentes condiciones iniciales pueden llevar a diferentes atractores. El conjunto de puntos que evoluciona hacia un atractor se llama su cuenca de atracción. Un reloj de péndulo tiene dos cuencas: los desplazamientos pequeños desde su posición de reposo le devuelven de nuevo al reposo; sin embargo, con desplazamientos grandes, el reloj empieza su tic-tac conforme el péndulo ejecuta una oscilación estable llevándolo a un atractor de ciclo límite o periódico.

La forma de atractor que sigue en complejidad es el “cuasiperiódico” que topológicamente es un toro, una figura semejante a la superficie de una rosquilla o dona. Aquí se combinan juntos varios movimientos periódicos diferentes, cuyas frecuencias son independientes (la frecuencia de un movimiento periódico es el número de períodos por segundo. De modo que períodos largos corresponden a frecuencias bajas y períodos cortos a frecuencias altas). La trayectoria se arrolla rodeando el toro en el espacio de fases, de modo que una frecuencia queda determinada por la rapidez con que la trayectoria rodea el toro por el camino más corto y la otra por la rapidez con que lo hace alrededor del camino más largo. En este tipo de atractores los toros pueden ser de dos o más dimensiones, lo que representa la combinación de más de dos oscilaciones.

Si combinamos dos movimientos periódicos cuyos períodos tengan una medida común –es decir, que ambos sean múltiplos de enteros de una misma cantidad-, entonces el resultado es, de hecho, un movimiento periódico. Si un movimiento tiene un período de, digamos, 3 segundos y el otro de 5, entonces la combinación de movimientos se repetirá cada 15 segundos. Pero si no existe ninguna medida común –por ejemplo, si los períodos son de 1 segundo y de 2 segundos- entonces el movimiento nunca se repetirá exactamente. Sin embargo, “casi se repite”, en el sentido de que podemos hallar estados que

sean tan próximos al estado inicial como queramos. Por este motivo se emplea el nombre de “cuasiperiódico”.

Una característica importante de los movimientos cuasiperiódicos, a pesar de su complejidad, es la de su predecibilidad. Aun cuando la trayectoria no se repite nunca exactamente, si las frecuencias carecen de divisor común, el movimiento sigue siendo regular. Las órbitas que empiezan cerca la una de la otra en el toro permanecen siempre cercanas, por lo que la predecibilidad a largo plazo está garantizada con errores muy pequeños.

Hasta hace muy poco, los puntos fijos, los ciclos límite y los toros eran los únicos atractores conocidos. En 1963, Edward N. Lorenz, del Instituto de Tecnología de Massachusetts, descubrió un ejemplo de un sistema de pocos grados de libertad que presentaba un comportamiento complejo. Motivado por el deseo de entender la impredecibilidad del tiempo meteorológico, empezó con las ecuaciones del movimiento de un fluido (la atmósfera puede considerarse un fluido); simplificándolas, obtuvo un sistema con tan sólo tres grados de libertad. A pesar de ello, el sistema se comportaba de un modo aparentemente estocástico que escapaba a toda caracterización adecuada, por cualquiera de los tres tipos de atractor entonces conocidos. El atractor que observó, llamado hoy atractor de Lorenz, fue el primer ejemplo de “atractor caótico”, o extraño.

Usando una computadora digital para simular su sencillo modelo, Lorenz dilucidó el mecanismo básico responsable del azar observado: las perturbaciones microscópicas se amplifican hasta interesar el comportamiento macroscópico. Dos trayectorias con condiciones iniciales próximas divergen rápidamente de forma exponencial y por ello permanecen cercanas sólo durante un corto período. La situación difiere cualitativamente en los atractores no caóticos. En ellos, las trayectorias vecinas siguen estando cerca, los pequeños errores se mantienen acotados y el comportamiento es predecible.

2.3.2 El Atractor de Lorenz

Nos recuerda a unas alas de mariposa y se convirtió en un emblema para los primeros exploradores del Caos. Reveló la fina estructura escondida dentro de un flujo desordenado de datos. Tradicionalmente, los valores cambiantes de cualquier variable podría ser desplegada en las tan llamadas series de tiempo (ver el recuadro superior izquierdo). Para mostrar las relaciones cambiantes entre las tres variables se requiere de una técnica diferente. En cualquier instante en el tiempo, las tres variables arreglan la localización de un punto en

el espacio tridimensional; como el sistema cambia, el movimiento del punto representa las variables que cambian continuamente.

Debido a que el sistema nunca se repite exactamente, la trayectoria nunca se intersecta. En lugar de un lazo cerrado o ciclo límite que da vueltas por siempre, el movimiento sobre un atractor caótico es abstracto, pero transmite la esencia del movimiento del sistema real

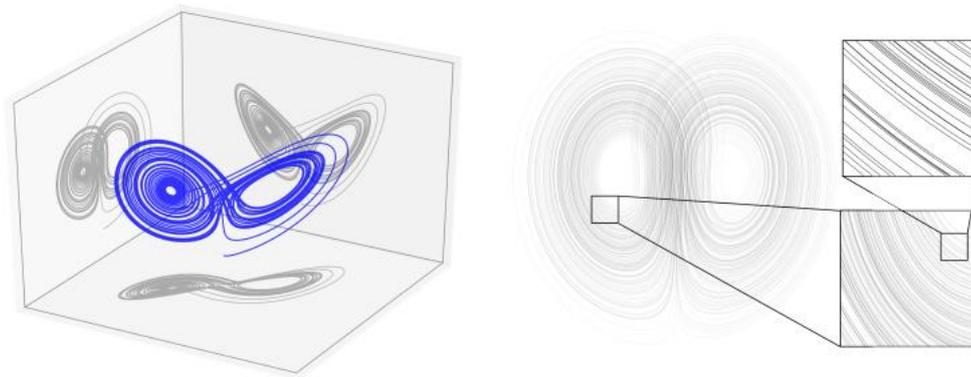


Figura 2.3.2 Comportamiento del atractor de Lorenz. (Santos Burguette, Cimarro Grande, & Fuentes Marron, México)

Un atractor caótico desarrolla una estructura mucho más complicada que la que presenta un atractor predecible (un punto, un ciclo límite o un toro). La divergencia de las trayectorias próximas constituye la razón última por la que el caos lleva a la impredecibilidad. Una medición perfecta correspondería a un punto en el espacio de fases, pero cualquier medición real resulta imperfecta y genera un entorno de incertidumbre. El verdadero estado podría hallarse en cualquier parte del entorno. Lo que se muestra aquí en el atractor de Lorenz, con la incertidumbre en la medida inicial representada por 10,000 puntos rojos, tan juntos entre sí en un comienzo que son indistinguibles. Al moverse cada punto bajo la acción de las ecuaciones, la nube se estira hasta convertirse en un hilo largo y fino, que se pliega después

sobre sí mismo muchas veces, hasta que sus puntos se extienden por todo el atractor. La predicción se torna entonces imposible: el estado final puede encontrarse en cualquier parte del atractor. En el caso de un atractor predecible, por el contrario, todos los estados finales permanecen próximos. Los números que hay escritos sobre los esquemas indican el tiempo en unidades de duocentésima de segundo

La clave para entender el comportamiento caótico está en una simple operación de estirado y plegado que se produce en el espacio de fases. La divergencia exponencial constituye una propiedad local: puesto que los atractores tienen tamaño finito, dos trayectorias en uno de ellos no pueden diverger exponencialmente de manera indefinida. En consecuencia, el atractor debe plegarse sobre sí mismo. Aunque las trayectorias diverjan y sigan caminos cada vez más alejados, en algún momento habrán de acercarse de nuevo entre sí. Al hacerlo, las trayectorias se mezclan en un atractor extraño, como naipes de un mazo cuando un jugador los baraja.

El azar de las trayectorias caóticas es consecuencia del proceso de mezcla.

El proceso de estirar y doblar se produce repetidamente, creando pliegues dentro de los pliegues ad infinitum. Un atractor caótico es, en otras palabras, un fractal: un objeto que va revelando nuevos detalles a medida que se va amplificando

Los atractores caóticos son fractales: objetos que, a medida que se van amplificando, van revelando nuevos detalles. El caos produce fractales de modo natural. Al irse separando las trayectorias próximas, acaban por doblarse una sobre la otra para que el movimiento permanezca dentro de unos límites finitos. Esto se repite una y otra vez, generándose pliegues dentro de los pliegues ad infinitum. Como resultado, los atractores caóticos muestran una bella estructura microscópica. Michel Hénon, del Observatorio de Niza, descubrió una regla simple que estira y pliega el plano, cambiando de sitio cada uno de los puntos. Se representan aquí los obtenidos por aplicación reiterada de la regla de Hénon, empezando con un punto inicial. La forma geométrica resultante (a) proporciona un ejemplo simple de atractor caótico. El recuadro pequeño se aumenta por un factor 10 en b. Repitiendo el proceso (c, d), la estructura microscópica del atractor se manifiesta en detalle.

El Caos mezcla entre sí las trayectorias en el espacio de fases como el panadero mezcla la pasta del pan cuando la amasa. Para imaginar lo que ocurre con las trayectorias vecinas en

un atractor caótico, coloquemos una gota de colorante azul en la masa. El amasado consta de dos acciones:

Estirar la masa, con la consiguiente extensión del colorante y plegarla sobre sí misma. Al principio, la gota de colorante sólo se alarga, pero acaba por plegarse sobre sí misma, y con el paso del tiempo se estira y repliega muchas veces. Una inspección detallada muestra que la masa consta entonces de muchas capas alternadamente azules y blancas. Tras sólo 20 pasos, la gota inicial se ha estirado hasta más de un millón de veces de su longitud original y su espesor ha disminuido hasta el nivel molecular. El tinte azul se mezcla completamente con la masa. El Caos opera del mismo modo, con la diferencia de que, en vez de mezclarse con la masa, se mezcla en el espacio de fases. Inspirado por esta imagen de la mezcla, Otto E. Rössler, de la Universidad de Tübingen, propuso el ejemplo más elemental de atractor caótico en un flujo

2.3.2.1 Formulación matemática del Atractor de Lorenz

El sistema de Lorenz se derivó inicialmente de una aproximación de Oberbeck-Boussinesq. Esta aproximación es un acoplamiento de las ecuaciones de Navier-Stokes con la convección térmica. El problema original era un problema 2D considerando la convección térmica entre dos placas horizontales paralelas. El sistema de Lorenz surge de usando una expansión de Fourier-Galerkin truncaada. Para fines de exhaustividad, el sistema se derivará de sus ecuaciones gobernantes. La ecuación del movimiento es: (Hateley)

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \bar{\Delta} \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{F}$$

Donde p es la presión, $\bar{\Delta}$ es el vector laplaciano, ρ es la densidad, ν es la viscosidad cinemática y \mathbf{F} representa las fuerzas externas. En general, la ecuación de continuidad es:

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad \mathbf{F} = \alpha g(T - T_0) \hat{\mathbf{k}}$$

La constante ρ revela la condición de incompresibilidad $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Denotar la temperatura de las placas por T_0 y T_1 . En este caso la fuerza $\mathbf{F} = \alpha g(T - T_0) \hat{\mathbf{k}}$ donde

α es la constante de expansión térmica y $\hat{\mathbf{k}}$ es el vector unitario en la dirección z . La temperatura está modelada por la ecuación:

$$T_t + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \Delta T$$

Siendo κ la constante de difusividad. Convirtiendo a las ecuaciones adimensionales:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\nabla p + \alpha \bar{\Delta} \mathbf{u} + r \sigma \phi \hat{\mathbf{k}} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \phi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi &= v_3 + \nabla \phi \end{aligned}$$

Donde σ es el número de Prandtl, r es el número de Rayleigh, \mathbf{v} es la velocidad dada en componentes por v_i .

Usando la función de flujo; $\psi(y, z, t)$, formulación con $v_1 = 0$,

$$v_2 = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_3 = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

Se cumple la condición de incompresibilidad, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. A medida que se plantea el problema, el único componente distinto de cero de la vorticidad está en la dirección x , llamado ξ .

$$\xi = \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} = -\Delta \psi$$

Tomando rotacional de la ecuación de cantidad de movimiento y proyectándola en la dirección x , la presión p desaparece de la ecuación y tenemos la ecuación para la vorticidad ξ .

$$\xi_t + \left| \frac{\partial(\xi, \psi)}{\partial(y, z)} \right| = \sigma \Delta \xi + \rho \sigma \phi_y$$

$$\phi_t + \left| \frac{\partial(\xi, \psi)}{\partial(y, z)} \right| = \Delta \phi - \psi_y$$

$$\xi = -\Delta\psi$$

Usando la regla de la cadena podemos escribir el sistema:

$$\xi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \xi = \sigma \Delta \xi + r \sigma \phi_y \quad (\xi;)$$

Tenga en cuenta que $\left| \frac{\partial(\xi, \psi)}{\partial(y, z)} \right|$ es simplemente el jacobiano de (ξ, ψ) con respecto a (y, z)

Ahora considere el Fourier-Galerkin expansión en forma compleja:

$$\begin{aligned} \psi(x, z, t) &= \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} a_{n, m} \exp(in\pi z) \exp(im\pi y) \\ \phi(x, z, t) &= \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} a_{n, m} \exp(in\pi z) \exp(im\pi y) \end{aligned}$$

Una expansión de un solo término para la función de flujo es,

$$\psi(y, z, t) = a(t) \sin(\pi z) \sin(\kappa \pi y)$$

Donde $a(t)$ representa rollos de convección con número de onda κ en la dirección y . Una expansión de dos términos para la temperatura es:

$$\phi(y, z, t) = b(t) \sin(\pi z) \cos(\kappa \pi y) + c(t) \sin(2\pi z)$$

Donde $b(t)$ representa rollos de convección con número de onda κ en la dirección y y $c(t)$ se aproxima a la media perfil de temperatura debido a la convección.

Los jacobianos están dados por

donde $b(t)$ representa rollos de convección con número de onda k en la dirección y y $c(t)$ se aproxima a la media

perfil de temperatura debido a la convección. Los jacobianos están dados por:

$$\left| \frac{\partial(\xi, \psi)}{\partial(y, z)} \right| = \frac{\kappa \pi^4}{4} a^2(t) (1 + \kappa^2) (\sin(2\pi z) \sin(2\kappa \pi y) - \sin(2\pi z) \sin(2\kappa \pi z))$$

$$\left| \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(y, z)} \right| = -\frac{\kappa \pi^2}{4} a(t)b(t) (\sin(2\pi z) \sin^2(2\kappa\pi y) - \sin(2\pi z) \cos^2(\kappa\pi z)) - 2\kappa\pi^2 a(t)c(t) (\sin(\pi z) \cos(2\pi z) \cos(\kappa\pi y))$$

Si la proyección del error en las funciones de base de Fourier es cero, el error residual en el truncamiento es minimizado. Multiplicando la ecuación de la vorticidad por $(\sin(\pi z) \sin(\kappa\pi y))$ e integrando en z de 0 a 1; la distancia entre las dos placas, e integrando en y de 0 a $2/k$ da:

$$a_t = -\sigma\pi(1 + \kappa^2)a(t) - \frac{\kappa\pi}{\pi(1 + \kappa^2)} \sigma r b(t)$$

Multiplicando la ecuación de la temperatura por $(\sin(\pi z) \sin(\kappa\pi y))$ e integrando en z de 0 a 1; la distancia entre las dos placas, e integrando en y de 0 a $2/k$ da:

$$b_t + \kappa\pi^2 a(t)c(t) = -\pi(1 + \kappa^2) b(t) - \kappa\pi a(t)$$

$$c_t - \frac{\pi^2}{\kappa} a(t)b(t) = -\pi^2 c(t)$$

Re escalar la ecuación como $\tau = \pi^2(1 + \kappa^2)t$ y definir:

$$\hat{b}(\tau) = -\frac{\sigma b(t)}{\pi^3(1 + \kappa^2)^2},$$

$$\hat{c}(\tau) = -\frac{\kappa^2 r c(t)}{\pi^3(1 + \kappa^2)^3},$$

Llegamos al sistema:

$$\frac{da}{d\tau} = -\sigma a(t) + \sigma \hat{b}(\tau)$$

$$\frac{db}{d\tau} = -\hat{b}(\tau) + \frac{\kappa^2 r}{\pi^4(1 + \kappa^2)^3} a(t)$$

$$\frac{dc}{d\tau} = -\frac{\kappa}{(1 + \kappa^2)} c(t) + \frac{\kappa^2}{2(1 + \kappa^2)^2} a\hat{b}(\tau)$$

Recalculando una vez más, define:

$$X(\tau) = \frac{\kappa}{\sqrt{2}(1 + \kappa^2)} a(\tau),$$

$$Y(\tau) = \frac{\kappa}{\sqrt{2}(1 + \kappa^2)} \hat{b}(\tau)$$

$$Z(\tau) = \hat{c}(\tau)$$

Llegamos al sistema de Lorenz:

$$\frac{dX}{d\tau} = \sigma(Y - X)$$

$$\frac{dY}{d\tau} = -Y + \rho X - XZ, \quad \rho = \frac{\kappa^2 r}{\pi^4 (1 + \kappa^2)^3}$$

$$\frac{dZ}{d\tau} = -\beta Z + XY, \quad \beta = \frac{4}{(1 + \kappa^2)}$$

Donde σ es el número de Prandtl, ρ es la escala del número de Rayleigh y β es una relación de aspecto.

Puntos fijos:

En el resto de este documento, se utilizará la notación de puntos para denotar la derivada con respecto al tiempo,

Entonces el sistema se escribe como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a * (y - x) \\ \dot{y} &= \rho x - y - xy \\ \dot{z} &= -\beta z + xy\end{aligned}$$

$$\text{Si } \mathbf{x} = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \quad \text{y } \mathbf{F} = \begin{cases} \sigma * (y - x) \\ \rho x - y - xz \\ -\beta z + xy \end{cases}$$

En forma vectorial el sistema se convierte en $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$. Los puntos fijos están dados por $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, la solución de este sistema revela que los puntos fijos son:

$$p(0,0,0), \quad q_{\pm} = (\pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1).$$

Denote el espacio de parámetros por : $\Lambda = (\rho, \sigma, \beta)$, para $\rho, \sigma, \beta > 0$

En Python se realizó la solución de las ecuaciones diferenciales para graficar el atractor de Lorenz:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a * (y - x) \\ \dot{y} &= x * (b - x) - y \\ \dot{z} &= x\dot{y} - cz\end{aligned}$$

ATRACTOR DE LORENZ

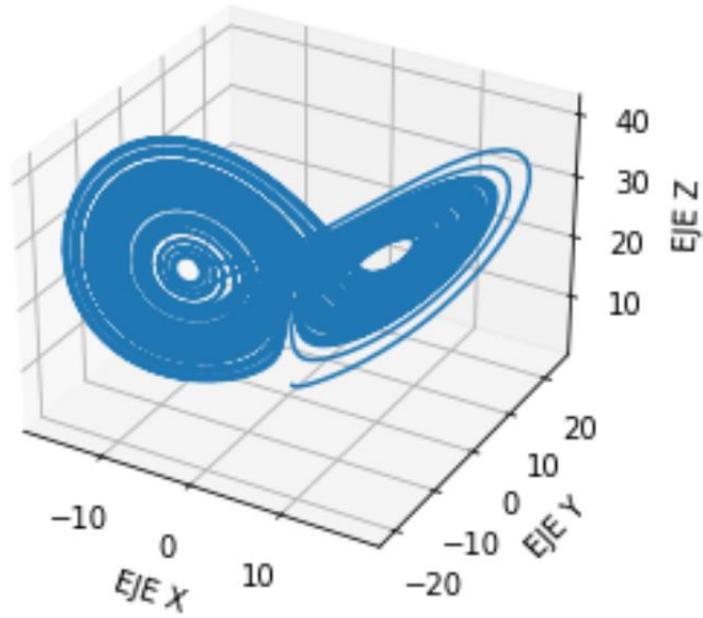


Figura 2.3.2.1 Comportamiento del atractor de Lorenz obtenido en Python.

