

Universidad Nacional Autónoma de Honduras

Tesis presentada previo a obtener el grado de
Máster en Física



Experimentos de Stern-Gerlach: propuestas para la enseñanza de la mecánica cuántica a nivel de grado y postgrado en la UNAH

Presentada por:

Jonnathan André López Sánchez

Asesor de Tesis:

Armando Euceda, Ph.D.

Escuela de Física

Ciudad Universitaria, Honduras

Julio de 2022

Autoridades de la Universidad Nacional Autónoma de Honduras

Junta de Dirección Universitaria:

PhD. Carlos Alberto Pérez

Máster Marlyn Carolina Ramírez

Abg. José Ramón Martínez

Dra. América del Carmen Alvarado

PhD. Raúl Orlando Figueroa Soriano

Máster Efraín Díaz Arrivillaga

Lic. Juan Carlos Ramírez

Rectoría UNAH:

Dr. Francisco Herrera Alvarado

Vicerrectoría Académica UNAH:

MSc. Belinda Flores Padilla

Vicerrectoría Asuntos Estudiantiles UNAH:

Abg. Ajax Lempira Irías Coello

Vicerrectoría Relaciones Internacionales UNAH:

Dr. Marco Tulio Medina

Secretaría General UNAH:

Abg. Emma Virginia Rivera

Decano Facultad de Ciencias UNAH:

MSc. Alejandro Galo Roldán

Directora Maestría en Física UNAH:

PhD. Melissa María Cruz Torres

Director Escuela de Física UNAH:

MSc. José Jorge Escobar Figueroa

Dedicada a

Dios, familia y amigos.

Experimentos de Stern-Gerlach: propuestas para la enseñanza de la mecánica cuántica a nivel de grado y postgrado en la UNAH

por: Jonnathan André López Sánchez
Asesor de Tesis: Armando Euceda, Ph. D.

Presentada para obtener el grado de Máster en Física
Mayo del 2022

Resumen

El experimento llevado a cabo por Otto Stern y Walther Gerlach en 1922 para demostrar la “cuantización espacial”, se propone en este trabajo como alternativa y/o complemento para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la física cuántica a nivel de grado y posgrado en la Universidad Nacional Autónoma de Honduras, de la mano de herramientas tecnológicas y pedagógicas innovadoras. Esta tesis se fundamenta en tres pilares:

Desde la óptica del estudiante, el intentar describir el experimento y sus resultados con tres modelos diferentes: física clásica, el modelo semiclásico de la época (Bohr) y física moderna, sumado a aspectos históricos relevantes, brinda la *motivación* necesaria para emprender el estudio de la mecánica cuántica. Se ofrece una revisión exhaustiva del experimento mediante los tres paradigmas en un primer capítulo.

En segundo lugar, en base a dificultades reportadas a nivel de pregrado en la UNAH en un curso tradicional de mecánica cuántica ondulatoria, se proponen experimentos de Stern-Gerlach específicos para dilucidar dichos conceptos. En tal sentido, los experimentos de Stern-Gerlach, con la ayuda de un simulador, pueden *complementar* un curso tradicional.

Finalmente, el sustento principal radica en una intervención educativa basada en experimentos de Stern-Gerlach realizada para la asignatura Física Cuántica (MFS614) de la

Maestría en Física General de la UNAH. Esta intervención se llevó a cabo durante el primer período académico de 2016, para la cual se adoptó el enfoque de enseñanza conocido como *Spin-First*, con la que se introducen los principios de la mecánica cuántica moderna a través de experimentos de Stern-Gerlach. Esta metodología se combinó con herramientas computacionales de vanguardia para la educación, tales como el uso del entorno virtual de aprendizaje Open edX y un simulador SGE escrito en JAVA. El ochenta por ciento de los alumnos participantes resaltaron elevada *satisfacción en su experiencia de aprendizaje*, quienes consideraron el enfoque usado más enriquecedor en comparación con otros tradicionales/teóricos, como el ofrecido por el MIT a través de su plataforma MOOC edX: 8.05.1x. Una evaluación especial reveló que el formalismo y los conceptos fundamentales necesarios fueron bien asimilados por los alumnos.

La importancia de tener una sólida fundamentación en la materia es evidente: la mecánica cuántica es un pilar de la física moderna y ha conllevado numerosas contribuciones a la sociedad actual, tal como el desarrollo de la electrónica y criptografía; brinda a los estudiantes las herramientas necesarias para comprender teorías más avanzadas como la mecánica cuántica relativista (RQM), electrodinámica cuántica (QED) y otras teorías cuánticas de campo (QFT), facilitando así investigaciones o colaboraciones internacionales en la rama de la física de partículas o de materia condensada. Por estas y otra razones, es importante realizar investigación continua en el área enseñanza-aprendizaje de este riguroso rubro de la física.