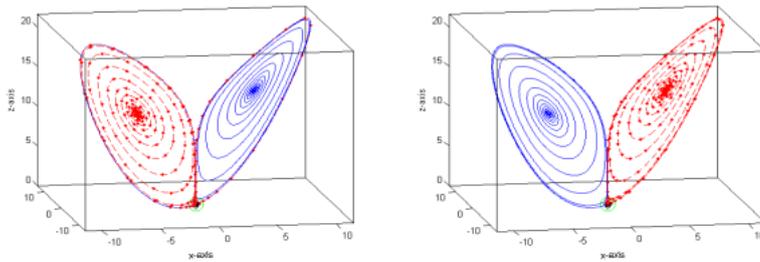


Figura 2.3.2.2 Simulación del atractor de Lorenz.

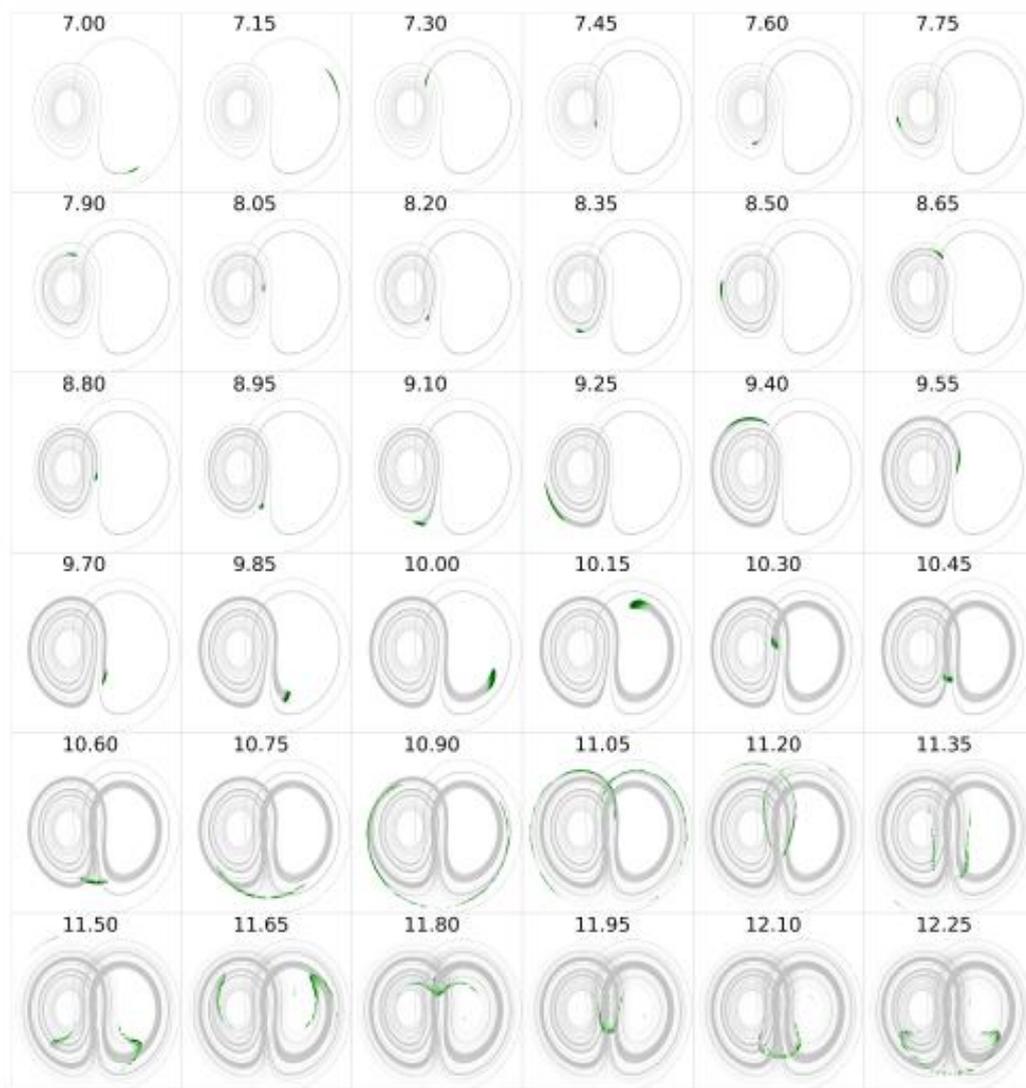


Figura 2.3.2.3 Simulación del atractor de Lorenz

2.3.3 El Atractor de Rössler

Observado a gran escala, un atractor caótico no constituye una superficie suave, sino una superficie que se pliega a sí misma. La ilustración muestra los pasos para construir un atractor caótico del tipo más elemental: el atractor de Rössler (abajo). Primero, las trayectorias próximas en el objeto deben “estirarse” o divergir, exponencialmente (arriba); aquí las distancias entre las trayectorias se ofrecen dobladas, casi. En segundo lugar, para

que el objeto se mantenga compacto, se debe “doblar” sobre sí mismo (centro): la superficie se pliega sobre ella, de suerte que sus dos extremos se encuentren. El atractor de Rössler, observado en muchos sistemas, desde fluidos hasta reacciones químicas, confirma la máxima de Einstein de que la naturaleza prefiere las formas simple

Cuando se llevan a cabo observaciones sobre un sistema físico, los inevitables errores de la medición impiden especificar su estado con toda exactitud. Por cuya razón, el estado del sistema no está situado en un punto único, sino en una pequeña región del espacio de fases. Aunque la incertidumbre cuántica fija el tamaño mínimo que puede tener la región, en la práctica diversas clases de ruidos de fondo limitan la exactitud de la medición e introducen errores bastante mayores. La pequeña región especificada por la medida es análoga a la gota de colorante azul en la masa.

Situar el sistema en una región pequeña del espacio de fases mediante una medición proporciona cierta cantidad de información sobre el sistema. Cuanto más precisa sea la medida, más conocimiento se obtiene sobre el estado del sistema. A la inversa, cuanto mayor sea la región más incertidumbre se tendrá. Puesto que los puntos próximos en un sistema no caótico permanecen cercanos con la evolución temporal, la medición proporciona cierta cantidad de información que se conserva en el tiempo. Este es, precisamente, el sentido en el que tales sistemas pueden denominarse predecibles: las mediciones iniciales contienen información que puede usarse para predecir el comportamiento futuro. En otras palabras, los sistemas predecibles no son especialmente sensibles a los errores de la medición.

Las operaciones de estirado y plegado en un atractor caótico eliminan sistemáticamente la información inicial y la sustituyen por otra nueva; los estirones amplían las incertidumbres en las escalas pequeñas, los pliegues acercan trayectorias que estaban muy separadas y destruyen información de gran escala. Así, los atractores caóticos actúan como multiplicadores que elevan las fluctuaciones microscópicas a una expresión macroscópica. Esto explica por qué no existen las soluciones exactas, los atajos para predecir el futuro. Tras un breve período, la incertidumbre incluida en la medición inicial cubre el atractor por entero y se pierde toda capacidad predictiva: simplemente no hay conexión causal entre el pasado y el futuro.

Los atractores caóticos funcionan localmente como amplificadores de ruido. Una fluctuación pequeña, debida quizás a la agitación térmica, causará una gran desviación en la posición de la trayectoria poco después.

Pero hay un aspecto importante en el que los atractores caóticos difieren de los simples amplificadores de ruido. Debido a que las operaciones de estirar y plegar son repetitivas y continuas, cualquier minúscula fluctuación acabará por dominar el movimiento; así, el comportamiento cualitativo es independiente del nivel de ruido.

Por lo anterior, los sistemas caóticos no pueden “suavizarse”, bajando la temperatura, por ejemplo. Generan azar por sí mismos, sin necesidad de influencias aleatorias externas. Su comportamiento aleatorio se debe a algo más que a la amplificación de los errores y a la pérdida de la capacidad de predecir; se origina por la complejidad de las trayectorias generadas por el estirado y el plegado.

Los atractores caóticos de pocas dimensiones abren un nuevo campo en la teoría de los sistemas dinámicos. Pero debe cuestionarse su relevancia en relación con la aleatoriedad observada en los sistemas físicos. La primera prueba experimental en favor de la hipótesis según la cual los atractores caóticos fundan el movimiento estocástico de los fluidos fue más bien indirecta. El experimento fue realizado, en 1974, por Jerry P. Gollub, del Haverford College, y Harry L. Swinney, de la Universidad de Texas en Austin. La prueba resultó ser indirecta, porque los investigadores no se concentraron en el atractor en sí, sino en las propiedades estadísticas que lo caracterizan. El sistema que examinaron era una célula de Couette: formada por dos cilindros concéntricos. El espacio entre ellos se llena con un fluido y uno de los cilindros, o ambos, giran con una velocidad angular fija. Según aumenta la velocidad angular, el fluido exhibe pautas de comportamiento progresivamente más complejas, con una dependencia temporal complicada (ver la figura 3.5-12). Lo que hicieron Gollub y Swinney fue esencialmente medir la velocidad del fluido en un punto dado. Al incrementar la velocidad de rotación, observaron transiciones desde una velocidad constante en el tiempo hasta otra que variaba periódicamente y, finalmente, a otra velocidad variable de forma aperiódica. Esta transición al movimiento aperiódico constituía el punto central del experimento.

El experimento se había diseñado para decidir entre dos concepciones teóricas que predecían diferentes esquemas de comportamiento del fluido a medida que cambiaba la velocidad de rotación. La teoría de Landau del movimiento aleatorio de un fluido predecía que, al incrementar la rotación, se excitaría un número siempre creciente de oscilaciones independientes del fluido. El atractor asociado sería un toro de muchas dimensiones. Esta concepción de Landau había sido puesta en duda por David Ruelle, del Instituto de Altos Estudios Científicos de París, y Floris Takens, de la Universidad holandesa de

Groningen. Adujeron argumentos matemáticos de los que se intuía que era poco probable que el atractor asociado con las ideas de Landau apareciera en el movimiento de un fluido. Por el contrario, sus resultados indicaban que cualquier toro de muchas dimensiones debería originar un atractor caótico, como había postulado Lorenz.

2.4 DIFERENTES MEDIDAS DEL CAOS Y COMPLEJIDAD

Cuantificando El Caos

¿Qué tan caótico es el comportamiento de un sistema complejo? Antes de entrar en los detalles de esa respuesta, deberíamos preguntarnos por qué es importante cuantificar el Caos. Una respuesta se sitúa en el deseo de poder especificar cuantitativamente si el comportamiento irregular de un sistema es de verdad caótico o simplemente tiene un comportamiento de mayor o menor complejidad. Como hemos visto, el comportamiento caótico genera una especie de aleatoriedad y pérdida de información debido a las condiciones iniciales, que pueden explicar el comportamiento complejo (o al menos algún comportamiento complejo) en sistemas reales. Sería muy interesante tener alguna forma cuantitativa definitiva para reconocer el Caos y sacar el “verdadero” Caos del sólo comportamiento ruidoso o comportamiento irregular debido a la complejidad (por un gran número de grados de libertad) del sistema. Una segunda respuesta sería que algo de esa cuantificación nos daría una estimación del número de grados (activos) de libertad para el sistema. Una tercera razón para cuantificar el comportamiento caótico es que se podrían anticipar rasgos universales análogos del comportamiento regular y del caótico, tanto cualitativos como cuantitativos, que describan el comportamiento de un sistema y los cambios de su comportamiento de su régimen caótico debido a variaciones en los parámetros del sistema. Veremos que algunos de esos rasgos universales han sido descubiertos y que parecen describir exactamente el comportamiento de sistemas actuales. Finalmente (aunque hoy es raramente posible), podríamos esperar que podamos ser capaces de correlacionar cambios en la cuantificación del comportamiento caótico, con cambios en el comportamiento físico de un sistema. Por ejemplo, ¿Hay alguna cuantificación o valor cuyos cambios están ligados a los ataques de fibrilación en los latidos del corazón, o en los comienzos de turbulencia en un fluido, o comportamiento ruidoso en un circuito semiconductor?

Además de calcular valores para cuantificar sistemas caóticos, necesitamos ser capaces de estimar incertidumbres asociadas con esa cuantificación. Sin esas incertidumbres, es imposible hacer comparaciones significativas entre valores calculados teóricamente y medidos experimentalmente, o comparar resultados de diferentes experimentos. Para resumir, aquí hay algunas razones para cuantificar el comportamiento caótico:

1. La cuantificación puede ayudar a distinguir el comportamiento caótico del comportamiento ruidoso.
2. La cuantificación puede ayudar a determinar cuántas variables se necesitan para modelar la dinámica del sistema.
3. La cuantificación puede ayudar a clasificar sistemas dentro de clases universales.
4. Cambios en los valores de la cuantificación pueden estar ligados a importantes cambios en el comportamiento dinámico del sistema. Fue muy importante para obtener una forma de meta-análisis de caracterizar los fenómenos en diferentes grados de complejidad, muestra tres distintos sistemas caóticos. ¿Cuál es más caótico?

2.5 Marco Contextual.

2.5.1 Marco Contextual pedagógico

Teoría del aprendizaje significativo. La concepción constructivista del aprendizaje y la intervención educativa constituyen la convergencia de diversas aproximaciones psicológicas a problemas como:

- El desarrollo psicológico del individuo, particularmente en el plano intelectual y en su intersección con los aprendizajes escolares.
- La identificación y atención a la diversidad de intereses, necesidades y motivaciones de los alumnos en relación con el proceso enseñanza-aprendizaje.
- El replanteamiento de los contenidos curriculares, orientados a que los sujetos y motivaciones sobre contenidos significativos.
- El reconocimiento de la existencia de diversos tipos y modalidades de aprendizaje escolar, dando una atención más integrada a los componentes intelectuales, afectivos y sociales.

- La búsqueda de alternativas novedosas para la selección, organización y distribución del conocimiento escolar, asociadas al diseño y promoción de estrategias de aprendizaje e instrucción cognitiva.
- La importancia de promover la interacción entre el docente y sus alumnos, así como entre los alumnos mismos, con el manejo del grupo mediante el empleo de estrategias de aprendizaje cooperativo.
- La revalorización del papel del docente, no sólo en sus funciones de transmisor del conocimiento, guía o facilitador del aprendizaje, sino como mediador del mismo, enfatizando el papel de la ayuda pedagógica que presta reguladamente al alumno.
(Delgado, s.f.)

En el campo de lo científico, detrás del diseño, la evaluación y el desarrollo de los productos y procesos tecnológicos hay implicados saberes de las diversas ciencias, y es inevitable que los estudiantes lleguen de una u otra manera a ellas si su quehacer tecnológico es reflexivo y no simplemente instrumental (Prieto, 2008)

Basado en estos conceptos se presenta un instrumento didáctico, que consiste en un laboratorio de dinámica no lineal, destinado a realizar prácticas relacionadas con la mayor parte de los temas de mecánica clásica en este caso entorno al péndulo caótico, y esta clase es parte de la formación de los estudiantes de la carrera de Física.

El uso de instrumentos y equipos que permiten a los estudiantes acceder al conocimiento significativo, sin duda es uno de los ejes que la reforma integral plantea para lograr que se integren conocimientos, habilidades y actitudes de los estudiantes, desarrollando así sus competencias. (Prieto, 2008)

En cuanto a las competencias disciplinares de las ciencias experimentales se favorecen en gran medida las siguientes: (Prieto, 2008)

1. Establece la interrelación entre la ciencia, la tecnología, la sociedad, y el ambiente en contextos históricos y sociales específicos.

2. Fundamenta opiniones sobre los impactos de la ciencia y la tecnología en su vida cotidiana, asumiendo consideraciones éticas.
3. Identifica problemas, formula preguntas de carácter científicos y plantea las hipótesis para responderlas.
4. Contrasta los resultados obtenidos en una investigación o experimento con hipótesis previas y comunica sus conclusiones.
5. Explicita las nociones científicas que sustentan los procesos para la solución de problemas cotidianos.
6. Diseña modelos o prototipos para resolver problemas, satisfacer necesidades o demostrar principios científicos.
7. Analiza las leyes generales que rigen el funcionamiento del medio físico y valora las acciones humanas de riesgo e impacto ambiental.
8. Aplica normas de seguridad en el manejo de sustancias, instrumentos y equipo en la realización de actividades de su vida cotidiana. (Prieto, 2008)

Es, sin duda, el uso de materiales y equipos, un gran apoyo didáctico para el docente en cualquier nivel educativo. (Prieto, 2008)

2.5.2 Simulaciones y ruta hacia el caos

La ilusión de la interactividad y las rutinas del profesor.

Las simulaciones (modelización a través de la computadora), abarcan un amplio rango de posibilidades que van desde representaciones estáticas que procuran reproducir la apariencia de objetos, hasta representaciones dinámicas, con mayor o menor capacidad de variación de parámetros. En el desarrollo de la ciencia y de la tecnología, la simulación se sitúa en el mismo nivel que la experimentación; las actividades de investigación y desarrollo que se apoyan en simulaciones numéricas son cada vez más numerosas en tanto que las muchas actividades científicas se basan en la elaboración de modelos (modelización) y en su utilización, para explicar el mundo físico. (Patricial Fernández, 2011)

Este proyecto es parte de un esfuerzo de la Facultad de Ciencias para promover la enseñanza de los sistemas dinámicos no lineales, su aplicación al estudio de problemas científicos y el diseño de tecnologías para proveer soluciones de ingeniería. Un primer paso llevaría a la creación del Laboratorio de Dinámica no Lineal en el Departamento de Física de la Facultad de Ciencias, en el cual enmarcamos ahora este proyecto.

La educación superior, a su vez, se define como la etapa de formación profesional en las diferentes áreas del saber. Es motor del desarrollo económico y social de los países y el principal instrumento de generación y transmisión del conocimiento y de la experiencia científica y humanística acumulada por la humanidad. (TICS, s.f.)

Teoría del aprendizaje significativo. La concepción constructivista del aprendizaje y la intervención educativa constituyen la convergencia de diversas aproximaciones psicológicas a problemas como:

El desarrollo psicológico del individuo, particularmente en el plano intelectual y en su intersección con los aprendizajes escolares.

La identificación y atención a la diversidad de intereses, necesidades y motivaciones de los alumnos en relación con el proceso enseñanza-aprendizaje. (TICS, s.f.)

El replanteamiento de los contenidos curriculares, orientados a que los sujetos y motivaciones sobre contenidos significativos.

El reconocimiento de la existencia de diversos tipos y modalidades de aprendizaje escolar, dando una atención más integrada a los componentes intelectuales, afectivos y sociales.

La búsqueda de alternativas novedosas para la selección, organización y distribución del conocimiento escolar, asociadas al diseño y promoción de estrategias de aprendizaje e instrucción cognitiva.

La importancia de promover la interacción entre el docente y sus alumnos, así como entre los alumnos mismos, con el manejo del grupo mediante el empleo de estrategias de aprendizaje cooperativo.

La revalorización del papel del docente, no sólo en sus funciones de transmisor del conocimiento, guía o facilitador del aprendizaje, sino como mediador del mismo, enfatizando el papel de la ayuda pedagógica que presta reguladamente al alumno. (TICS, s.f.)

En la naturaleza, muchos fenómenos o sistemas se pueden modelar a través de ecuaciones diferenciales, obteniendo de ellos la posibilidad de predecir el comportamiento del sistema en el tiempo, en otras palabras el conocimiento de las ecuaciones diferenciales que describen tal sistema o fenómeno nos da a conocer la evolución del sistema.

Los matemáticos han clasificado las ecuaciones diferenciales de acuerdo a varios criterios, entre ellos por tipo, orden y linealidad. La complejidad de la ecuación diferencial a tratar varía y depende en qué clasificación se encuentre. Sin duda al considerar por tipo: las ecuaciones diferenciales ordinarias son las más fáciles de analizar, y, al considerar por linealidad: las más fáciles de analizar son las lineales. Las ecuaciones diferenciales no lineales poseen una complejidad considerable de modo que solo conozcamos para ellas soluciones numéricas aproximadas

Cuando se pretende conseguir el modelo de algún fenómeno o sistema real, se tienen que considerar numerosas variables y, por lo general asumir muchas simplificaciones y condiciones para que la ecuación diferencial resultante sea fácil de analizar; al final se obtiene una aproximación que puede ser útil.