Palabras clave: *Educación de la Física, Enseñanza de la Mecánica Cuántica, Experimentos de Stern-Gerlach, Innovación Educativa en STEM*

Declaración

Este documento de tesis se basa en investigaciones realizadas por mi persona, para la acreditación del grado de Máster en Física. Ningún apartado de este trabajo se ha presentado en otro lugar para cualquier otro grado o título, a menos que se indique lo contrario en el texto.

Derechos Reservados © 2022 por Jonnathan López.

“Los derechos de autor de esta tesis descansan sobre el autor. Se debe citar debidamente en caso se utilice parte de la misma”.

Reconocimientos

A todos aquellos que siempre confiaron este trabajo llegaría a su fin y apoyaron de alguna manera, en especial a mi esposa Ingrid Díaz y asesor Dr. Armando Euceda.

Índice general

Resumen	IV
Declaración	VI
Reconocimientos	VII
Índice de figuras	XI
Índice de tablas	XIII
1 Introducción	1
2 El experimento de Stern-Gerlach	4
2.1 Introducción	4
2.2 Descripción del experimento	5
2.3 Nociones clásicas	10
2.3.1 Definición de momento angular	10
2.3.2 Momento angular para objetos en rotación	12
2.3.3 El momento dipolar magnético	15
2.3.4 Momento angular para esfera cargada girando	16
2.3.5 Discusión	18
2.3.6 Fuerza de un campo externo sobre un dipolo magnético	19
2.4 Análisis del experimento en base a teoría cuántica de la época	21
2.5 Discusión de resultados usando física moderna	24
2.5.1 Obtención del g-factor para el electrón	25

2.6	Sobre la dinámica de las partículas de plata	28
2.6.1	Teoría clásica: precesión del momento angular	28
2.6.2	Física cuántica: precesión del espín y desviación de átomos	28
2.7	Comentarios finales	34
3	Experimentos de Stern-Gerlach en la educación de la física cuántica	36
3.1	Introducción	36
3.2	Enseñanza tradicional de la mecánica cuántica	37
3.3	Enseñanza de la mecánica cuántica en la UNAH	42
3.4	Comprensión de la mecánica cuántica	46
3.5	Enfoques pedagógicos usando experimentos de Stern-Gerlach	50
3.5.1	El enfoque Spin-First	50
3.5.2	Descripción detallada del enfoque Spin-First	61
3.5.3	Discusión crítica del enfoque Spin-First	113
3.5.4	El impacto de experimentos de Stern-Gerlach para reforzar problemas conceptuales	117
3.6	Propuestas de implementaciones usando Spin-First en la UNAH	119
4	Intervención educativa en un curso de posgrado usando experimentos de Stern-Gerlach	122
4.1	Introducción	122
4.2	Importancia de la investigación en la educación de la física	123
4.3	Investigación en la educación de la física y aspectos cognitivos	128
4.3.1	Investigación en educación e innovación en la UNAH	130
4.4	Motivación	132
4.4.1	La importancia de innovar en la enseñanza de la mecánica cuántica	133
4.5	Desarrollo de la intervención educativa	134
4.5.1	Diseño general	134
4.5.2	Generalidades de los estudiantes	136
4.5.3	El módulo 8.05.1x	139

4.5.4	Herramientas computacionales utilizadas	141
4.5.5	El simulador SPINS	142
4.5.6	Ambiente Físico	146
4.5.7	Diseño pedagógico	147
4.5.8	Trabajo en el aula virtual	150
4.6	Resultados obtenidos	150
4.6.1	Percepción de las herramientas tecnológicas	150
4.6.2	Sobre el libro innovador de D. McIntyre	152
4.6.3	Percepción de los laboratorios presentados	152
4.6.4	Sobre la modalidad	152
4.6.5	Comparación con módulo 2: 8.05.1x del MIT	153
4.6.6	Apreciación de la intervención educativa	154
4.6.7	Evaluación de los aprendizajes	156
4.7	Análisis de resultados	157
5	Conclusiones finales	159
5.1	Conclusiones finales y consideraciones futuras	159
5.1.1	Revisión teórica del experimento	159
5.1.2	Comprensión de la mecánica cuántica y el enfoque Spin-First	160
5.1.3	Intervención educativa usando el Enfoque Spin First con elementos innovadores	160
	Bibliografía	163
	Apéndice	168
A	Laboratorios virtuales propuestos usando SPINS	168
B	Resultados encuesta de opinión	188
C	Evaluación conceptual especial	201