Lo anterior parece acertado pero al considerar algunos fenómenos y tratar de estudiarlos lo más cercano a la realidad encontramos que las ecuaciones diferenciales por analizar son realmente complicadas y por lo general no lineal, al estudiarlos encontramos características notorias en la evolución de tales sistemas.

Debido al esquema anterior es que la denominada teoría del caos ha tomado importancia, dado que estudia sistemas o fenómenos cuyas ecuaciones diferenciales que lo describen son complicadas. Aunque al caos suele asociarse con el desorden, “es más apropiado considerar el caos como un tipo de orden sin periodicidad. Dentro de regímenes generalmente caóticos pueden descubrirse patrones de movimiento ordenado intercalados con caos en escalas pequeñas” (Bai-Lin, 1984, pág. 5).

Condiciones para observar comportamiento caótico

Para que podamos observar el comportamiento caótico en un sistema particular hay ciertas condiciones que deben cumplirse. La condición más importante es: que la ecuación diferencial que describe al sistema debe ser no lineal. Por tanto con seguridad un sistema lineal nunca exhibirá caos mientras que un sistema no lineal puede exhibir caos.

La no linealidad es una condición necesaria pero no suficiente para la exhibición del caos, así que se debe considerar otra condición y es que el espacio fase asociado debe ser mínimo tridimensional. Lo anterior se comprueba con el teorema de Poncairé-Bendixon, que permite predecir el comportamiento de un sistema dinámico en el espacio de fases en dos dimensiones (Carrillo Ledesma & Sánchez Garduño).

Si consideramos el siguiente sistema autónomo:

$$\dot{x} = f(x, y) \text{ y } \dot{y} = g(x, y)$$

El teorema de Poncairé-Bendixon dice (ACHAESON) que el camino de fase debe eventualmente:

- a) Terminar en un punto de equilibrio.
- b) Terminar al punto inicial del camino o formar un trayectoria cerrada
- c) Aproximarse al ciclo límite

En otras palabras no puede el sistema abandonar una cierta región del plano x, y . Si lo anterior sucede se descartan las soluciones caóticas, porque el teorema de Poncairé-Bendixon nos lo asegura.

Si el espacio fase asociado al sistema, a analizar, es tridimensional entonces el teorema no aplica, se sabe que puede exhibir caos.

Para sistemas disipativos (que son sistemas donde existe transferencia de energía), las ecuaciones diferenciales que lo describen, se pueden reescribir como un sistema autónomo de primer orden (las ecuaciones autónomas de primer orden son las tienen la forma “derivada de x = función de x ”, como las ecuaciones mostradas en el ejemplo anterior), cuando estas son no lineales y tienen N variables dependientes del tiempo, donde $N \geq 3$, el sistema es capaz de exhibir caos; y para sistemas no disipativos (que son sistemas donde no existe transferencia de energía), las ecuaciones diferenciales que lo describen, al ser reescritas como un sistema autónomo de primer orden, cuando estas resultan ser no lineal y con N variables dependientes del tiempo, donde $N \geq 4$, el sistema puede exhibir caos.

Características de sistemas que presentan comportamiento caótico

Dentro del conjunto de sistemas no lineales que exhiben caos, podemos mencionar a los circuitos eléctricos y reacciones químicas. En estos sistemas observamos que siempre existe un parámetro de control, el parámetro de control es un valor numérico que depende de las características del sistema por ejemplo: en un circuito eléctrico puede ser el voltaje, en una

reacción química puede ser el ritmo de flujo. El comportamiento del sistema en general puede ser monitoreado si variamos el parámetro control, y podemos cambiar su valor hasta obtener comportamientos caóticos.

Además de lo descrito anteriormente hay otras dos características importantes. Una de ellas es que ante perturbaciones siempre se obtienen oscilaciones irregulares, es decir que nunca se encuentra un patrón repetitivo. La otra característica es la sensibilidad ante condiciones iniciales.

La sensibilidad a las condiciones iniciales, fue observada por el matemático francés Poincaré al realizar estudios sobre el problema gravitatorio de los tres cuerpos. El término se refiere al hecho que la evolución de un sistema depende de las condiciones iniciales.

Si tenemos dos sistemas similares con condiciones iniciales ligeramente diferentes, para:

- Sistemas lineales se espera tener la misma evolución en ambos.
- Sistemas no lineales se espera que después de un tiempo las evoluciones sean completamente diferentes.

Ruta hacia el caos

Para proseguir vamos a considerar el sistema péndulo-tierra amortiguado forzado o PAF.

La ecuación del movimiento para este sistema es:

$$mL^2\ddot{\varphi} = -bL^2\dot{\varphi} - mgL\text{Sen}(\varphi) + F_0\text{Cos}(\omega t)$$

Podemos reescribir la ecuación diferencial a la siguiente forma:

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\text{Sen}(\varphi) = \gamma\omega_0^2\text{Cos}(\omega t)$$

Donde las constantes se definen como sigue:

$$2\beta = \frac{b}{m}; \quad \omega_0^2 = \frac{g}{L}; \quad \gamma = \frac{F_0}{mg}$$

γ (No tiene dimensiones) es una medida de la intensidad de la fuerza externa. Esta ecuación posee las características que anteriormente se habían mencionado, entre ellas observamos que: γ se convierte en el parámetro control mediante el cual podemos monitorear el comportamiento del sistema, también que es una ecuación diferencial no lineal.

Para este sistema se puede calcular numéricamente la solución a la ecuación diferencial que lo describe, por tanto la evolución del sistema puede graficarse

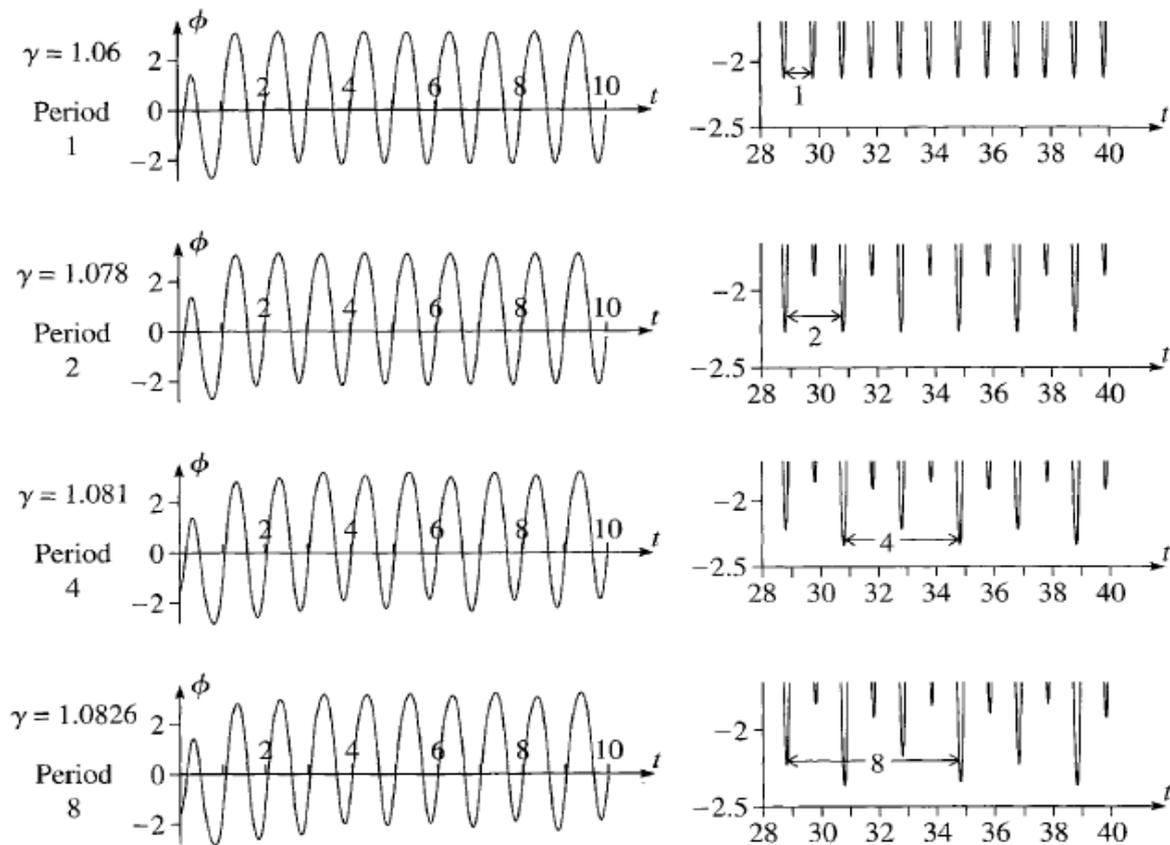


Figure 2.5.2.1 Cascada de bifurcación del período (Taylor, 2005, pág. 572)

En la figura observamos que se grafica la evolución del sistema para distintos valores de γ , aunque pareciera que las soluciones son parecidas, tienen diferencias sutiles. Muestra que a medida aumentamos el valor de γ , el periodo de las soluciones se desdoblan pasando de 1 a 2, de 2 a 4, de 4 a 8; este fenómeno se conoce como cascada de bifurcación del período. Y constituye un método para llegar al caos.

Como esperamos el mismo fenómeno se presenta en diversos sistemas y tiene un carácter universal en todos ellos. El carácter universal fue demostrado por Mitchell Feigenbaum a final de la década del 70. Feigenbaum encontró un relación recursiva entre valores umbrales (del parámetro control) que hace que el período se desdoble; en la definición de la relación recursiva se hace uso de una constante que posee el mismo valor para todos los sistemas, esta constante se le denomina el número de Feigenbaum.

La relación recursiva nos ayuda a verificar que el fenómeno de bifurcación del período no ocurre para cualquier valor arbitrario de γ lo suficientemente grande, sino que solo puede observarse para valores del parámetro control menores que un valor finito, el cual se constituye en un valor límite. Entonces ¿Qué sucede si el valor parámetro control se excede

del valor límite? Al exceder el valor límite, se observa el comportamiento caótico del sistema.

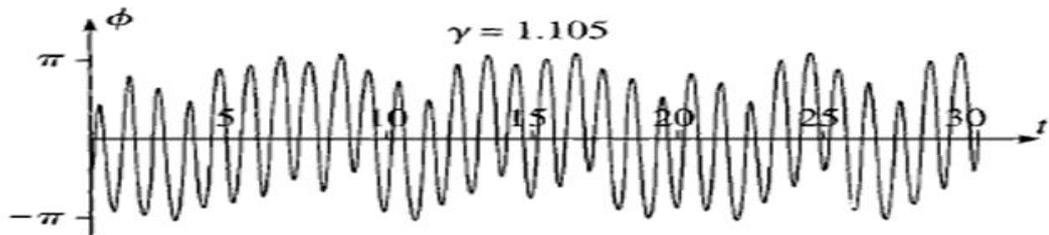


Figure 1.5.2.2. Gráfica de la evolución del sistema para un valor de γ que excede el valor límite. (Tylor, 2005, pág. 476)

La figura 2 muestra que al exceder el valor límite para γ , no se vuelve a encontrar periodicidad en la solución a la ecuación diferencial (planteada en el ejemplo). Esto revela, justamente, las características del comportamiento de un sistema que posee comportamiento caótico. Ya para este punto, el camino de fase del sistema oscila de forma errática alrededor de un atractor, que recibe el nombre de atractor extraño; el sistema también se vuelve sensible a las condiciones iniciales.

Espacio fase

El espacio fase es una manera alternativa de visualizar la evolución de los sistemas tanto caóticos como no caóticos. Al espacio de fase también se le llama espacio de estados.

El espacio de estados es el resultado de graficar las cantidades que pueden representar de forma completa las condiciones iniciales de un sistema dinámico, es decir cada punto en el espacio de fase o de estados representa una condición inicial del sistema. Cuando un sistema dinámico evoluciona en el tiempo, en el espacio de fase se forma una curva, que proporciona la información de los diferentes estados por el que pasa el sistema a medida transcurre el

tiempo. Para el ejemplo mencionado del PAF, el espacio de fase en un plano bidimensional donde se grafican las cantidades $(\phi, \dot{\phi})$.

La ventaja que presenta analizar el comportamiento de sistemas caóticos en el espacio fase es clara, permite visualizar de forma más asequible, el movimiento que sigue la evolución del sistema alrededor de un atractor. La **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** muestra en el espacio de estados la evolución del sistema PAF para valores específicos de γ . Los valores de γ escogidos son los mismos que los mostrados en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**

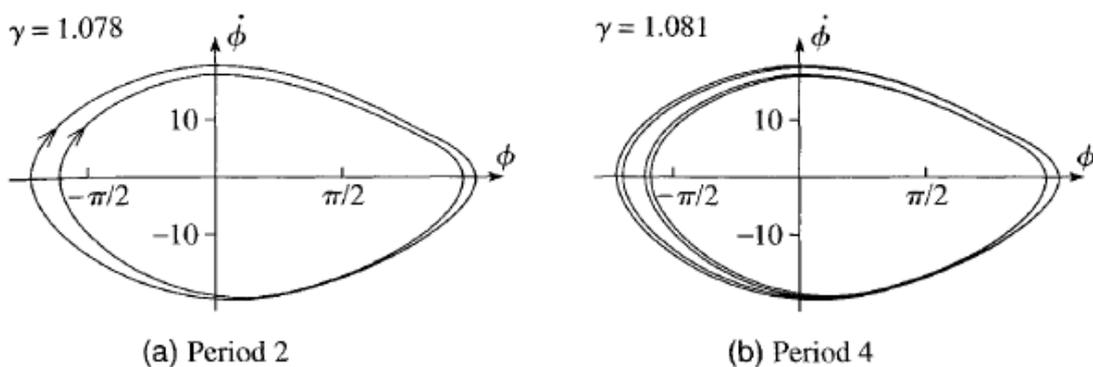


Figure 2.5.2.3 Visualización en el espacio de fase de la cascada de bifurcación del período para valores ya mostrados de γ , (Taylor, 2005, pág. 122)

Aquí con claridad podemos observar la ventaja de trabajar en el espacio de fase y no el espacio de configuración. Mientras en el espacio de configuración (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**) se hace casi imperceptible algunas características como: el período y los estados por los que pasa el sistema, en el espacio de estados (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**) de inmediato se puede observar el detalle del período y los estados por los que pasa el sistema, siendo en este último trayectorias cerradas (estables). Cuando el sistema exhiba caos, notaremos que en el espacio de configuración, ya

no se formará para el sistema, una trayectoria cerrada, sino que las trayectorias estarán oscilando alrededor de un atractor como se muestra en la figura 3.

Por la razón ejemplificada con la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, es que se prefiere trabajar y analizar la evolución de un sistema en el espacio de estados y no en el espacio de configuración. Aunque tiene sus limitaciones, ya que un sistema que tenga n grados de libertad (donde $n \geq 2$), no puede tal sistema ser representado en el espacio de estados. Para solventar ese problema se hace uso de las llamadas secciones Poincaré. Finalmente, resumiendo, un sistema puede ser analizado al graficar su movimiento, ya sea: en espacio de configuración o en el espacio de estados, eligiendo según convenga.

2.6.2 GUÍA DEL PÉNDULO CAÓTICO

El sistema por analizar

El sistema en el cual nos interesaremos es un péndulo que posee dos puntos de equilibrio. El péndulo consiste en un oscilador formado por un disco de aluminio que está conectado a dos resortes. En el extremo del disco de aluminio se encuentra una masa. El sistema también tiene amortiguamiento caótico. La configuración del sistema está presentado en la figura 2.

Equipo:

Incluye:

- 1 Base grande para rodo
- 2 120 cm Barra larga de acero (2)
- 1 45 cm Barra de acero
- 2 Abrazadera múltiple (2)
- 1 Accesorio Armónico
- 1 Oscilador mecánico motor
- 1 Sensor de movimiento rotatorio
- 1 Cabeza de Photogate

Necesita pero no incluye

- 1 Interfase universal modelo 850
- 1 Software PASCO Capstone licencia

Introducción

El comportamiento caótico del péndulo no lineal impulsado se explora mediante la representación gráfica de su movimiento en el espacio de fase y haciendo un diagrama de Poincaré. Estas gráficas se comparan con el movimiento del péndulo cuando no es caótico.

El oscilador consiste en un disco de aluminio conectado a dos resortes. Una masa puntual en el borde del disco de aluminio hace que el oscilador no sea lineal. La frecuencia del controlador sinusoidal se puede variar para investigar la progresión del movimiento predecible al movimiento caótico. El amortiguamiento magnético también se puede ajustar para cambiar el carácter del movimiento caótico. La posición angular y la velocidad del disco se registran como una función del tiempo usando un sensor de movimiento rotatorio. Un gráfico de fase en tiempo real se realiza mediante la representación gráfica de la velocidad angular frente al ángulo de desplazamiento de la oscilación.

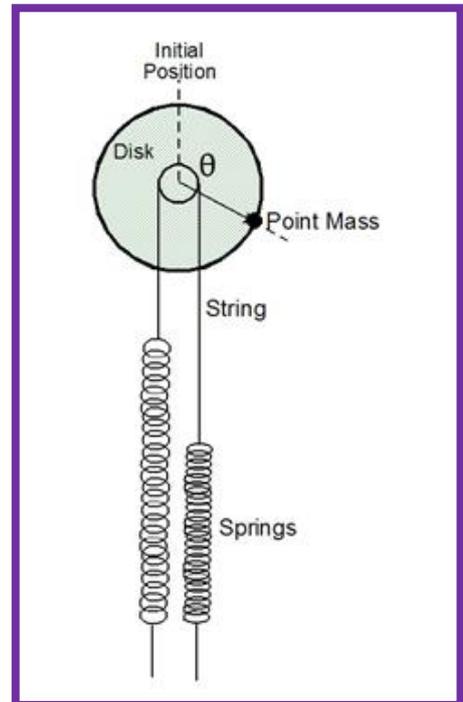


Figura 2.6.2.1: Péndulos y Resortes

La gráfica de Poincaré también se grafica en tiempo real, superpuesta a la gráfica de la fase. Esto se logra registrando el punto en el diagrama de fase una vez cada ciclo del brazo del conductor cuando el brazo del conductor pasa por la fotocelda.

Teoría

El oscilador consiste en un disco de aluminio conectado a dos resortes. Una masa puntual en el borde del disco de aluminio hace que el oscilador no sea lineal. Esta no linealidad se requiere para causar movimiento caótico. Además, el disco está amortiguado magnéticamente.

Se pueden variar varias cantidades para que el movimiento regular se vuelva caótico. Estas variables son la frecuencia de conducción, la amplitud de conducción, la amplitud de amortiguación y las condiciones iniciales.

Hay tres maneras diferentes de trazar oscilaciones:

1. Velocidad angular ω versus t
2. Espacio de Fase: Velocidad Angular (ω) vs. Desplazamiento Angular (θ)
3. Trazado de Poincaré: Velocidad angular (ω) versus el desplazamiento angular (θ) trazada sólo una vez por período de la fuerza motriz.

El espacio de fase y el diagrama de Poincaré son particularmente útiles para reconocer las oscilaciones caóticas. Cuando el movimiento es caótico, las gráficas no se repiten.

Pozo potencial

Este péndulo tiene dos puntos de equilibrio, uno en cada lado donde el par causado por el peso de la masa puntual es equilibrado por el par de los resortes. Para mapear U (energía potencial) frente a θ (el ángulo en que la masa puntual se desplaza de vertical), se suprime el amortiguamiento magnético y la fuerza motriz y el péndulo se desplaza de la vertical y se deja oscilar libremente. Se mide la velocidad angular y, por tanto, se calcula la energía cinética (K). Entonces la energía potencial se deriva de la conservación de la energía.

Dado que el péndulo comienza desde el reposo al máximo desplazamiento, $K_i = 0$, and

Dado $U_i = \text{constante} = c$,

Por lo tanto, la forma del pozo de energía potencial se puede encontrar trazando el negativo del cuadrado de la velocidad angular en comparación con el desplazamiento angular (θ).

Hacer un cálculo en la calculadora Capstone: ; $U = c - 0.5 * I * w^2$

Donde $w =$ [Velocidad angular (rad / s)] e $I =$ inercia rotacional del disco y de la masa puntual. Ajustar $c = 1$ y medir el radio y la masa del disco y la masa puntual y calcular la inercia rotacional:



Preparación

Monte el conductor sobre una base de vástago y fije un fotogate al conductor como se muestra en la figura 2. Utilice dos barras verticales conectadas por una barra cruzada en la parte superior para una mayor estabilidad. Ver Figura

Figura 2.6.2.2. Preparación completa



Figura 2.6.2.3. Conductor Photogate

1. Monte el sensor de movimiento giratorio en la barra transversal.
2. Corte una cuerda a una longitud de aproximadamente 1,5 m. Ate el centro de la cuerda alrededor del paso más pequeño de la polea del Rotary Motion Sensor.



Figura 2.6.2.4. Atando la cuerda

Enhebre los dos extremos de la cuerda a través del orificio lateral en el paso más grande de la polea. Envuelva cada extremo de la cuerda dos veces alrededor del paso más grande de la polea.

2. Ajuste la posición del brazo giratorio del conductor para que el tornillo de fijación quede en el centro del brazo. A continuación, gire el brazo del conductor hasta que esté verticalmente hacia abajo. Conecte una cuerda al brazo del conductor e hilo de la cadena a través de la guía de la cadena en el extremo superior del conductor. Ate un extremo de uno de los resortes al final de esta cuerda. Ate el extremo del resorte cerca de la guía de la cadena del conductor.

4. Ate una sección de cuerda (unos 10 centímetros de largo) al tornillo de nivelación de la base. Ate un extremo del segundo resorte a esta cuerda.

5. Para completar la configuración de los resortes, mantenga el disco del péndulo en su lugar con la masa del punto en la parte superior. Asegúrese de que cada extremo de la cuerda se envuelve alrededor de la polea dos veces y luego enhebrar cada una de las cuerdas de la polea a través de los extremos de los resortes y atarlos con una tensión aproximadamente igual a cada lado: La masa punta debe ser tirado casi por igual por Cada primavera. El disco debe ser capaz de girar una revolución en cualquier dirección sin que el extremo de ninguno de los muelles golpee la polea. Tampoco ninguna de las dos muelles debe cerrarse completamente.

6. Fije el accesorio de arrastre magnético al lado del sensor de movimiento rotatorio como se muestra en la Figura 2.6.2.4.
7. Enchufe el controlador en el Generador de Señal # 1 en la Interfaz Universal 850 y ajuste la señal a 5 V CC. Dejarlo.
8. Enchufe el sensor de movimiento rotatorio en el canal P1 y enchufe el fotogate en el canal 1 de la interfaz.
9. Ajuste la velocidad de muestreo del sensor de movimiento rotatorio a 40 Hz.
10. Cree un temporizador personalizado llamado "Período", que es el tiempo entre bloques del fotogate.
11. Para hacer el gráfico de Poincare, cree un cálculo para la velocidad angular una vez por revolución cuando el brazo del conductor pasa a través del fotocelda:

$$\omega = 0 * [\textit{Periodo}(s)] + [\textit{Velocidad angular}(rad/s)].$$

Procedimiento:

Parte I: Mapeo del Pozo Potencial

1. En PASCO Capstone, haga un gráfico de la energía potencial (U) frente al ángulo.
2. Deje la fuente de alimentación del controlador apagada. Atornille el tornillo magnético todo el camino de vuelta lejos del disco para reducir la resistencia. Abra las propiedades del Rotary Motion Sensor en el Resumen y apague "Zero on Start". Gire el disco para que la masa esté en la parte superior y el sensor en las propiedades.
3. Desplace la masa del punto a un lado lo suficientemente lejos para que el disco oscile todo el camino hasta el otro lado cuando se suelta.
4. Inicie la grabación, suelte el péndulo y déjelo oscilar una vez. A continuación, haga clic en STOP.

5. Examine la gráfica resultante de la energía potencial en función del ángulo. Observe que hay un doble pozo porque hay dos puntos de equilibrio. ¿Son los pozos igualmente profundos? ¿Por qué o por qué no?

Parte II: Frecuencia Resonante

1. Cree una gráfica de velocidad angular vs. tiempo y cree otra gráfica de velocidad angular vs. ángulo. Cree una pantalla de dígitos del Período de Conductor y otra para el Voltaje de Salida.

2. Atornille el imán hacia el disco hasta que esté a unos 3 mm del disco. Sin encender la fuente de alimentación que alimenta al conductor, permita que la masa puntual caiga en la posición de equilibrio a cada lado del péndulo. Comenzar a grabar, desplazar el péndulo del equilibrio y dejarlo oscilar durante unas pocas oscilaciones. Haga clic en STOP.

3. Examinar el gráfico de velocidad angular vs. tiempo. ¿Son las oscilaciones sinusoidales? ¿Están amortiguados?

4. Examinar el gráfico de fases (velocidad angular vs. ángulo). ¿Qué forma es? ¿Cómo se ve afectado por la cantidad de amortiguación? ¿Qué aspecto tendría si no hubiera ningún amortiguamiento?

5. Mida el período de la oscilación usando la herramienta inteligente en la parte superior del gráfico de ángulo frente al tiempo.

Parte III: Oscilaciones no caóticas

Nota sobre las condiciones iniciales: Para el resto del experimento, mantenga el extremo de la masa puntual en la parte superior y luego suelte cuando el brazo del conductor esté en su punto más bajo.

1. Ajuste el brazo del conductor para una amplitud de unos 3,3 cm. Asegúrese de que el brazo del conductor sólo rompa el haz de fotogás una vez por revolución. Ajuste la distancia del imán a unos 4 mm del disco. Encienda la fuente de alimentación y ajuste el voltaje a unos 3,5 V para que la oscilación sea simplemente un movimiento de ida y vuelta.

2. Registre los datos durante unos minutos.

3. Examinar el gráfico de velocidad angular vs. tiempo. ¿Es sinusoidal? ¿Cuál es el período? ¿Es el período igual al período de conducción? ¿Por qué este gráfico es diferente del gráfico de la Parte II?

4. Examinar el gráfico de la velocidad angular vs. Ángulo (el diagrama de fases). ¿Por qué se ve como lo hace? ¿En qué se diferencia del diagrama de fases de la Parte II?

5. Examinar la parcela de Poincaré. ¿Por qué se ve como lo hace? ¿Cómo esta trama indica que esta oscilación es regular?

Superposición del diagrama de Poincaré en el diagrama de fases:

Para superponer el gráfico de Poincaré en el diagrama de fases, abra el Resumen. Haga clic y arrastre el cálculo de velocidad angular sobre el mismo eje vertical que tiene la medición de velocidad angular. Colóquela justo a la derecha del eje donde aparece la línea vertical verde. A continuación, seleccione el cálculo de la velocidad angular en la leyenda del gráfico y haga clic en sus propiedades en la barra de herramientas del gráfico. Elija trazar puntos de datos pero no hay línea de conexión.

6. Examinar la FFT de la velocidad angular. ¿Cuántos picos hay?

1. Aumente gradualmente la frecuencia de conducción aumentando el voltaje en la fuente de alimentación. Tendrá que mover el imán más cerca del disco para evitar que se sobrecargue el disco. Dé el tiempo del péndulo para responder al cambio en la frecuencia de conducción. Aumentar la frecuencia hasta que el movimiento del péndulo es un poco más complicado: no debe tener simplemente un movimiento de ida y vuelta, sino que debe oscilar hacia adelante y hacia atrás con un extra de ida y

vuelta en un lado. Vuelva a arrancar la oscilación, manteniendo el extremo de la masa puntual en la parte superior y soltándolo cuando el brazo del conductor esté en su punto más bajo.

8. Grabe los datos durante unos minutos.

9. Examine el gráfico de velocidad angular vs. Tiempo. ¿Es sinusoidal? ¿Cuál es el período? ¿Es el período igual al período de conducción? ¿Cómo es diferente de la oscilación anterior?

10. Examine la gráfica de la velocidad angular respecto al ángulo (el diagrama de fases). ¿Por qué se ve como lo hace? Compárela con el diagrama de fases anterior.

11. Examine el diagrama de Poincaré. ¿Por qué se ve como lo hace? ¿Cómo esta trama indica que esta oscilación es regular?

12. Examine la FFT de la velocidad angular. ¿Cuántos picos hay?

Parte IV: Oscilaciones caóticas

1. Continúe aumentando gradualmente la frecuencia de conducción hasta la frecuencia de resonancia aumentando la tensión en la fuente de alimentación. Para hacer el movimiento del péndulo muy complicado, puede que tenga que ajustar la distancia del imán del disco. El péndulo debe detenerse repentinamente en varios puntos de su movimiento y pasar momentos aleatorios en cada lado de la oscilación. Vuelva a arrancar la oscilación, manteniendo el extremo de la masa puntual en la parte superior y El brazo del conductor está en su punto más bajo.

Tome nota del espaciamiento del imán y del voltaje del conductor. Registre los datos durante una hora.4. Examine la gráfica de la velocidad angular vs. Tiempo. ¿Es sinusoidal? ¿Cuál es el período? ¿Es el período igual al período de conducción? Examine el gráfico de la velocidad angular vs. Ángulo (el diagrama de fases). ¿Por qué se ve como lo hace? Examine el mapa de Poincaré. ¿Por qué se ve como lo hace? ¿Cómo esta trama indica que esta oscilación es caótica?

Examinar la FFT de la velocidad angular. ¿Cómo es diferente de la no-caótica FFT? Estudios adicionales La frecuencia de conducción se varió para cambiar la oscilación de regular a caótico. Trate de ajustar el amortiguamiento magnético mientras mantiene la frecuencia de conducción en la frecuencia que dio el caos antes. A continuación, intente mantener constante la amortiguación y la frecuencia de conducción mientras se modifica la amplitud de conducción. Compruebe el efecto de la posición inicial sobre las oscilaciones.

2.6.3 Marco Contextual legal

Las normas académicas son el documento legal de sustento donde encontramos la necesidad de impulsar la innovación del docente en el aula de clases, la incorporación de nuevas tecnologías de información, de gestionar una educación de calidad y de un curriculum innovador.

Artículo 8. La educación superior en la UNAH se caracteriza por: la calidad, equidad, pertinencia, competitividad, flexibilidad, formación y educación permanente y continua, innovación constante, la creatividad ligada al desarrollo de la ciencia, el arte y la cultura; teniendo en cuenta los retos globales actuales y futuros, las Tecnologías de Información y Comunicación, la internacionalización y el contexto sociocultural de país para contribuir a la transformación productiva y social de la nación y su inserción en el contexto internacional.

Artículo 39. La reforma integral de la UNAH articula docencia, la investigación y la vinculación universidad-sociedad; prioriza la gestión académica, la gestión del conocimiento, la gestión cultural bajo estándares de calidad nacional e internacional. Esta política se reflejara en las actividades del proceso de aprendizaje que se realice en el escenario universitario bajo una visión disciplinaria, multidisciplinaria, interdisciplinaria y transdisciplinaria.

Artículo 42. La Multimodalidad deberá asumirse como educación presencia!, a distancia en sus diferentes expresiones b-learning, virtual, etc., todas centradas en el aprendizaje y mediadas por las Tecnologías de Información y Comunicación (TICs) y las Tecnologías de Aprendizaje Colaborativo y Conocimiento (TAC 's), promoviendo el desarrollo de la

ciencia, la cultura y la tecnología para el bien común; incorporando en los sujetos del proceso educativo, valores, principios, conocimientos, prácticas científicas y sociales pertinentes; potenciando la capacidad de crear, analizar y criticar científicamente en la perspectiva de contribuir a generar respuestas a los principales problemas del país y de la región centroamericana. Las diversas modalidades para operacionalizar el Modelo Educativo no necesariamente son formas excluyentes, sino que se propenden a su articulación en el proceso de enseñanza con el objetivo de alcanzar los mejores niveles de aprendizaje en las distintas carreras y programas.

El modelo educativo define los ejes integradores a desarrollarse transversalmente, en toda la oferta educativa de la UNAH.

Artículo 104. El currículo se caracteriza por ser: 1. Abierto e innovador: permite la incorporación de nuevos temas de reflexión, problemas, contenidos, enfoques y tendencias. 2. Flexible: en su estructura, organización y gestión.

- Mejor comprensión de la mecánica no lineal utilizando el péndulo caótico como medio didáctico.
- Aplicar la mecánica no lineal en situaciones prácticas.

Evaluación:

- Prueba diagnóstica utilizando socrative, durante el proceso y después de la retroalimentación.

Propuesta de intervención pedagógica.

- Videos.
- Las estadísticas de cada sección entorno a las prueba
-

2.6.4 Comparación del Péndulo caótico PASCO con los péndulos comerciales

El caos es un aspecto importante y fundamental de la física no lineal contemporánea. Mientras que la simulación numérica del caos es económico y relativamente sencillo, es difícil y lleva mucho tiempo construir aparatos físicos que en realidad demuestra el caos cuantitativamente. Por lo tanto, la mayoría de las instituciones deben recurrir a equipos

disponibles comercialmente. Sin embargo, estos dispositivos son bastante costosos para las universidades. compra y, además, descripciones de catálogo, por naturaleza, tienden a enfatizar las características más fuertes en un diseño dado resaltar aspectos visualmente agradables en las ilustraciones.

Como consecuencia, quedan muchas preguntas. ¿Qué física modela realmente el dispositivo? ¿que bien modela ¿los físicos? ¿Es fácil de usar? ¿Es resistente? ¿Pueden los estudiantes hacer una serie significativa de ejercicios de laboratorio con el péndulo? ¿Para qué nivel es adecuado un dispositivo en particular? Estos son algunas de las cuestiones que planteamos en este trabajo.

Hemos probado en banco tres péndulos caóticos producidos comercialmente e informamos los resultados como un servicio a la física de educadores Aunque similares en sus propósitos como experimentales plataformas de caos, cada una se basa en un paradigma ligeramente diferente y, en consecuencia, cada una presenta una ventana al mundo caótico. Fortalezas y debilidades de

los enfoques de diseño se revisan aquí.

Dado que estas unidades son moderadamente caros, es importante elegir con cuidado el péndulo que mejor se adapte a las necesidades educativas y posibles de investigación individuales.

Existen cuatro péndulos caóticos producidos comercialmente
Daedalon Corp.,¹ Leybold,² Pasco Scientific,³ y TELAtomic, Inc.⁴

Existen varios péndulos y otros dispositivos caóticos cuyos diseños han aparecido en la literatura pero que son no disponible comercialmente. La reciente carta de recursos de AJP sobre dinámica no lineal da referencias a toda una variedad de dispositivos caóticos, muchos de los cuales han estado en esta revista. Sin embargo, se existen universidades que desean obtener el equipo ya que está dirigido a aquellos que pueden no tener ni el tiempo ni las instalaciones para construir el tipo de equipo descrito en la literatura y, por lo tanto, están interesados en hacer una compra informada de un péndulo.

En su mayor parte tratamos cada péndulo por separado, con enfoque primero en la física fundamental, luego en el hardware aspectos del diseño general, y finalmente en software y

resultados experimentales típicos. Cabe señalar que todos los sistemas cuentan con algún tipo de interfaz de computadora directa para la adquisición de datos. Todos tienen controles ajustables que permitir al usuario "encontrar" interactivamente varios movimientos. Todos los péndulos son capaces de movimiento caótico y no caótico. Como se probó, cada uno costó más de \$ 1500.

Cada paquete comercial es capaz de mostrarse en una pantalla de computadora varios gráficos que caracterizan el comportamiento caótico. En esta sección describimos los tipos de pantallas que son posibles con uno o más de los péndulos. Más lejos la información se puede encontrar en fuentes a las que se hace referencia en la carta de recursos o en textos introductorios. Ejemplos de estas las pantallas se encuentran en las figuras asociadas con la discusión de cada aparato.

¡Caos de un sistema de ecuaciones diferenciales de flujo! requiere la presencia de tres variables dinámicas; es decir, tres cantidades que son funciones del tiempo. Para el péndulo, estas cantidades son el desplazamiento angular del péndulo u , la velocidad angular du/dt y la fase del forzamiento sinusoidal vt . Los dos primeros, u y du/dt , a menudo se representan individualmente como funciones de tiempo separadas.

Sin embargo, cuando no es conveniente obtener un Poincaré sección, un mapa de retorno puede proporcionar información útil sobre el movimiento. La aplicación habitual de los mapas de retorno se produce cuando el sistema no tiene una periodicidad incorporada obvia. Se producen diferentes combinaciones de series de tiempo, diagramas de plano de fase, secciones de Poincaré y mapas de retorno en pantallas de ordenador por los diversos péndulos comerciales.

EL PÉNDULO DAEDALON

Este dispositivo es una realización experimental de un simple péndulo amortiguado accionado con par aplicado de onda sinusoidal. Su la ecuación de movimiento es:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + mgR \sin \theta = A \sin(\omega t)$$

Donde I es el momento de inercia de todos los componentes giratorios, b es el parámetro de fricción, m es la masa de la lenteja, g es la aceleración de la gravedad, R es la longitud del péndulo, A es la amplitud del par impulsor y v es su frecuencia.

B ferretería

El sistema Daedalon se compone de tres hardware componentes: el propio péndulo, una unidad de control y una tarjeta de PC personalizada.

El péndulo Daedalon se originó como una herramienta de investigación y se puede utilizar para estudios de caos avanzados. por ejemplo, fue empleado por varios investigadores para estudiar el control mecanismos para el péndulo caótico.

El sistema es compacto y resistente, muy adecuado para uso individual en lugar de demostración en sala de conferencias. Él configuración del péndulo físico, tarjeta de computadora y software es bastante sencillo. Al momento de escribir esto, el precio es de \$2000.

EL PÉNDULO DE PASCO

Principios físicos

Se muestran los elementos esenciales en el diseño de Pasco. Un disco de metal de radio R es libre de girar en una vertical plano sobre cojinetes de baja fricción. En el mismo eje hay un coaxial. polea de radio r . Una cuerda enrollada en la polea está unida a cada lado a resortes lineales, uno de los cuales se fija luego a un punto de anclaje mientras que el otro está conectado a una unidad de accionamiento que puede mover ese extremo del resorte hacia adelante y hacia atrás en un moda armónica. Una masa m está unida al disco grande en un punto que está directamente encima del punto de suspensión bajo el condición de desplazamiento cero del extremo libre del resorte izquierdo. Claramente, este punto invertido no es uno de equilibrio y la masa girará hacia la izquierda o hacia la derecha.

La ecuación de movimiento para este sistema es: (James A, 1998)

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} - mgR \sin \theta + 2kr^2\theta = krA \sin(\omega t)$$

Donde I es el momento de inercia total de todos los componentes giratorios, b es una constante de amortiguamiento dependiente de la velocidad, m es la masa añadida, y k es la constante de resorte. A y v son los amplitud y frecuencia del desplazamiento aplicado a la resorte izquierdo. El ángulo θ se mide desde el montante posición vertical.

Como ya se ha señalado, en contraste con el simple péndulo es que tiene una sola posición vertical de equilibrio estable hacia abajo, este sistema tiene dos posiciones estables de equilibrio a cada lado de la vertical, siempre que el agregado la masa es suficiente. Para una masa pequeña, hay un solo punto de equilibrio en la posición vertical hacia arriba el efecto es similar a la de un oscilador de doble pozo. Modos posibles involucran oscilaciones dentro del pozo izquierdo o derecho, transiciones de pozo a pozo. Sin embargo, la configuración de los resortes adjuntos evitan que la masa del péndulo realice una revolución completa y, por lo tanto, el sistema no exhibe los modos cuasi-rotatorios de un péndulo cuya fuerza restauradora sólo es proporcionada por la gravedad.