Índice de figuras

Figura 2.1	Representación del experimento original de Stern-Gerlach	8
Figura 2.2	Postal enviada por Gerlach a Bohr (AIP Emilio Segrè Visual Archives)	9
Figura 2.3	Definición de momento angular en la mecánica clásica	11
Figura 2.4	Figura auxiliar para el cálculo del momento angular de objeto en rotación	13
Figura 2.5	Resultados esperados del experimento de Stern-Gerlach usando física clásica	20
Figura 2.6	Línea de tiempo: hitos en física moderna	23
Figura 3.1	Cursos de física cuántica a nivel de pregrado en la UNAH	43
Figura 3.2	Cursos de física cuántica a nivel de posgrado en la UNAH	45
Figura 3.3	Modelos esquemáticos usados por diversos autores para el dispositivo de Stern-Gerlach	63
Figura 3.4	Modelos esquemáticos propuestos para dispositivos de Stern-Gerlach	66
Figura 3.5	Modelo esquemático para Experimento 1: preparación de estados .	76
Figura 3.6	Modelo esquemático para Experimento 2: superposición de estados	78
Figura 3.7	Modelo esquemático para Experimento 3: probabilidad total	95
Figura 3.8	Modelo esquemático para Experimento 4: interferencia	97
Figura 4.1	Datos generales de los alumnos del curso MFS614	137
Figura 4.2	Condiciones de estudio de los estudiantes	138
Figura 4.3	Interfase principal del simulador SPINS	145
Figura 4.4	Aula de la Maestría en Física utilizada para la asignatura de Física Cuántica	147

Figura 4.5 Capturas del aula virtual montada en edX 149

Índice de tablas

Tabla 3.1	Contenido de libros tradicionales para la enseñanza de la mecánica cuántica	39
Tabla 3.2	Libros con elementos pedagógicos basados en experimentos de Stern- Gerlach	58
Tabla 3.3	Postulados de la mecánica cuántica	103
Tabla 4.1	Estructura del curso Física Cuántica - MFS614	134

Capítulo 1

Introducción

El experimento llevado a cabo por Otto Stern y Walther Gerlach en 1922 se propone en esta tesis como alternativa y/o complemento para el mejoramiento de la enseñanza de la física cuántica a nivel de grado y posgrado en la Universidad Nacional Autónoma de Honduras. La mecánica cuántica es una rama fundamental de la física moderna, imprescindible para cualquier profesional de la física; además, la materia ha conllevado numerosas contribuciones a la sociedad actual: el desarrollo de la electrónica tal como la conocemos hoy día (basada en física del estado sólido), la computación cuántica, criptografía, radiología, entre otras. Una base sólida en física cuántica brinda a los estudiantes las herramientas necesarias para aprender teorías más avanzadas como la electrodinámica cuántica (QED), cromodinámica cuántica (QCD) u otras teorías cuánticas de campos (QFT); además, les permite aspirar a estudios, investigaciones o colaboraciones internacionales en el campo de la física de partículas, astrofísica o física de materia condensada.

En el desarrollo de la física moderna, la importancia del experimento de Stern-Gerlach es notable; dentro de su legado se puede mencionar lo siguiente:

- Motivó a experimentos similares, que llevaron a demostrar que el momento angular de algunos núcleos atómicos está cuantizado (espín nuclear).
- Conllevó al mecanismo fundamental usado para la producción de imágenes por resonancia magnética, tan importante hoy día en el rubro de la salud.

- La observación indirecta del momento angular intrínseco o espín, que se puede advertir en este experimento, representa una evidencia sencilla pero elegante de la cuantización en física cuántica.
- Los postulados de la mecánica cuántica moderna se manifiestan en experimentos similares al original.
- En el experimento se utilizó un haz atómico bien alineado, lo cual fue importante para el posterior desarrollo del maser, laser, bombeos ópticos e incluso relojes atómicos.

En el primer apartado de este trabajo se describe el experimento y se citan datos históricos relevantes. Se presentan con detalle los conceptos, cantidades físicas involucradas y explicación (fallida) de los resultados del experimento desde la óptica de la física clásica. Esto parece ser algo poco común en la literatura del tema, la cual asume los resultados como conocidos. Sin embargo, la teoría desarrollada podría resultar de utilidad para los estudiantes de grado de la carrera de física, astrofísica e ingeniería que cursan asignaturas de mecánica clásica y electrodinámica clásica. También, en este apartado se discuten los resultados del experimento desde el marco de la teoría semi-clásica de Bohr de la época y de la física moderna, lo cual involucra mecánica cuántica relativista y cromodinámica cuántica. Ha transcurrido un siglo desde el experimento original y aún se siguen publicando trabajos referentes a la dinámica de las partículas de plata usadas en el experimento; se incluye una revisión de la literatura relacionada, desde el marco de trabajo de la mecánica cuántica.

El siguiente capítulo aborda la contribución que el experimento puede proveer en el proceso enseñanza-aprendizaje de la materia, tal como lo percibieron autores como Feynman, Sakurai, Townsend, entre otros. Esta metodología que hace uso de experimentos de Stern-Gerlach irrumpe en la enseñanza tradicional de la materia y, si se complementa con herramientas computacionales propias de nuestra era, puede llegar a impactar positivamente en la comprensión conceptual de los alumnos. Se define en este apartado lo que se entiende por enseñanza tradicional de la mecánica cuántica y se revisan los currículos/tendencias de enseñanza en universidades internacionales y en la UNAH; además, se repasan

algunos informes que dan a conocer las dificultades comunes de los alumnos a nivel global y local, justificando así la búsqueda e incorporación de nuevas metodologías. Finalmente, se presentan propuestas de implementaciones basadas en experimentos de Stern-Gerlach para fortalecer la comprensión de los alumnos de la UNAH a nivel de grado y posgrado, según las dificultades encontradas por estudios previos, como el de Turcios [1]

En el capítulo cuatro se describe una intervención educativa basada en experimentos de Stern-Gerlach realizada para la asignatura Física Cuántica (MFS614) de la Maestría en Física General de la UNAH. Esta intervención se llevó a cabo durante el primer período académico de 2016, con un mes de duración y veinte horas de trabajo presencial, aproximadamente; en esta implementación se adoptó el enfoque de enseñanza conocido como “Spin-First”, con la que se introducen los principios de la mecánica cuántica moderna a través de experimentos de Stern-Gerlach. Esta metodología, que diverge de lo tradicional, se combinó con herramientas computacionales de vanguardia para la educación, como ser el entorno virtual de aprendizaje Open edX y un simulador de la Universidad de Oregon escrito en JAVA, llamada SPINS. A través de una encuesta realizada, este estudio exploratorio reveló que el ochenta por ciento de los alumnos participantes resaltaron elevada satisfacción en su proceso de aprendizaje: consideraron el enfoque usado más enriquecedor en comparación con otros meramente teóricos, como el ofrecido por el MIT a través de su plataforma MOOC edX: 8.05.1x. Una evaluación especial reveló que el formalismo y los conceptos fundamentales necesarios fueron bien asimilados por los alumnos. Los resultados obtenidos motivan a realizar más investigación en el área enseñanza-aprendizaje de la materia.

Capítulo 2

El experimento de Stern-Gerlach

2.1. Introducción

En este capítulo se describe el experimento de Stern-Gerlach, su relevancia en el contexto histórico en el cual se llevó a cabo, y la influencia que ha tenido en desarrollos posteriores de la física moderna. Se exponen las motivaciones y objetivos que perseguían los autores, así como la explicación teórica desde el punto de vista de la física clásica, de la teoría semiclassical de la época y de la física moderna. Los resultados del experimento solo pueden ser explicados con precisión usando esta última teoría; el uso de mecánica cuántica relativista (ecuación de Dirac) y cromodinámica cuántica es necesario. Se ofrece una revisión de la literatura relacionada con el entendimiento del experimento a la fecha usando éstos enfoques. La teoría presentada es necesaria para describir el uso de experimentos de Stern-Gerlach en el ámbito de la educación de la física, lo cual se detalla en capítulos posteriores.

Finalmente, se presentan desarrollos puntuales y recomendaciones pedagógicas en cuanto al uso del experimento para abordar la transición de la física clásica a la física moderna. Éstas orientaciones pretenden servir para justificar el uso del enfoque conocido como *Spin-First* para la enseñanza de mecánica cuántica, con el cual los alumnos conocen de su formalismo y postulados previo a la presentación de la ecuación de Schrödinger y funcio-

nes de onda, lo cual tradicionalmente se enseña primero. Además, pueden ser utilizados como material didáctico para instructores que elijan esta vía de enseñanza de la mecánica cuántica.