Este diseño y la ecuación gobernante guardan una gran semejanza con un péndulo descrito por Beckert en el que es una combinación de un péndulo de torsión y simple péndulo.

El sistema está interconectado de la siguiente manera. Un cable de la el sensor de movimiento giratorio está conectado en la parte frontal de la interfaz caja. La PC anfitriona debe tener una tarjeta SCSI instalada. un SCSI Luego, el cable conecta la tarjeta a la parte posterior de la caja de interfaz. La velocidad angular es calculada por el software.

El péndulo de Pasco parece estar bien construido y ser robusto. Eso Es importante mantener la cuerda bien enrollada alrededor del polea para que no se deslice. Uno puede lograr esto por

enhebrar un bucle de la línea en un pequeño agujero existente en el borde de la polea y asegúrelo con un alambre transversal. Los archivos de datos pueden tienen longitudes que superan los 25 000 puntos dependiendo de la configuración utilizada. En el modo de alta resolución, el ángulo los datos tienen una precisión de aproximadamente 60,25 grados.

La interfaz de la computadora requiere que el usuario tenga un SCSI tarjeta de interfaz instalada en la PC. Esto contrasta con el Aparato Tel-Atomic, que utiliza un puerto serie, y el Aparato Daedalon, que utiliza una interfaz personalizada suministrada.

La caja de interfaz proporciona un conector SCSI de estilo antiguo. y cabe señalar que muchas tarjetas SCSI utilizan un nuevo enchufe conector de alta densidad.

Los gráficos de la pantalla son buenos y los datos pueden mostrarse en formato tabular o transferirse a una hoja de cálculo para análisis. Se dan escalas para los ejes de todas las figuras. Sin embargo, el posicionamiento de la escala de desplazamiento angular parece depender de la posición del dispositivo en el momento en que se inicia.

La configuración del equipo y el software es bastante sencilla, excepto por conocer pequeños trucos como cómo mantener la cuerda apretada alrededor de la polea. Finalmente, aparte de la guía no había otro manual, por lo que la configuración depende del ingenio nativo del instructor.

El sistema completo de Pasco cubre muchos otros experimentos que, sin embargo, comparten varios componentes comunes, incluida la caja de interfaz. El sistema ha sido diseñado para ser compatible con Windows y Mac. Por lo tanto, muchas de las piezas requeridas para este experimento de caos pueden, si se desea, servir en otras aplicaciones dentro del repertorio de Pasco. Algunos elementos, como el de baja tensión

Es posible que la fuente de alimentación ya esté en el estante del usuario. Sin embargo, el costo de todas las partes necesarias para hacer los experimentos es alrededor de \$ 1600.

Teniendo en cuenta la revisión del fabricante:, añadimos las siguientes observaciones. Nuestras pruebas fueron hecho utilizando la caja de interfaz "700" que se nos proporcionó. El fabricante señala que los experimentos de caos también se pueden realizar con un "500" más económico interfaz utilizando el puerto serie, obviando así la necesidad de un tarjeta SCSI. Sin embargo, la interfaz 500 tiene sólo dos digitales entradas según sea necesario para un solo sensor giratorio. Usamos un extra conjunto de puertos en el 700 para medir la frecuencia del controlador así como. Por lo tanto, el uso de la caja 500 requeriría encontrar otra forma de medir la frecuencia del controlador. sin embargo, el el ahorro es considerable ya que la interfaz 500 cuesta alrededor de \$400 menos que la caja de interfaz 700.

EL PÉNDULO TEL-ATÓMICO

A. Principios físicos

Una fotografía del péndulo atómico TEL se muestra en Fig. 11. La ecuación de movimiento de este péndulo es similar a la del péndulo Daedalon excepto que el forzamiento es proporcionada por una onda cuadrada en lugar de un par sinusoidal.

La ecuación apropiada es:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + mgR \sin \theta = \tau_{\pm}(t)$$

Donde los parámetros tienen los significados usuales y $\tau_{\pm}(t)$ se refiere a la unidad de onda cuadrada. En este caso, m es la masa total y R es un radio efectivo que incluye el posicionamiento del bob y el brazo del péndulo. No sabemos de ningún publicado simulaciones de péndulos que son impulsados por onda cuadrada por lo que este diseño es inusual en ese sentido. Sin embargo, el movimiento es similar a un impulso de onda sinusoidal, en parte porque, como como se indica a continuación, los motores de inducción no tienen constante par y, por lo tanto, es poco probable que la transmisión sea perfecta. ola cuadrada. En consecuencia, las diversas cifras producidas por este dispositivo son similares a los que se encuentran para un sinusoidalmente sistema impulsado.

Estos péndulos son todos dispositivos complejos. se acercan la tarea experimental de explorar la dinámica caótica en maneras únicas y diferentes. Presentamos un resumen de sus puntos sobresalientes en la. La elección final de un particular aparato debe depender de una serie de factores, incluyendo uso proyectado, precio y nivel de estudiantes.

Tipo	Péndulo Daedalon	PASCO(Pozo doble oscilador)	Péndulo TEL-atómico
Excitación	Sinusoidal	Sinusoidal	Onda Cuadrada
Configuración	Algo de esfuerzo	Algo de esfuerzo	Simple
Construcción	Precisión	Muy bueno	Bueno
Tamaño Físico	Compacto	Medio	Medio
Manual suministrado	Si	Se puede comprar	Sí
Exp. Descripciones	5 exps	10 actividades	Sugerencias
Frecuencia forzada adj	Si	Si	Si
Amplificación Forzada	Si	Si	Si
Amplificación Forzada	Si	Si	Si
Ajuste de amortiguación	Si	Si	Indirectamente a través de I
Calibrar	Si	Con modificaciones	Hasta cierto punto
Medida cuantitativa	Si	Posible	Mayormente cualitativo
Visualización de series temporales	Con Software de usuario	Si	Si
Plano de fase	Si	Si	Si
Sección de Poincaré	Si	No	No
Mapa de retorno	Con Software de usuario	Con Software de usuario	Si
Datos adquiridos	Ángulo	Ángulo	Velocidad angular
Método de adquisición	Codificador óptico	Codificador óptico	Sensor SDC
Archivos de datos	Si	Si	No
N°. de puntos en archivo de datos	5000	Mayor de 25000	NA
Intervalo de tiempo de muestra	7 ms	Óptimo a 50 ms	20 ms
Interfaz a través de tarjeta suministrada	Tarjeta suministrada	Necesita tarjeta SCSI	Puerto serial
Software	Dedicado DOS	Multipropósito, Windows ó Mac	Dedicado DOS
Partes	Todo Dedicado	Multipropósito.	Interface SDC es multiproposito
Precio	\$ 2000	Alrededor de \$1600	\$1605

Tabla 2.6.4.1: Comparación del equipo de Péndulos caóticos comerciales

CAPÍTULO III: ENFOQUE Y TIPO DE INVESTIGACIÓN

3.1 Enfoque de Investigación

Al fin de dar a conocer los resultados obtenidos, se tiene como resultado la creación de un laboratorio de mecánica no lineal teniendo como medio didáctico el péndulo caótico. El tipo de investigación es cuantitativa y tiene también características cualitativas que adquiere el estudiante.

3.2 Tipo de Investigación

Es una investigación cuantitativa experimental, en la cual analizamos la experiencia del estudiante en contacto con el equipo del péndulo caótico.

1. Describir cómo se aplicó la propuesta pedagógica:

Actividades principales:

- 1) Dos días previo a la ejecución del contenido en clase, se aplicará una prueba diagnóstica (Prueba Previa).
- 2) Se dejará bajo estudio individual e independiente la información sobre la mecánica no lineal en la plataforma (video elaborado por el equipo de trabajo más lecturas)
- 3) El día destinado para ver el tema se implementará grupos y se tendrá a discusión la información de mecánica no lineal en la plataforma. El instructor participará como auxiliar o apoyo al desarrollo de la comprensión de los estudiantes.
- 4) Al finalizar la sesión, se evaluará con los cuestionarios prácticos y Teóricos (Evaluación Posterior)

5) Por último cada estudiante deberá preparar una breve exposición de conceptos básicos luego deben de subir al pizarrón electrónico en línea los resultados más importantes sobre la mecánica no lineal utilizando al péndulo caótico como medio didáctico, es decir agregar su informe de resultados.

CAPÍTULO IV: HIPOTESIS Y VARIABLES

4.1 Hipótesis

La metodología del aprendizaje invertido es útil para los estudiantes de mecánica clásica para aumentar su rendimiento académico y por tanto adquirir las competencias adecuadas utilizando el péndulo caótico como medio didáctico.

El buen manejo y aplicación de los entornos virtuales (animaciones) por parte del docente en la escuela de Física influye de manera positiva en la adquisición de conocimientos, habilidades y competencias de los estudiantes de Física, lo que se reflejaría en un alto rendimiento académico en la clase de Mecánica no lineal.

4.2 Variables

Variables independientes

Metodología: Aprendizaje invertido

Variables dependientes

Rendimiento académico.

Competencias adquiridas.

OBJETIVO GENERAL DEL ESTUDIO	VARIABLES DEPENDIENTES	Definición Conceptual	Definición Operacional	Indicadores	Ítems
<p>Identificar los factores que influyen en la mejora del rendimiento académico utilizando el aprendizaje invertido en la enseñanza del tema de mecánica no lineal y como medio didáctico el péndulo caótico que ayude a los estudiantes la comprensión, motivación y visualización de la aplicabilidad del tópico en la vida real.</p>	<p>BUEN RENDIMIENTO ACADEMICO.</p>	<p>Es el desempeño que tiene el estudiante en el transcurso de la clase</p>	<p>Es la obtención de la aprobación de la clase</p>	<p>Datos generales</p> <p>Condiciones de estudio.</p> <p>Tiempo</p>	<p>1. Sexo</p> <p>2. Edad</p> <p>1. Tiene trabajo Lugar donde estudia.</p> <p>1. Número de clases matriculadas</p> <p>2. Número de laboratorios matriculados</p> <p>3. Horas de estudio Concentración al estudiar</p>

Tabla 4.4.2: Operacionalización de variables

OBJETIVO GENERAL DEL ESTUDIO	VARIABLES	Definición Conceptual	Definición Operacional	Indicadores	Ítems
<p>Identificar los factores que influyen en la mejora del rendimiento académico utilizando el aprendizaje invertido en la enseñanza del tema de mecánica no lineal y como medio didáctico el péndulo caótico que ayude a los estudiantes la comprensión, motivación y visualización de la aplicabilidad del tópico en la vida real.</p>	<p>COMPETENCIAS ADQUIRIDAS</p>	<p>Son los conocimientos, habilidades y destrezas que desarrolla una persona para comprender, transformar y practicar en el mundo en el que se desenvuelve.</p>	<p>Aprobación de la clase.</p>	<p>Apreciación personal</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Acerca de enseñanza del profesor 2. Acerca de enseñanza del instructor 3. Acerca del libro de texto 4. Acerca del laboratorio 5. Acerca del aula de clase 6. Acerca del uso de recursos multimedia 7. Acerca motivo de repitencia de la clase
				<p>Método de estudio</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Uso de técnicas de estudio 2. Comprensión del tema 3. Sigue pasos de resolución de problemas

Tabla 4.4.3: Operacionalización de variables

CAPÍTULO V: ESTRATEGIA METODOLÓGICA:

5.1 Diseño de la Investigación

Propone programas de gestión, innovación, nuevos modelos. -- Propone innovaciones tecnológicas o de gestión.

Péndulo de Pasco comercial utilizado en Ciudad Universitaria UNAH por estudiantes de la carrera de Física para el análisis de la mecánica No línea.

5.2 Población y Muestra

La muestra de estudiantes según el plan de estudios de la carrera de Física es del sexto periodo académico, es decir estudiantes de 3er año.

PRIMER PERÍODO				SEXTO PERÍODO				Asignaturas Optativas por Orientación			
Código	Asignatura	UV	Requisito	Código	Asignatura	UV	Requisito	Código	Asignatura	UV	Requisito
EG-011	Español	4	Ninguno	FS-382	Mecánica II	4	FS-381	Orientación Geofísica			
MM-110	Matemática I	5	Ninguno	FS-351	Met. Físico-Matemático	4	MM-411, FS-200	FS-626	Geofísica I	5	FS-472, FS-451
MM-111	Geometría y Trigonometría	5	Ninguno	FS-371	Física Moderna	4	FS-381, MM-411	FS-627	Geofísica II	5	FS-626
IN-101	Inglés I	3	Ninguno	FS-415	Elect. y Magnetismo II	5	FS-321	Orientación Metalurgia			
BI-130	Educación Ambiental	3	Ninguno	HI-101	Hist. de Honduras	4	Ninguno	Código	Asignatura	UV	Requisito
SEGUNDO PERÍODO				SEPTIMO PERÍODO				Orientación Radiaciones			
Código	Asignatura	UV	Requisito	Código	Asignatura	UV	Requisito	Código	Asignatura	UV	Requisito
MM-201	Cálculo I.	5	MM-110, MM-111	FS-481	Term. y Mec. Est. I	4	MM-411, FS-351	FS-636	Física de Metales I	5	FS-472, FS-451
MM-211	Vectores y Matrices	3	MM-110, MM-111	FS-472	Mecánica Cuántica I	4	FS-351, FS-371	FS-637	Física de Metales II	5	FS-636
QQ-100	Química Fundamental	4	MM-110, MM-111	FS-492	Lab. Avanzado I	4	FS-371, FS-321	Orientación Física Teórica			
IN-102	Inglés II	3	IN-101	FS-425	Óptica	4	FS-415	Código	Asignatura	UV	Requisito
Variable Camp.	Humanidades	3	Ninguno	Variable Cult. Física y Deportes		3	Ninguno	FS-646	Física de Radiaciones I	5	FS-472, FS-451
TERCER PERÍODO				OCTAVO PERÍODO				Orientación Astrofísica			
Código	Asignatura	UV	Requisito	Código	Asignatura	UV	Requisito	Código	Asignatura	UV	Requisito
FF-101	Filosofía	4	Ninguno	FS-482	Term. y Mec. Est. II	4	FS-481, FS-472	FS-620	Astronomía Clásica y Mecánica Celeste	5	FS-472, FS-451
MM-314	Programación	3	MM-211	FS-473	Mec. Cuant. II	4	FS-472	FS-621	Introducción a la Astrofísica	5	FS-620
MM-202	Cálculo II	5	MM-201	FS-611	Elem. de Fís. Nuclear	4	FS-472	Orientación Energía			
IN-103	Inglés III	3	IN-102	FS-601	Proc. de Señ. y Com. Optativa I	5	FS-425, FS-351	Código	Asignatura	UV	Requisito
FS-100	Física I	5	MM-201					FS-622	Energías Renovables	5	FS-472, FS-451
CUARTO PERÍODO				NOVENO PERÍODO				Orientación Astrofísica			
Código	Asignatura	UV	Requisito	Código	Asignatura	UV	Requisito	Código	Asignatura	UV	Requisito
FF-201	Lógica	3	FF-101	FS-517	Fis. del Est. Sólido	4	FS-351, FS-482	FS-624	Energía Solar	5	FS-622
MM-411	Ecuaciones Diferenciales	3	MM-202	FS-493	Lab. Avanzado II	4	FS-492	PLAN DE ESTUDIOS			
MM-408	Cálculo III	5	MM-202	FS-383	Mec. del Med. Continuo Optativa II	4	FS-382	CARRERA EN FÍSICA			
FS-200	Física II	5	FS-100, MM-202					UNAH			
MM-502	Variable Compleja	3	MM-202					www.unah.edu.hn			
QUINTO PERÍODO				DECIMO PERÍODO							
Código	Asignatura	UV	Requisito	Código	Asignatura	UV	Requisito				
FS-381	Mecánica I	4	FS-200, MM-411	FS-700	Seminario de Investigación	10	FS-611, FS-517				
FS-321	Elect. y Magnetismo I	5	FS-200, MM-411								
MM-412	Análisis Numérico	3	MM-411, MM-314								
MM-401	Estadística	3	MM-201								
SC-101	Sociología	4	Ninguno								

Fig. 5.2.1 Plan de estudios de la carrera de Física

Participantes:

Los estudiantes con los que se trabajó:

1) Estudiantes de la carrera de Física II PAC 2017

Estudiantes de Mecánica Clásica II sección **FS382 sección: 1100**

**Estudiantes de FS382 sección:
1100**

5 estudiantes de Física

Tabla 5.2.1: Estudiantes II PAC 2017

2) Estudiantes de la carrera de Física II PAC 2018

Estudiantes de Mecánica Clásica II sección **FS382 sección: 1100**

Estudiantes de FS382 sección: 1100

6 estudiantes de Física

Tabla 5.2.2: Estudiantes II PAC 2018

3) Estudiantes de la carrera de Física III PAC 2018

Estudiantes de Mecánica Clásica II sección **FS382 sección: 1100**

Estudiantes de FS382 sección: 1100

9 estudiantes de Física

Tabla 5.2.3: Estudiantes III PAC 2018

5.3 Recolección de Datos

Entrega de informes de laboratorio, con los resultados obtenidos en pizarrón electrónico. El cuál se ve reflejado en la revisión y calificación por parte del instructor.

Además de un encuesta al finalizar el proceso para entender la aceptabilidad de la metodología de aprendizaje utilizada.

5.3.1 Instrumento de Investigación

Aplicación de Encuesta a la muestra total de estudiantes (20 estudiantes en tres PAC consecutivos). En base a la encuesta realizada se tiene una muy buena aceptación del laboratorio. Considerando que se tiene que integrar el desarrollo matemático y el uso de software o programas computacionales para su solución.

5.3.2 Guía de laboratorio aplicada

Ver anexo 1 guía de laboratorio.

5.3.2 Validez y Confiabilidad del Instrumento

El instrumento utilizado fue una encuesta:

COMBINANDO “LABORATORIO PÉNDULO CAÓTICO” Y “AULA INVERTIDA” EN EL APRENDIZAJE DE MECÁNICA NO LINEAL: CAOS

1 - INFORMACIÓN GENERAL

Toda la información en estas encuestas es confidencial. Su único objetivo es una mayor comprensión de sus conocimientos con el fin de analizar si existe correlación con los resultados del laboratorio.

En caso de tener alguna pregunta, por favor no dude en ponerse en contacto con Ing. Karen Elena López Palacios – karen.lopez@unah.edu.hn

1. Nombre y Apellido:
2. Año de nacimiento:
3. País de nacimiento:
4. ¿En qué mes y año espera graduarse?

Mes:

Año:

5. ¿Cuál es su situación laboral actual?

- A) Empleado/a full-time
- B) Empleado/a part-time
- C) No empleado/a

2 - METODOLOGIA TRADICIONAL

1) ¿Qué tan efectiva es la metodología de enseñanza en los cursos que usted toma en esta universidad?

- A) Extremadamente efectiva
- B) Muy efectiva
- C) Moderadamente efectiva
- D) Un poco efectiva
- E) Nada efectiva

2) ¿Las clases que usted toma cumplen con las necesidades de aprendizaje?

- A) Extremadamente bien
- B) Muy bien
- C) Moderadamente bien
- D) Un poco bien
- E) Nada bien

3) ¿Cómo prefiere estudiar?

- A) Solo
- B) Con otro estudiante
- C) En grupo

4) ¿Qué tan útil es el material didáctico que recibe de los profesores y ayudantes de cátedra?

- A) Extremadamente útil
- B) Muy útil
- C) Moderadamente útil
- D) Un poco útil

E) Inútil

5) ¿Qué tan fácil le resulta integrar todos los conceptos que aprende en cada curso?

A) Extremadamente fácil

B) Muy fácil

C) Moderadamente fácil

D) Un poco fácil

E) No es nada fácil

6) En qué medida está usted de acuerdo con la siguiente afirmación: “Estoy satisfecho con la metodología de aprendizaje que se utiliza en los cursos de esta universidad”

A) Completamente de acuerdo

B) De acuerdo

C) Ni de acuerdo ni en desacuerdo

D) Desacuerdo

E) Completamente en desacuerdo.

3 – METODOLOGIA DE AULA INVERTIDA

Método tradicional de educación: el modelo tradicional de la enseñanza ha sido diseñado de tal forma que a los estudiantes se les ha asignado leer libros de texto y realizar problemas fuera de clase. En clase, por el contrario, la escucha de clases y la realización de exámenes.

Metodología de Aula Invertida: con este nuevo método, los alumnos estudian los conceptos por sí mismos, usando normalmente vídeos educativos y presentaciones que han sido previamente preparados por sus docentes o terceras personas. En clase, en cambio, el plan es dedicar el tiempo para discusión, resolución de dudas y tareas más creativas que requieran la presencia y el asesoramiento del profesor.

1) ¿Cuál es su primera opinión con la idea de tiempos usando la Metodología de Aula Invertida (Laboratorio péndulo) en comparación con la metodología tradicional (Sin laboratorio)?

A) Muy positiva

B) Algo positiva

C) Neutral

- D) Algo negativa
- E) Muy negativa

2) ¿Cuán diferente es la Metodología de Aula Invertida?

- A) Extremadamente diferente
- B) Muy diferente
- C) Algo diferente
- D) No es tan diferente
- E) En absoluto diferente

3) ¿Cuántos cursos ha tomado bajo la Metodología de Aula Invertida en los últimos 3 (tres) años en la Universidad?

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3
- E) 4 o más

4 – LABORATORIO PÉNDULO CAÓTICO-SOFTWARE

1) ¿Cuan bueno es tu nivel de comprensión de textos en inglés?

- A) Excelente
- B) Muy bueno
- C) Bueno
- D) Regular
- E) Pobre

2) En qué medida está usted de acuerdo con la siguiente afirmación: “Un software puede ser una herramienta útil para entender conceptos nuevos aprendidos en clase?”

- A) Completamente de acuerdo
- B) De acuerdo
- C) Ni acuerdo ni en desacuerdo
- D) Desacuerdo
- E) Completamente en desacuerdo

3) En qué medida está usted de acuerdo con la siguiente afirmación: “Usualmente, me es fácil entender cómo usar un nuevo software”

- A) Completamente de acuerdo
- B) De acuerdo
- C) Ni acuerdo ni en desacuerdo
- D) Desacuerdo
- E) Completamente en desacuerdo

4) ¿Qué tan fácil puede desenvolverse solo cuando trabaja con su computadora?

- A) Extremadamente fácil
- B) Muy fácil
- C) Moderadamente fácil
- D) Un poco fácil
- E) No es nada fácil

5) Por favor, ordene las palabras de abajo en orden de importancia, con un 1 a la palabra que más valora en un proyecto, 2 a la siguiente y 3 a la última de las tres

- A) Ganancia
- B) Calidad
- C) Tiempo

6) ¿Cuánto tiempo ha trabajado en la realización de laboratorios?

- A) Más de 1 año
- B) Más de 6 meses, menos de 1 año
- C) Menos de 6 meses
- D) Nunca

7) ¿Cuánto tiempo ha utilizado un software de equipo de laboratorio?

- A) Más de 1 año
- B) Más de 6 meses, menos de 1 año
- C) Menos de 6 meses
- D) Nunca

CAPÍTULO VI: PLAN DE ANÁLISIS

Se aplicó el proyecto a los estudiantes de la sección de Mecánica Clásica II (Fs382): **1100 II PAC-2017, II PAC 2018 y III PAC 2018**. En esta sección se realizó las actividades principales siguientes:

1. Tres días previos a la ejecución del contenido en clase, se aplicó una prueba diagnóstica (Prueba Previa).
2. A la clase se le instó a que resolviera una Guía de laboratorio que consta de un cuestionario elaborado con preguntas relacionadas con el Péndulo Caótico (Práctica y Teóricas), Mecánica no lineal la cual se visualizó el grado desempeño obtenido en tiempo real durante la hora de clase. Este desempeño fue visualizado tanto por el Instructor como por los estudiantes.
3. Se dejó bajo estudio individual e independiente, la información sobre el Péndulo Caótico utilizando el aula virtual en la plataforma Moodle, al cual los estudiantes ingresaron a través del campus virtual de la UNAH, en el cual se incluyó videos elaborados por el equipo de trabajo más lecturas complementarias sobre la temática a tratar. Para esto los estudiantes dispusieron de dos días. Además se creó un Pizarrón Electrónico donde se podían subir los resultados obtenidos por los estudiantes como evidencia del trabajo realizado.
4. El tercer día se destinó para ver el tema, para lo cual se organizaron grupos de trabajo para generar la discusión de la información del Péndulo Caótico que estaba disponible en la plataforma. El instructor del laboratorio participó como auxiliar o apoyo al desarrollo de la comprensión del tema en cada uno de los grupos.
5. Al finalizar la sesión, se aplicó una exposición individual de los resultados obtenidos considerando los siguientes ítems: Puntualidad, Fluidez de exposición, dominio de

CAPÍTULO VII: ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

4.1. Presentación de los resultados obtenidos

Aplicación de Encuesta a la muestra total de estudiantes (20 estudiantes en tres PAC consecutivos). En base a la encuesta realizada se tiene una muy buena aceptación del laboratorio. Considerando que se tiene que integrar el desarrollo matemático y el uso de software o programas computacionales para su solución.

De la encuesta se obtiene que el 100% de los estudiantes considera que está frase es válida: “Un software puede ser una herramienta útil para entender conceptos nuevos aprendidos en clase”

Es decir el software de PASCO en el caso de nuestro Laboratorio es muy importante para afianzar los conocimientos adquiridos.

4.2 Análisis de los datos (Considerando los objetivos específicos de la investigación), el marco teórico o la hipótesis

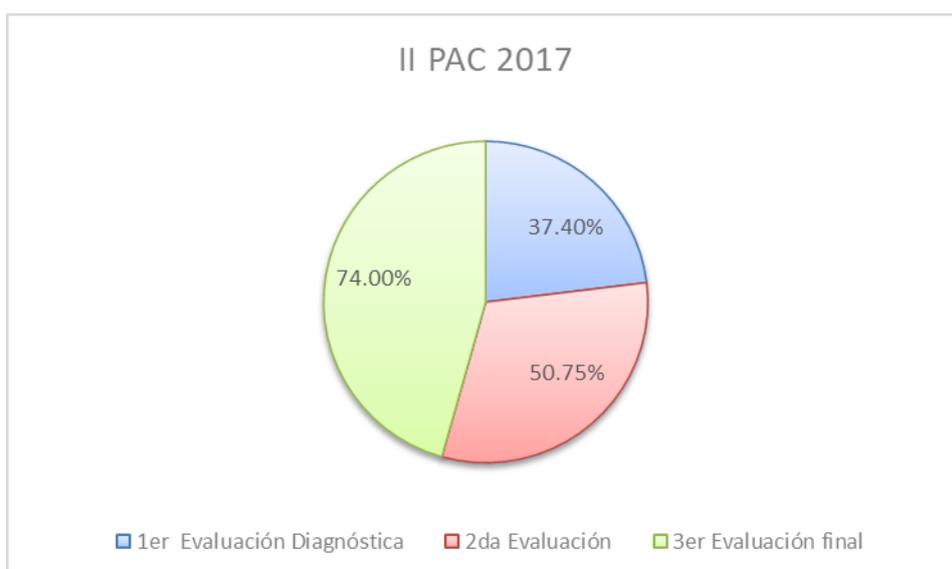


Figura 4.2.1 : Estadísticas II PAC 2017

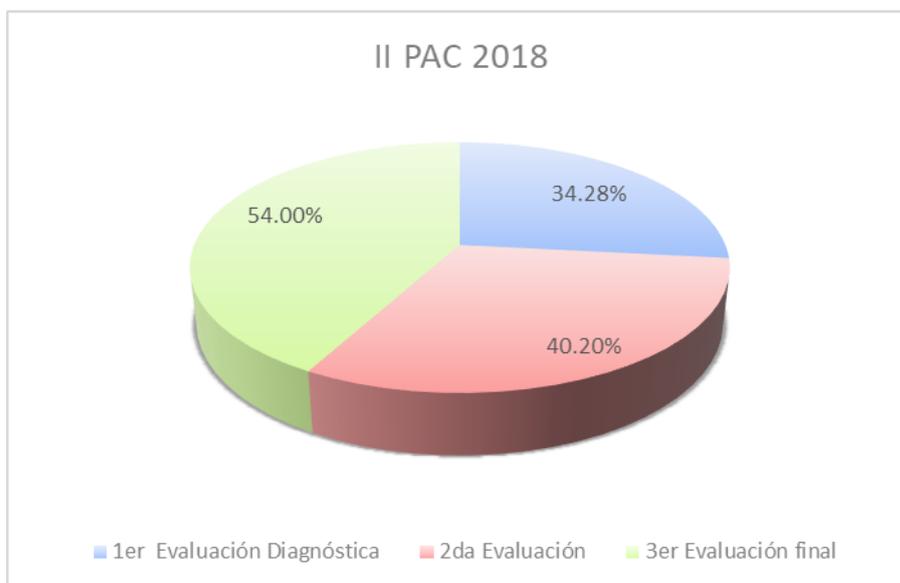


Figura 4.2.2 : Estadísticas II PAC 2018

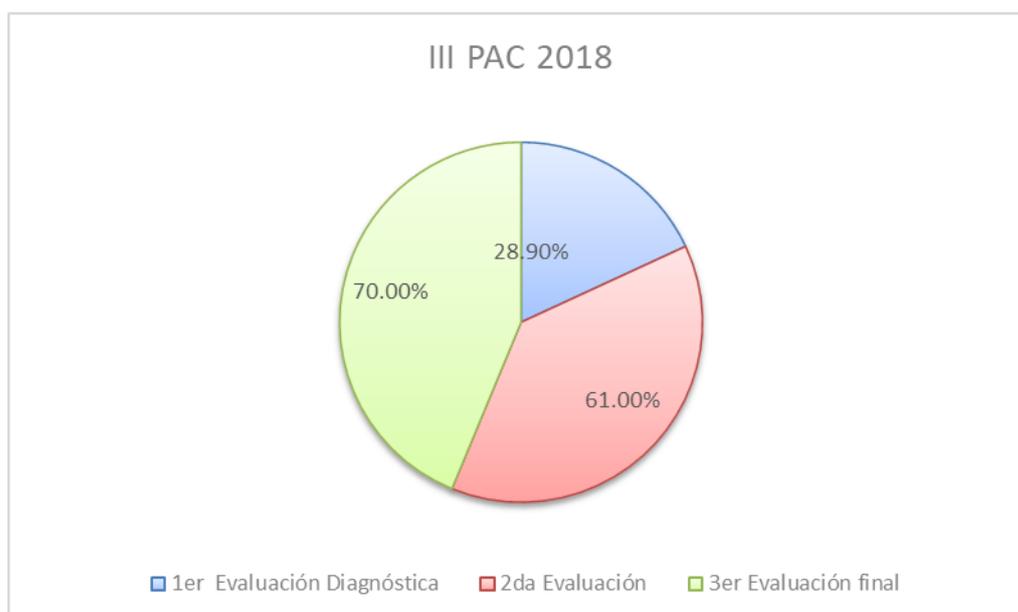
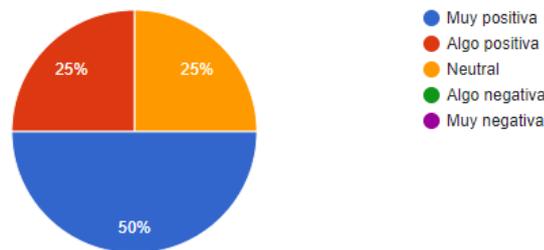


Figura 4.2.3 : Estadísticas III PAC 2018

Aplicación de Encuesta a la muestra total de estudiantes (20 estudiantes en tres PAC consecutivos)

3 – METODOLOGIA DE AULA INVERTIDA

3.1 ¿Cuál es su primera opinión con la idea de tiempos usando la Metodología de Aula Invertida (Laboratorio péndulo) en comparación con la metodología tradicional (Sin laboratorio)?



Figura

4.2.4 : Metodología aplicada al grupo de estudiantes

CONCLUSIONES

Con ayuda de esta metodología “El aprendizaje Invertido” se obtiene una comprensión óptima del tema, pero se identifica un factor relevante es decir se requiere de la inversión de más horas clase para su ejecución. Lo cual se ve reflejado en las estadísticas de los tres periodos consecutivos aplicando esta metodología (II PAC 2017, II PAC 2018 y III PAC 2018) en la clase de Mecánica clásica II para estudiantes de Física, se ve una nota promedio de aprobación del laboratorio de un 70% . Como logro tenemos la optimización en la administración del tiempo en la clase, a la vez se logra mayor interactividad y creatividad, consiguiendo con esto romper con el esquema tradicional del proceso enseñanza-aprendizaje.

Según la encuesta y análisis realizado el 50% de los estudiantes creen que esta metodología es muy efectiva para la comprensión de la Mecánica No lineal, y también tenemos un 25% que la considera medianamente efectiva en contraste con el otro 25 % que considera que es neutral es decir como recomendación este

laboratorio se puede impartir con la metodología que el instructor estime conveniente para su grupo.

La encuesta tiene un grado de confiabilidad de un 83.2% según el alfa de Cronbach.

- Estos sistemas dinámicos no lineales son sensibles a las condiciones iniciales, es decir, pequeñas diferencias en las condiciones iniciales pueden conducir a grandes diferencias en la evolución del sistema, lo cual limita en el tiempo su predecibilidad. A aquellos sistemas dinámicos no lineales que, además, presentan mezclado topológico en sus diagramas de fases los llamamos sistemas caóticos: Cabe recalcar que esta temática de CAOS sólo es abordada en este Laboratorio del Péndulo Caótico, por lo que el conocimiento previo de estos sistemas se evalúa en una prueba diagnóstica que refleja un promedio del 33% de conocimiento previo en el grupo. Por lo que se muestra en la guía los fundamentos teóricos indispensable para entender los sistemas caóticos y se sugiere utilizar Python para entender el atractor de Lorenz base teórica importante.
- Al comparar el equipo del péndulo Caótico PASCO con otros equipos comerciales se observa como ventaja el precio intermedio en base a los otros equipos y las ventajas que ofrece: Ya que sus partes son compatibles con otros equipos experimentales de Pasco, además un software compatible con Windows y Mac y compatible con PASCO. Con una obtención de datos mayor de 25000, y un diseño muy bueno con manual que presenta una serie de ejercicios guía, además que este equipo se puede utilizar en el análisis del péndulo simple y otros. Es decir es funcional para las clases de mecánica.

Considerando que este péndulo es un dispositivo complejo y que se acerca a la tarea experimental de explorar la dinámica caótica en maneras única y diferente.

Recomendaciones

- Siempre mantener un ambiente de trabajo ordenado con el equipo, y estar pendientes de los estudiantes, ya que un voltaje muy elevado podría causar daños en el montaje.
- Considerar para este equipo un lugar adecuado de almacenamiento y de funcionamiento, aislado de ciertas variables (viento) debido a la sensibilidad del mismo que pueden afectar el resultado.

GLOSARIO

Acoplamiento Es la forma de unir dos elementos de manera que sus respectivas formas o composiciones los mantengan juntos.

Determinista En matemáticas, un sistema determinista es aquel en el que el azar no interviene en el desarrollo de los estados futuros del sistema, los modelos deterministas producen la misma salida para unas condiciones dadas.

Dinámico Se refiere a la evolución con respecto al tiempo de un proceso físico. Aplicado a los sistemas, se dice que un sistema es dinámico cuando se trata con sistemas que involucran ciclos de retroalimentaciones internas y tiempos de retardo que afectan el comportamiento de todo el sistema, es una formalización matemática que describe la dependencia temporal de la posición de un punto en el espacio, algunos ejemplos son: modelos matemáticos como la oscilación de un péndulo, el flujo de agua en un tubo, el número de peces en cada primavera en un lago.

Espacio de Fase Es una construcción matemática, que permite representar el conjunto de posiciones y velocidades de un sistema de partículas, es decir es la representación de todos los posibles estados en que un sistema se puede representar; cada estado posible del sistema corresponde a un único punto en el espacio de fase.

Homogeneidad Propiedad de los sistemas lineales, la cual indica que a una entrada le corresponde una y solo una salida, $f(ax) = af(x)$.

Proceso Estocástico Concepto matemático que sirve para caracterizar y estudiar todo tipo de fenómenos aleatorios, que evolucionan, generalmente con el tiempo. Se definen como los procesos dependientes de leyes causales y probabilísticas, por lo que están sometidos al azar y son objeto de análisis estadístico. Este

tipo de procesos nos servirán para poder comprender la correlación, la cual se entiende estadísticamente como la relación entre varios datos.

Resonancia La resonancia se produce cada vez que hay una relación entre frecuencias (una de las frecuencias es igual a un múltiplo entero de la otra), y se podría definir como "una oscilación de gran amplitud causada por un estímulo periódico relativamente pequeño".

Sistema Es un conjunto de elementos que interactúan o entidades interdependientes que forman un todo integrado, conjunto de funciones o elementos relacionados dinámicamente que da como resultado un producto.

Sistema autónomo En matemáticas, es conocido también como ecuaciones diferenciales autónomas, es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias las cuales no dependen de la variable independiente.

Superposición También llamada propiedad aditiva, es la propiedad de los sistemas no lineales que dice que la suma de todas las entradas debe ser igual a la suma de todas las salidas. Si existen $f(x)$ y $f(y)$, entonces $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

BIBLIOGRAFÍA

1. Carrillo Ledesma, A., & Sánchez Garduño, F. (s.f.). Teorema de Poincaré-Bendixson. Universidad de la Ciudad de México, México, D.F.
2. ACHAESON, D. (s.f.). *From Calculus to Chaos, An introduction to Dynamics*. Oxford University Press.
3. Bai-Lin, H. (1984). *CHAOS*. World Scientific.
4. CAÓTICO, P. (s.f.). Obtenido de <http://www.investigacionyciencia.es/revistas/investigacion-y-ciencia/numero/369/pndulo-catico-8162>
5. Colorado, U. d. (s.f.). https://phet.colorado.edu/sims/projectile-motion/projectile-motion_es.html.
6. Coto, M. (s.f.). *Revista Física UNAH*.
7. Delgado, N. (s.f.). *Didáctica de las Ciencias nuevas perspectivas*. Obtenido de La educación superior, a su vez, se define como la etapa de formación profesional en

las diferentes áreas del saber. Es motor del desarrollo económico y social de los países y el principal instrumento de generación y trasmisión del conocimiento y de la ex

di. (s.f.).

8. E. Jahanbarkhsh, c. V. (s.f.). Desarrollo de un método de simulación en partículas de volumen finito. *Science direct*.
9. Feng Yu, S. L. (2016). Viscosidad inducida por las partículas. *Journal Fluidos No-Newtonianos*.
10. Flagan, R., & Ginley, D. (s.f.). *Nanoscale processes in the enviroment*. California: California Institute oh Technology.
11. Goldstein, H. (1987). *Mecánica Clásica*. España edición en español: Reverté S.A.
12. Levenspiel, O. (s.f.). Obtenido de <https://www.gnu.org/software/octave/>
13. Luz marleny Morales Mira, J. I. (s.f.). *La Enseñanza del movimiento desde una perspectiva de aprendizaje significativo*. Obtenido de <http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/343/1/JD0342.pdf>
14. Patricial Fernández, A. J. (2011). Simulaciones en la enseñanza de la física. *Revista de la enseñanza de la física*.
15. Prieto. (2008). *La enseñanza Universitaria centrada en el aprendizaje*. Obtenido de <http://www.ub.edu/grupcau/materiales/prieto-2008>
16. Python. (s.f.). Obtenido de <https://www.python.org/>
17. R.L, R. H. (s.f.). Obtenido de <http://www.rhandals.hn/>
18. Scientific, P. (s.f.). *PASCO Scientific*. Recuperado el 2017, de https://www.pasco.com/prodCatalog/EX/EX-5523_chaos-experiment/index.cfm
19. Taylor, J. R. (2005). *Mecánica Clásica*. Colorado.
20. TICS, B. (s.f.). Obtenido de <http://recursostic.educacion.es/blogs/malted/index.php/2012/09/24/socrative-el-sistema-de-respuesta-inteligente>.

21. Tinoco, G. C. (s.f.). Obtenido de Movimiento parabolico de caída libre.:
<http://es.slideshare.net/giuct15/mpcl2>
22. Tylor, J. R. (2005). *Classical Mechanics*. University Science Books.
23. UNAM. (2017). Obtenido de
<http://www.iimas.unam.mx/iimas/pagina/es/71/matematicas-y-mecanicaes>
24. Carrillo Ledesma, A., & Sánchez Garduño, F. (s.f.). Teorema de Poincaré-Bendixson. Universidad de la Ciudad de México, México, D.F.
25. ACHAESON, D. (s.f.). *From Calculus to Chaos, An introduction to Dynamics*. Oxford University Press.
26. Bai-Lin, H. (1984). *CHAOS*. World Scientific.
27. CAÓTICO, P. (s.f.). Obtenido de
<http://www.investigacionyciencia.es/revistas/investigacion-y-ciencia/numero/369/pndulo-catico-8162>
28. Colorado, U. d. (s.f.). https://phet.colorado.edu/sims/projectile-motion/projectile-motion_es.html.
29. Coto, M. (s.f.). *Revista Física UNAH*.
30. Delgado, N. (s.f.). *Didáctica de las Ciencias nuevas perspectivas*. Obtenido de La educación superior, a su vez, se define como la etapa de formación profesional en las diferentes áreas del saber. Es motor del desarrollo económico y social de los países y el principal instrumento de generación y trasmisión del conocimiento y de la exdi. (s.f.).
31. E. Jahanbarkhsh, c. V. (s.f.). Desarrollo de un método de simulación en partículas de volumen finito. *Science direct*.
32. Feng Yu, S. L. (2016). Viscosidad inducida por las partículas. *Journal Fluidos No-Newtonianos*.
33. Flagan, R., & Ginley, D. (s.f.). *Nanoscale processes in the enviroment*. California: California Institute oh Technology.
34. Goldstein, H. (1987). *Mecánica Clásica*. España edición en español: Reverté S.A.

35. Levenspiel, O. (s.f.). Obtenido de <https://www.gnu.org/software/octave/>
36. Luz marleny Morales Mira, J. I. (s.f.). *La Enseñanza del movimiento desde una perspectiva de aprendizaje significativo*. Obtenido de <http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/343/1/JD0342.pdf>
37. Patricial Fernández, A. J. (2011). Simulaciones en la enseñanza de la física. *Revista de la enseñanza de la física*.
38. Prieto. (2008). *La enseñanza Universitaria centrada en el aprendizaje*. Obtenido de <http://www.ub.edu/grupcau/materiales/prieto-2008>
39. Python. (s.f.). Obtenido de <https://www.python.org/>
40. R.L, R. H. (s.f.). Obtenido de <http://www.rhandals.hn>
41. Scientific, P. (s.f.). *PASCO Scientific*. Recuperado el 2017, de https://www.pasco.com/prodCatalog/EX/EX-5523_chaos-experiment/index.cfm
42. Taylor, J. R. (2005). *Mecánica Clásica*. Colorado.
43. TICS, B. (s.f.). Obtenido de <http://recursostic.educacion.es/blogs/malted/index.php/2012/09/24/socrative-el-sistema-de-respuesta-inteligente>
44. Tinoco, G. C. (s.f.). Obtenido de Movimiento parabolico de caída libre.: <http://es.slideshare.net/giuct15/mpcl2>
45. Tylor, J. R. (2005). *Classical Mechanics*. UniversityScience Books.
46. UNAM. (2017). Obtenido de <http://www.iimas.unam.mx/iimas/pagina/es/71/matematicas-y-mecanicaes>

ANEXOS

ANEXO 1: Guía de Laboratorio utilizada en la práctica de Laboratorio del Péndulo Caótico



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



COMPORTAMIENTO DE UN PÉNDULO CAÓTICO

Investigadores: Karen López y Alejandro Galo Colaboración y diseño: Luis Flores y René Hernández

1.1 Introducción

En esta práctica de laboratorio se observará el comportamiento de un péndulo caótico, caracterizando el sistema en estudio, analizando sus propiedades principales para obtener el rango de valores y las condiciones necesarias para que el sistema presente comportamiento caótico.

1.2 Objetivos

- Comprender sistemas dinámicos como teoría general para la mecánica
- Analizar las propiedades del sistema: PÉNDULO AMORTIGUADO FORZADO.
- Inferir acerca de las condiciones necesarias para que un sistema exhiba caos.
- A través de un equipo adecuado: recolectar, procesar y analizar datos experimentales, del sistema en estudio; observando su comportamiento al variar las propiedades y condiciones en las cuales se reproduce el experimento.

1.3 Materiales y Equipos

- Cinta Métrica
- Rollo de Hilo
- Tijera
- Varilla metálica corta
- 2 Varilla metálica larga
- Base metálica para el soporte
- Imán de neodimio
- Disco metálico
- Masa
- Dos resortes (con valores bajos de constante de resorte)
- Motor u oscilador mecánico (PASCO ME-8750)
- Sensor rotatorio de movimiento (PS-2120A marca PASCO)
- Fotopuerta (PASCO ME-9498A)
- 850 Interfaz universal (PASCO UI-5000)

1.4 Marco Teórico

1.4.1 Definición de sistema dinámico

Los sistemas dinámicos son una forma geométrica, topológica y global de organizar toda la información de las soluciones de una ecuación diferencial (y por ende, de muchos sistemas físicos). Este formalismo lo desarrollaremos al observar que toda ecuación diferencial (autónoma) puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \mathbf{V}(r) \\ \mathbf{V} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ r : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

Donde V es un campo vectorial que, a cada punto de \mathbb{R}^n le asigna un vector de n dimensiones, ilustrado en la siguiente figura un par de ejemplos.

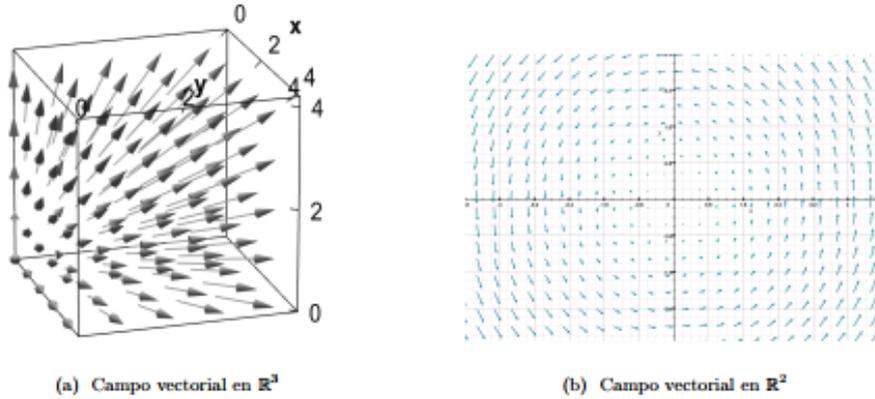


Figura 1.1: Dos candidatos válidos para la función V .

¿Se podrá encontrar $r(t)$ con sólo el gráfico?

Podemos notar que la figura (1.1b) es el gráfico del sistema dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \mathbf{V}(x, y) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

Cuya solución conocida son círculos con radio determinado por la condición inicial, figura que pudimos haber adivinado desde el gráfico trazando la curva desde cualquier punto (condición inicial) y continuando siempre en la dirección indicada por el campo vectorial $V(x, y)$. Esta idea de que las soluciones de ecuaciones diferenciales son las curvas tangentes nos motivan a dar la siguiente definición.

Con esto obtenemos que el problema de resolver ecuaciones diferenciales es, realmente, un problema geométrico de encontrar las curvas integrales. Introducimos una segunda definición para hablar de la unicidad de estas soluciones.

Definición 1.1. (Localmente Lipschitz continuo) Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ *Localmente Lipschitz continuo* si para toda $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe un vecindario $U_{(x_0)}$ y constante positiva $k \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|V(x) - V(y)\| < k\|x - y\|$ para toda $x, y \in U_{(x_0)}$

Si $U_{(x_0)} = \mathbb{R}^n$ para toda x_0 entonces se le llama *globalmente* lipschitz continua.

Teorema 1.1. Sea $\dot{x} = V$, $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ globalmente lipschitz continua. Entonces, para toda x_0 existe una *única* solución $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que varía continuamente con x_0 .

Con la existencia y unicidad de las curvas integrales de un campo vectorial fuera de lugar podemos garantizar que es posible encontrar la función $x(t)$ para todo t pero para una **condición inicial fija**. Esa es la manera común de abordar las ecuaciones diferenciales, pero para aprovechar al máximo su naturaleza geométrica cambiamos al siguiente paradigma.

Fijemos un tiempo t y definamos para ella la función $f^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que a cada x_0 de su dominio, le asigne $f^t(x_0) = x(t)$ tal que $x(0) = x_0$. Es decir, a cada punto de \mathbb{R}^n lo transportará mediante su curva integral *evolucionando a través de ella* un tiempo t .

Como podemos definir tal función para cualquier t que escojamos fijar, obtenemos una familia de funciones $\{f^t\}_{t \in \mathbb{R}^n}$ que observamos poseen las siguientes propiedades:

- $f^t(f^s(x)) = f^{t+s}(x) = f^s(f^t(x))$. Esto es porque evolucionar todos los puntos del espacio un tiempo t y luego al resultado evolucionarlo un tiempo s es lo mismo que conmutar sus aplicaciones y que haber sumado antes t y s y utilizar el mapa que evolucione con la suma.
- $f^0(x) = x$. Esto es equivalente a decir que $f^0(x)$ es el mapa identidad, y es debido a que evolucionar un tiempo $t = 0$ no tiene efecto en los puntos del espacio.
- $f^{-t}(f^t(x)) = f^0(x) = f^t(f^{-t}(x))$. Esto describe el proceso de evolucionar un tiempo t pero luego utilizar el negativo de ese tiempo $-t$ para regresar a la posición inicial.

Estas propiedades son propias de una estructura algebraica llamada **grupo** y, luego de la siguiente definición, estaremos listos para definir un sistema dinámico.

Definición 1.2. (Grupo) A una tupla (G, \cdot) , que consiste de un conjunto G y operación $\cdot : G \rightarrow G$ se le llama *grupo* si la operación cumple que, para todo $a, b, c \in G$:

- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Asociatividad)
- Existe $e \in G$ tal que $a \cdot e = a = e \cdot a$ (Elemento identidad)
- Existe $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = e = a^{-1} \cdot a$ (Elemento inverso)

Definición 1.3. (Sistema Dinámico) Un sistema dinámico es una terna $(\mathcal{M}, G, \{\phi^t\}_{t \in G})$ donde \mathcal{M} es un conjunto, G un grupo, y $\{\phi^t\}_{t \in G}$ es una familia de funciones $\phi^t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ llamadas *funciones de evolución*.

1.5 Nociones Topológicas básicas

Para estudiar el comportamiento y destino de sistemas dinámicos en tiempos extremos es necesario tener en nuestro conjunto \mathcal{M} una noción de convergencia de sucesiones, pues ya vimos que iterar las funciones de evolución ϕ^t nos hacen avanzar tiempos t y podemos utilizar una sucesión $\{t_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ que tienda a infinito y estudiar directamente el límite de la correspondiente sucesión de imágenes $\{\phi^{t_j}\}_{j \in \mathbb{Z}}$.

La estructura necesaria para que en \mathcal{M} podamos hablar de convergencia se llama *topología*, y se definirán a continuación.

Definición 1.4. (Conjunto potencia) Dado un conjunto \mathcal{M} , definimos su conjunto potencia (denotándolo por $\mathcal{P}(\mathcal{M})$) al conjunto de todos los subconjuntos de \mathcal{M} .

Definición 1.5. (Topología) Dado un conjunto \mathcal{M} , le llamamos a $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{M})$ una *topología* si cumple que:

- $\mathcal{M}, \emptyset \in \mathcal{O}$.
- $U_i \in \mathcal{O} \implies \bigcup_{i \in I} U_i$. Para algún conjunto de índices I arbitrario.
- $U_i \in \mathcal{O} \implies \bigcap_{i=0}^n U_i$. Para algún $n \in \mathbb{Z}^+$

A la tupla $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ se le llama *espacio topológico* y a los elementos de \mathcal{O} elementos *conjuntos abiertos*.

Definición 1.6. (Convergencia) Una sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}^+}$ (subconjunto contable de \mathcal{M}) se dice que converge a $x \in \mathcal{M}$ si para toda $U_{(x)} \subseteq \mathcal{O}$ (vecindad de x , $x \in U_{(x)}$) existe un natural N tal que para todo $n > N$ se cumple que $x_n \in U_{(x)}$. Y se denota $x_n \rightarrow x$

Definición 1.7. (Función continua) Dados dos espacios topológicos, $(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$ y $(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathcal{N}})$, una función $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ se dice continua si para todo $V \in \mathcal{O}_{\mathcal{N}}$ se cumple que $\phi^{-1}(V) \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}$.

Definición 1.8. (Órden total) Un conjunto \mathbf{G} se llama *totalmente ordenado* bajo \leq si para todo $a, b, c \in \mathbf{G}$ se cumple que:

- $a \leq b$ y $b \leq a \implies a = b$ (antisimetría)
- $a \leq b$ y $b \leq c \implies a \leq c$ (transitividad)
- $a \leq b$ o $b \leq a$ (totalidad)

Definición 1.9. (Convergencia a infinito) Sea (\mathbf{G}, \leq) un conjunto totalmente ordenado. Decimos que una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ converge a infinito (denotado como $x_n \rightarrow +\infty$) si para todo $M \in \mathbf{G}$ existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que para todo $n > N$ se cumple que $M \leq x_n$.

Con estas definiciones básicas podemos entonces hablar de la órbita de un punto del sistema dinámico y su ciclo límite o límite ω .

Definición 1.10. (Órbita) Sea $(\mathcal{M}, \mathbf{G}, \{\phi^t\}_{t \in \mathbf{G}})$ un sistema dinámico con ϕ^t biyectiva para todo t . Definimos la *órbita* de x como:

$$O(x) := \{\phi^t(x)\}_{t \in \mathbf{G}}$$

Es decir, la familia entera de funciones de evolución evaluadas en el punto x ; eso es, un subconjunto de \mathcal{M} .

Si $\phi(x_0) = x_0$, entonces $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0\}$ y se le llama *punto fijo*. Si existe k tal que $\phi^k(x_0) = x_0$, entonces $\mathcal{O}(x_0) = \{x_i\}_{i=0}^{k-1}$ y se le llama *órbita periódica*.

Intuitivamente esta es la colección de todos los puntos a los cuales se puede acceder desde x por medio de la aplicación de las funciones ϕ . Esto coincide con la noción inicial de *puntos evolucionando a través de curvas integrales*. Esa no es coincidencia, pues las curvas integrales son las órbitas de los puntos en \mathbb{R}^n bajo la evolución determinada por V .

[3mm] Ahora procedemos a definir el conjunto de puntos conocido como límite ω , los puntos a los cuales nos acercamos arbitrariamente cerca tras aplicación de nuestra función de evolución ϕ^t para $t \rightarrow \infty$.

Definición 1.11. (Límite ω) Sea $(M, G, \{\phi^t\}_{t \in G})$ un sistema dinámico con (M, \mathcal{O}) espacio topológico, (G, \leq) un grupo totalmente ordenado, y ϕ^t continua para todo t , entonces definimos el *límite ω del punto x_0* como:

$$\omega(x_0) = \{z \in M / \phi^{t_j}(x_0) \rightarrow z, \text{ para alguna sucesión } t_j \rightarrow \infty\}$$

De manera intuitiva, este es el conjunto de puntos a los cuales nos acercamos arbitrariamente cerca a medida el tiempo va al infinito *futuro* (O tiempos muy grandes). Equivalentemente podemos definir un conjunto para los tiempos infinitos en el pasado:

$$\alpha(x_0) = \{z \in M / \phi^{-t_j}(x_0) \rightarrow z, \text{ para alguna sucesión } t_j \rightarrow \infty\}$$

Con estas dos nociones podemos naturalmente hablar del comportamiento asintótico de nuestro sistema mediante las siguientes dos definiciones.

Definición 1.12. (Atractor) A un punto $p \in M$ se le llama *atractor* si

$$\exists U_{(p)} \in \mathcal{O}, \forall x_0 \in U_{(p)} (\omega(x_0) = \{p\})$$

Definición 1.13. (Repelente) A un punto $p \in M$ se le llama *repelente* si

$$\exists U_{(p)} \in \mathcal{O}, \forall x_0 \in U_{(p)} (\alpha(x_0) = \{p\})$$

Se puede extraer una definición más general de las anteriores al considerar que los atractores pueden no ser solamente un punto, si no un conjunto de ellos. Tal definición es idéntica salvo que se trabaja con un subconjunto $E \subset M$ y su vecindad $U_{(E)}$.

Consideramos entonces unos cuantos ejemplos de atractores (y puede fácilmente imaginar sus equivalentes para repelentes):

- **Punto fijo:** Un *punto fijo* o punto de equilibrio es el punto correspondiente al estado del sistema que permanece constante el tiempo. Ejemplos: el estado final de una piedra que cae, un péndulo o un vaso con agua.
- **Ciclo límite:** Un ciclo límite es una órbita periódica del sistema que está aislada. Ejemplos: el circuito de sintonía de una radio.
- **Toro límite:** Una trayectoria periódica de un sistema puede ser gobernada por más de una frecuencia. Si dos de estas frecuencias forman una fracción irracional (es decir, si son inconmensurables), la trayectoria no se cerrará y el ciclo límite se convertirá en un toro.
- **Atractor extraño:** A diferencia de los atractores clásicos, los atractores extraños tienen estructura a todas las escalas. Un atractor es extraño si tiene dimensión de Hausdorff no entera (o "fractal").

En la lista anterior se ha mencionado el término *dimensión de Hausdorff*. Para definirlo rigurosamente es necesaria topología avanzada y algo de análisis que está fuera de la finalidad de este documento.

Como nota final, queda a reflexión que no todo atractor extraño es caótico, sin embargo es muy inusual que no lo sea ya que tendría que tener muy baja dependencia y sensibilidad a condiciones iniciales. Estos se encuentran en magnetoelástica, electrónica, reacciones con neón, y estrellas variables de tipo RR Lyrae.

1.6 Procedimiento Experimental

Para conseguir la visualización deseada en los datos se debe configurar de forma adecuada el montaje experimental, y el equipo a utilizar. Para ello se siguen los siguientes pasos que abarca hasta la recolección de los datos experimentales.

1.6.1 Preparar el montaje experimental

- Colocar las varillas largas en la base metálica y dejarlas firmes.
- Colocar el motor u oscilador mecánico en una de las varillas largas, y junto al oscilador colocar la fotopuerta. Tanto el oscilador como la fotopuerta se podrán fijar a la base por medio de una plataforma metálica que junta ambas piezas.
- Colocar la varilla corta sobre las varillas largas a una altura de 1m (aproximadamente), y dejarlo firme.
- Colocar el sensor de movimiento rotatorio en uno de los extremos de la varilla larga, y sujetarlo con firmeza.
- Extraer del sensor de movimiento rotatorio, una pieza circular. Luego tomar el rollo de hilo y cortar 1 metro de esta. Doblar por la mitad el hilo cortado y hacer pasar el doblez por los agujeros de la pieza circular, sujetando el hilo en el centro de esta, de modo que los extremos libres del hilo puedan enrollarse alrededor de la pieza circular.
- Colocar la pieza circular nuevamente en el sensor rotatorio.
- Tomar uno los extremos del hilo y enrollar dos veces alrededor de la pieza circular. Luego hacer lo mismo para el otro extremo del hilo. De este modo al halar cualquier extremo del hilo, habrá movimiento rotatorio de la pieza circular.
- Atar un resorte de uno de los extremos del hilo y hacer lo mismo para el otro extremo.
- Cortar dos pedazos más de hilo y atarlos a los extremos de los lados libres de los resortes. Luego atar el extremo libre de uno de los hilos al brazo mecánico que se encuentra sujeto al oscilador mecánico, y el extremo del otro hilo atarlo a la base metálica. Los resortes deben estirarse de modo que alcancen una longitud aproximada de 10cm.

Las imágenes de cada uno de los pasos se encuentra en el anexo. La figura 1.2 corresponde a la configuración final del montaje.

1.6.2 Preparar la interfaz universal (PASCO UI-5000)

En esta parte del procedimiento se realizan las conexiones de los distintos sensores en la interfaz universal de PASCO bajo el esquema mostrado en la figura 1.3. De acuerdo a la figura:

Punto 1 Se debe conectar a la interfaz la fotopuerta.

Punto 2 Se debe conectar el motor u oscilador, respetando la polaridad, se debe tener cuidado de alimentar al motor solo con corriente directa.

Punto 3 Se debe conectar el sensor de movimiento rotatorio.



Figura 1.2: Figura que muestra la configuración final del montaje.

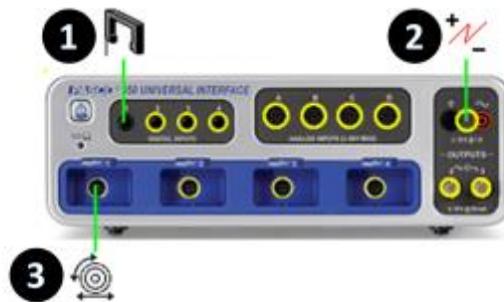


Figura 1.3: Figura que muestra el lugar de conexión de los sensores en la interfaz PASCO.

1.6.3 Preparar la interfaz gráfica de usuario en la PC

Aquí se deberá preparar el programa PASCO Capstone, que es el entorno gráfico para la recolección de datos provenientes de los sensores; una descripción detallada del uso del programa se puede consultar desde el manual de PASCO. A continuación se detalla los solamente los pasos a seguir para preparar el entorno gráfico:

- Asegurar la conexión e identificación adecuada de los sensores.
- Configurar la fotopuerta, para asegurar el modo correcto de detección de objetos.
- Configurar la salida de voltaje o corriente al motor.
- Configurar el cálculo del vector velocidad angular cuando el brazo del motor mecánico pasa por la fuerza, este cálculo es necesario para realizar la gráfica de la sección de Poncairé.
- Configurar la vista de las gráficas para su correcta visualización.

1.6.4 Recolección de datos experimentales

Cuando ya se han realizado los pasos anteriores se procede a la etapa recolección de los datos. Para ello se configura la frecuencia de recolección de datos en 40Hz, posteriormente se presiona el botón “Grabar”. La imagen muestra la localización del botón grabar y la opción configurable de la frecuencia.



Figura 1.4: Imagen que muestra la vista principal de la interfaz gráfica de usuario.

1.7 Análisis de Datos Experimentales

A continuación se les detalla realizar una serie de recolecciones de datos, cuyas representaciones gráficas, nos darán una comprensión mayor acerca del comportamiento caótico de los sistemas dinámicos.

- SISTEMA 1**
- Realice una gráfica de la energía potencial del péndulo, cuando el disco metálico se encuentra en libre movimiento (interacción del disco con fuerzas disipativas al mínimo).
 - Para el sistema anterior, realice las gráficas de “Velocidad Angular” vs “Tiempo”, “Velocidad Angular” vs “Ángulo” y grafique la Sección de Poincaré.
- SISTEMA 2**
- Para el sistema anterior, realice las gráficas de “Velocidad Angular” vs “Tiempo”, “Velocidad Angular” vs “Ángulo” y grafique la Sección de Poincaré.

Cuestionario

Preguntas Prácticas

INSTRUCCIONES: Conteste de manera ordenada, mostrando procedimiento y justificación para cada paso, especialmente en las demostraciones. Los ejercicios consisten en etapas guiadas por pistas para ir demostrando todo.

1. Sea $\dot{x} = f(x)$ una ecuación diferencial con $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable y $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (lipchitz) continua.

(a) Demuestre que, para soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$, la función $x_1(t) + x_2(t)$ no es solución a la ecuación diferencial. ¿Qué condiciones son necesarias en f para que lo sea? *Hint*: Solo es una condición y no es linealidad.

(b) Si ahora consideramos una combinación arbitraria, $z = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$, ¿Necesitamos otra condición en f para que z sea solución? Razone el porqué **no** es necesaria otra condición al:

- Demostrar por inducción que (a) implica $f(nx) = nf(x) \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$
- Argumentar que los números naturales tienen la misma cardinalidad (tamaño) que los números racionales. *Hint*: Ver demostración de cantor sobre que los números racionales son contables
- Argumentar que, entre dos reales, siempre se encuentra un número racional. Es decir, los racionales son densos en los reales

Recordamos que en la evolución de un sistema dinámico el tiempo es siempre *aditivo* (por ser un grupo). La demostración anterior ilustra que las funciones de evolución pueden poseer una estructura lineal. Esta estructura (más algunas observaciones más) que toman los campos vectoriales es llamada un *módulo* o *campo vectorial sobre un anillo*.

2. Considere nuestro montaje sin la fricción magnética.

(a) Muestre, mediante Lagrange o Hamilton, que el torque debido sólo a los dos resortes y a la gravedad está dado por:

$$\tau_e = -2kr^2\theta + krd + mgR \sin(\theta)$$

Donde k es la misma constante para ambos resortes, r es el radio de la polea, R el radio del disco, y d es la distancia de la cuerda debajo del resorte izquierdo (ver figura 1.5)

(b) Muestre que para $d=0$ (es decir, $A=0$, sin término forzado), la energía potencial es

$$V = kr^2\theta^2 + mgR \cos(\theta)$$

(c) Muestre que, para $mgR \leq 2kr^2$, $V(\theta)$ tiene un mínimo local en $\theta = 0$ y para $mgR > 2kr^2$, $V(\theta)$ tiene un máximo en $\theta = 0$ y dos mínimos en $\pm\theta_e$ tales que $V(\theta_e) = V(-\theta_e)$ y

$$\frac{\sin(\theta_e)}{\theta_e} = \frac{2kr^2}{mgR}$$

3. En este ejercicio demostrará que nuestro sistema, como es de esperarse, es de la forma $\dot{x}(t) = f(x)$ y puede ser analizado con nuestra teoría de sistemas dinámicos.

- (a) Encuentre el lagrangiano y la ecuación del movimiento para nuestro montaje en el caso con fricción magnética de la forma $\mathcal{F} = \frac{1}{2}b\dot{\theta}^2$ y recuerde que la ecuación de Lagrange para fuerzas externas o no conservativas es:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = Q_{\theta} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\theta}} \left. \vphantom{\frac{d}{dt}} \right\} \text{Fuerza generalizada}$$

Hint: Recuerde que $d = A \cos(\Omega t)$ para Ω constante, la frecuencia angular del brazo mecánico.

- (b) Demuestre que, para alguna constante γ , se puede resumir la información de la fuerza disipadora en un lagrangiano

$$\mathcal{L} = e^{\gamma/I} \left(\frac{I}{2} \dot{\theta}^2 - U(\theta) \right)$$

- (c) Exprese la ecuación del movimiento en forma de sistema como:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\Gamma\omega - \kappa\theta + \mu \sin(\theta) + \epsilon \cos(\phi) \\ \dot{\phi} = \Omega \end{cases}$$

Donde $\Gamma = b/I$, $\kappa = 2kr^2/I$, $\mu = mgR/I$, $\epsilon = krA/I$. Notemos que al definir nuestras variables en un vector $x = (\theta \ \omega \ \phi)^T$ nuestro sistema ($\dot{x} = f(x)$) es autónomo.

4. Consideremos el caso $mgR > 2kr^2$, $V(\theta)$. Por lo tanto, existe un máximo y dos mínimos.

- (a) Muestre, por expansión en serie de Taylor alrededor de cualquier $\theta_0 = \pm\theta_c$ para $V(\theta)$, que:

$$V(\theta) = kr^2\theta_c^2 + mgR \cos(\theta_c) + \frac{1}{2}(2kr^2 - mgR \cos(\theta_c))(\theta - \theta_c)^2 + \mathcal{O}(\theta^3)$$

¿Porqué no aparecen términos lineales en $(\theta - \theta_0)$?

- (b) Despreciando los términos $\mathcal{O}(\theta^3)$ y definiendo $\theta' = \theta - \theta_0$, demuestre que la ecuación del movimiento es:

$$\ddot{\theta}' + \Gamma\dot{\theta}' + \Omega_0^2\theta' = \epsilon \cos(\Omega t)$$

Es decir, un oscilador lineal con frecuencia de resonancia $\Omega_0 = \sqrt{\kappa - \mu \cos(\theta_c)}$.

Preguntas Teóricas

INSTRUCCIONES: Conteste de manera ordenada ya sea de manera manuscrita o redactado en una computadora. Si es manuscrito procure que sea claro, entendible y anexe todas las gráficas que se le pide

1. Utilice cualquier software computacional (recomendado *Mathematica*) para anexar una gráfica que ilustre que las líneas de fase de un oscilador **no amortiguado ni forzado** son, en general elipses y responda lo siguiente:

- (a) ¿Qué cambio de escala de los ejes hace que los elipses sean círculos?
- (b) ¿Qué determina la dirección del movimiento alrededor del elipse (a favor o en contra de las manecillas del reloj)?
- (c) ¿Cómo dependen estas trayectorias de las condiciones iniciales?

2. Considere ahora el caso amortiguado, genere dos trayectorias de condición inicial distinta en un mismo gráfico y responda:

- (a) ¿Cómo cambia las trayectorias la adición de fuerzas disipadoras?
- (b) ¿Cómo dependen ahora de las condiciones iniciales?
- (c) ¿A qué punto se acercan todas las trayectorias cuando $t \rightarrow \infty$?

3. Enumere las condiciones para clasificar a un sistema como caótico y explíquelas. Asuma que trabajamos sobre un espacio métrico completo (\mathcal{M}, d) sin puntos aislados (es decir, todo vecindario de todo x contiene elementos de \mathcal{M} distintos de x).

4. Un sistema hamiltoniano es aquel sistema dinámico que es de la forma

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = S_N \cdot \nabla_{\mathbf{r}} H(\mathbf{r})$$

Donde S_N es la representación matricial de una *forma simpléctica*,

$$S_N = \begin{bmatrix} 0 & I_N \\ -I_N & 0 \end{bmatrix}; \quad I_N : \text{Matriz identidad de orden } N$$

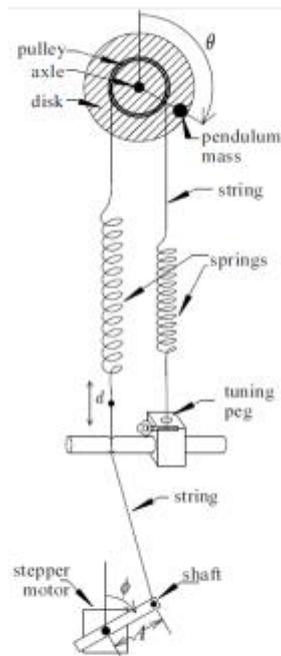
Escriba explícitamente el sistema para el caso $N=1$ y observe que recupera las familiares ecuaciones de Hamilton para una dimensión.

5. (*Bonus*) Utilizando la estructura simpléctica de los sistemas hamiltonianos y el teorema de la divergencia, demuestre que el volumen de una superficie cerrada se mantiene constante en el tiempo. Es decir:

$$\frac{d}{dt} \int_{S_t} d\mathbf{r} = 0$$

Este resultado es frecuentemente conocido como *teorema de Liouville*.

Figuras

Figura 1.5: Montaje de péndulo caótico, donde $d = A \cos(\phi)$

ANEXO 2: Desarrollo del atractor de Lorenz en Python:

```
ATRACTOR DE LORENZ

Solución y gráfica en Python

In [37]: from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

In [38]: a=10
b=23
c=8./3

In [41]: def lorenz(x, y, z):
u=a*(y-x)
v=x*(b-z)-y
w=x*y-c*z
return u, v, w
dt=0.01
stepCnt=10000

xs=np.empty((stepCnt+1,))
ys=np.empty((stepCnt+1,))
zs=np.empty((stepCnt+1,))

xs[0],ys[0],zs[0]=(0.,1.,1.05)

for i in range(stepCnt):
x_dot, y_dot, z_dot= lorenz(xs[i],ys[i],zs[i])
xs[i+1]=xs[i]+(x_dot*dt)
ys[i+1]=ys[i]+(y_dot*dt)
zs[i+1]=zs[i]+(z_dot*dt)

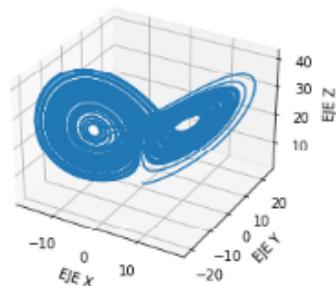
In [42]: fig=plt.figure()
ax=fig.gca(projection='3d')
ax.plot(xs, ys, zs)
ax.set_xlabel("EJE X")
ax.set_ylabel("EJE Y")
ax.set_zlabel("EJE Z")
ax.set_title("ATRACTOR DE LORENZ")

plt.show

C:\Users\Admin\AppData\Local\Temp\ipykernel_16352\2987682649.py:2: Matplotlib
st, create new axes with default keyword arguments. To create a new axes w
ax=fig.gca(projection='3d')
```

```
Out[42]: <function matplotlib.pyplot.show(close=None, block=None)>
```

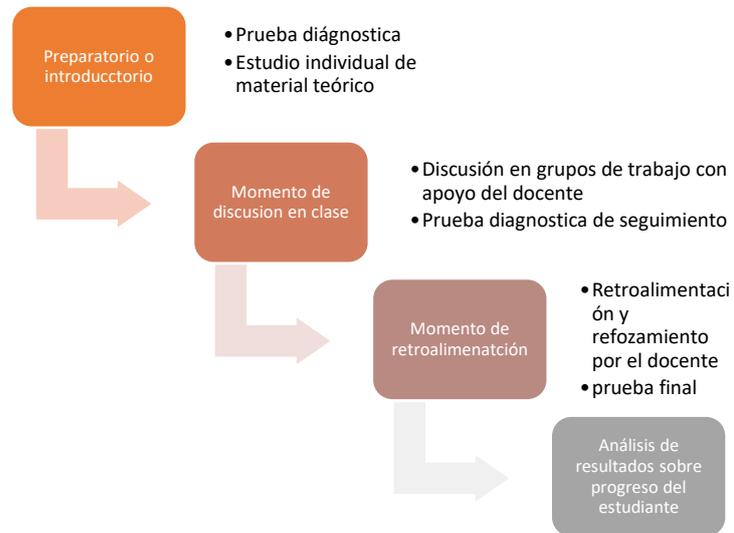
ATRACTOR DE LORENZ



ANEXO 2: Esquema del Aprendizaje Invertido



ANEXO 3: Esquema general de todo el proceso de Enseñanza-Aprendizaje.



ANEXO 4: Fotos del equipo utilizado de PASCO

- 1) F-01991 INTERFASE Marca Pasco, Modelo: UI-5000.
Serie: 171445000E4014



- 2) F-01990 Equipo Péndulo Caótico:



Accesorios:

2.1 Accesorio de Caos:



2.2 Fotocelda:



2.3 Dos Multi clamp:



2.4 Base Pasco:



2.5 Varillas: Consta de 2 varillas de 80 cm y 1 varilla de 50 cm



2.6 Mechas:



3) F-41854 Mechanical Oscillator/Driver





Referencias

Carrillo Ledesma, A., & Sánchez Garduño, F. (s.f.). Teorema de Poincaré-Bendixson. Universidad de la Ciudad de México, México, D.F.

-Hilborn, R. C. (s.f.). Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction.

ACHAESON, D. (s.f.). *From Calculus to Chaos, An introduction to Dynamics*. Oxford University Press.

Bai-Lin, H. (1984). *CHAOS*. World Scientific.

CAÓTICO, P. (s.f.). Obtenido de <http://www.investigacionyciencia.es/revistas/investigacion-y-ciencia/numero/369/pndulo-catico-8162>

Colorado, U. d. (s.f.). https://phet.colorado.edu/sims/projectile-motion/projectile-motion_es.html.

Coto, M. (s.f.). *Revista Física UNAH*.

Delgado, N. (s.f.). *Didáctica de las Ciencias nuevas perspectivas*. Obtenido de La educación superior, a su vez, se define como la etapa de formación profesional en las diferentes áreas del saber. Es motor del desarrollo económico y social de los países y el principal instrumento de generación y trasmisión del conocimiento y de la ex

di. (s.f.).

- E. Jahanbarkhsh, c. V. (s.f.). Desarrollo de un método de simulación en partículas de volumen finito. *Science direct*.
- Espinoza, A. (2004). *El Caos y la caracterización de la obtención de series Temporales*.
- Feng Yu, S. L. (2016). Viscosidad inducida por las partículas. *Journal Fluidos No-Newtonianos*.
- Flagan, R., & Ginley, D. (s.f.). *Nanoscale processes in the enviroment*. California: California Institute oh Technology.
- Goldstein, H. (1987). *Mecánica Clásica*. España edición en español: Reverté S.A.
- Hall, N. (. (s.f.).
- Hateley, J. (s.f.). Sistema de Lorenz.
- James A, B. G. (1998). A comparison of commercial chaotic pendulums. *American Association of Physics Teachers*, 16.
- Levenspiel, O. (s.f.). Obtenido de <https://www.gnu.org/software/octave/>
- Luz marleny Morales Mira, J. I. (s.f.). *La Enseñanza del movimiento desde una perspectiva de aprendizaje significativo*. Obtenido de <http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/343/1/JD0342.pdf>
- Moon, F. C. (s.f.).
- Patricial Fernández, A. J. (2011). Simulaciones en la enseñanza de la física. *Revista de la enseñanza de la física*.
- Prieto. (2008). *La enseñanza Universitaria centrada en el aprendizaje*. Obtenido de <http://www.ub.edu/grupcau/materiales/prieto-2008>
- Python. (s.f.). Obtenido de <https://www.python.org/>
- R.L, R. H. (s.f.). Obtenido de <http://www.rhandals.hn/>
- Santos Burguette, C., Cimarro Grande, J., & Fuentes Marron, D. (México). Física del CAOS. *AEMET. Scientific*, P. (s.f.). *PASCO Scientific*. Recuperado el 2017, de https://www.pasco.com/prodCatalog/EX/EX-5523_chaos-experiment/index.cfm
- Stewart I., t. O. (s.f.). ¿Juega Dios a los dados, la nueva matemática del caos?
- Taylor, J. R. (2005). *Mecánica Clásica*. Colorado.
- TICS, B. (s.f.). Obtenido de <http://recursostic.educacion.es/blogs/malted/index.php/2012/09/24/socrative-el-sistema-de-respuesta-inteligente>
- Tinoco, G. C. (s.f.). Obtenido de Movimiento parabolico de caída libre.: <http://es.slideshare.net/giuct15/mpcl2>
- Tylor, J. R. (2005). *Classical Mechanics*. UniversityScience Books.
- UNAM. (2017). Obtenido de <http://www.iimas.unam.mx/iimas/pagina/es/71/matematicas-y-mecanicaes>

Weigend, A. S. (s.f.).