2.2. Descripción del experimento

El experimento de Stern-Gerlach se llevó a cabo en 1922 por Otto Stern y Walther Gerlach, cuando las teorías semiclásicas de Bohr para el átomo de hidrógeno (1913) y su generalización por Sommerfeld y Debye para átomos hidrogénicos (1916) predominaban. Era un época de transición de la física clásica hacia la física moderna: el cuanto de energía ya había sido teorizado por Planck, el efecto fotoeléctrico explicado por Einstein, entre otros acontecimientos relevantes. La Fig. 2.6 muestra una línea de tiempo de algunos hitos mayores en la transición de la física clásica a la física moderna y el posicionamiento del experimento de Stern-Gerlach.

De especial interés para enmarcar el experimento de Stern-Gerlach es la teoría atómica de Bohr, parte de lo que se conoce ahora como teoría cuántica antigua (1900-1925). Se listan a continuación dos postulados pertinentes de la teoría atómica de Bohr¹:

- El único electrón del átomo de hidrógeno gira alrededor del núcleo central en ciertas órbitas circulares discretas, debido a la influencia de la fuerza de atracción de Coulomb.
- Las órbitas permitidas para el electrón son aquellas para las cuales el momento angular L del electrón es tal que:

$$L = n\hbar = n\frac{h}{2\pi}, \quad n = 1, 2, 3 \quad (2.2.1)$$

Algunos años después (en 1916), de manera independiente Arnold Sommerfeld y Peter Debye introdujeron dos números cuánticos adicionales l (número cuántico orbital) y m_l

¹Para una descripción más detallada de la teoría atómica de Bohr, véase el libro de Steven Weinberg *Foundations of Modern Physics*, Cambridge University Press, páginas 77-87

(número cuántico magnético), que se relacionaban con el momento angular y sus componentes de acuerdo a las siguientes ecuaciones:

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar, \quad l = 0, 1, 2, 3 \quad (2.2.2)$$

$$L_z = m_l\hbar, \quad m_l = -l, -l+1, -l+2, \dots, l-2, l-1, l \quad (2.2.3)$$

A esta última relación Ec. (2.2.3) se le conocía como “cuantización espacial” (*space quantization*, en inglés): un átomo en presencia de un campo magnético tendrá una componente cuantizada de momento angular en la dirección del campo. Ciertamente, el momento angular está limitado a un conjunto de valores, pero son las *componentes* del momento angular que toman valores discretos. Por ello, el término “cuantización espacial” (usado en teoría cuántica antigua) cayó en desuso y se prefiere el término “cuantización direccional”. El experimento de Stern-Gerlach pretendía brindar evidencia experimental de la cuantización espacial.

Los autores pensaban que en presencia de un campo magnético átomos de un gas hidrogénico serían magnéticamente birrefringentes, ya que los electrones orbitarían en un plano perpendicular al campo magnético. Esto limitaría al momento angular a tener valores de $\pm\hbar$. No está claro por qué pensaban lo anterior, pero estaban convencidos que en presencia de un campo magnético el haz de partículas se dividiría en dos. Atribuyeron, pues, un momento angular neto a las partículas de plata, lo cual resultó ser incorrecto, como se expone posteriormente. De cualquier manera la teoría clásica no predecía que el haz de partículas se dividiera en dos; predecía más bien un *continuo* de partículas.

La Fig. 2.1 muestra la configuración esquemática simplificada del experimento, con algunos detalles técnicos relevantes. En el laboratorio se tenía un horno a 1000°C del cual escapaba un haz de átomos de plata producidos por efusión de vapor metálico, colimados por rendijas de 0.03 mm de ancho. El haz era dirigido a un imán de 3.5 cm de largo, 0.1 T de magnitud y gradiente 10 T/cm. Uno de los polos del imán era plano, pero el otro afilado. Esto aseguraba un campo magnético no homogéneo, requerido para generar una fuerza sobre las partículas, según se discute de forma matemática posteriormente. Ante la interacción de las partículas con el campo magnético generado por el imán se produjeron

desviaciones del haz original; de hecho, el haz se dividió en dos, con separaciones máximas de 0.2 mm. Las partículas se hacían visibles en un colector de vidrio [2]. En la Fig. 2.2 se muestra una famosa postal enviada por Walther Gerlach a Niels Bohr, una vez culminaron exitosamente el experimento, en la cual se aprecia la separación. Notar que la fotografía de la derecha está girada 90° en relación a Fig. 2.1. La fotografía de la izquierda corresponde a lo observado cuando no existe campo magnético. Se puede apreciar el ancho finito de las ranuras colimadoras. Es curioso mencionar que tomó más de un año completar con éxito el experimento a pesar de su aparente simplicidad, por cuestiones de financiamiento.

Se discute a continuación la predicción de los resultados del experimento según la física clásica.

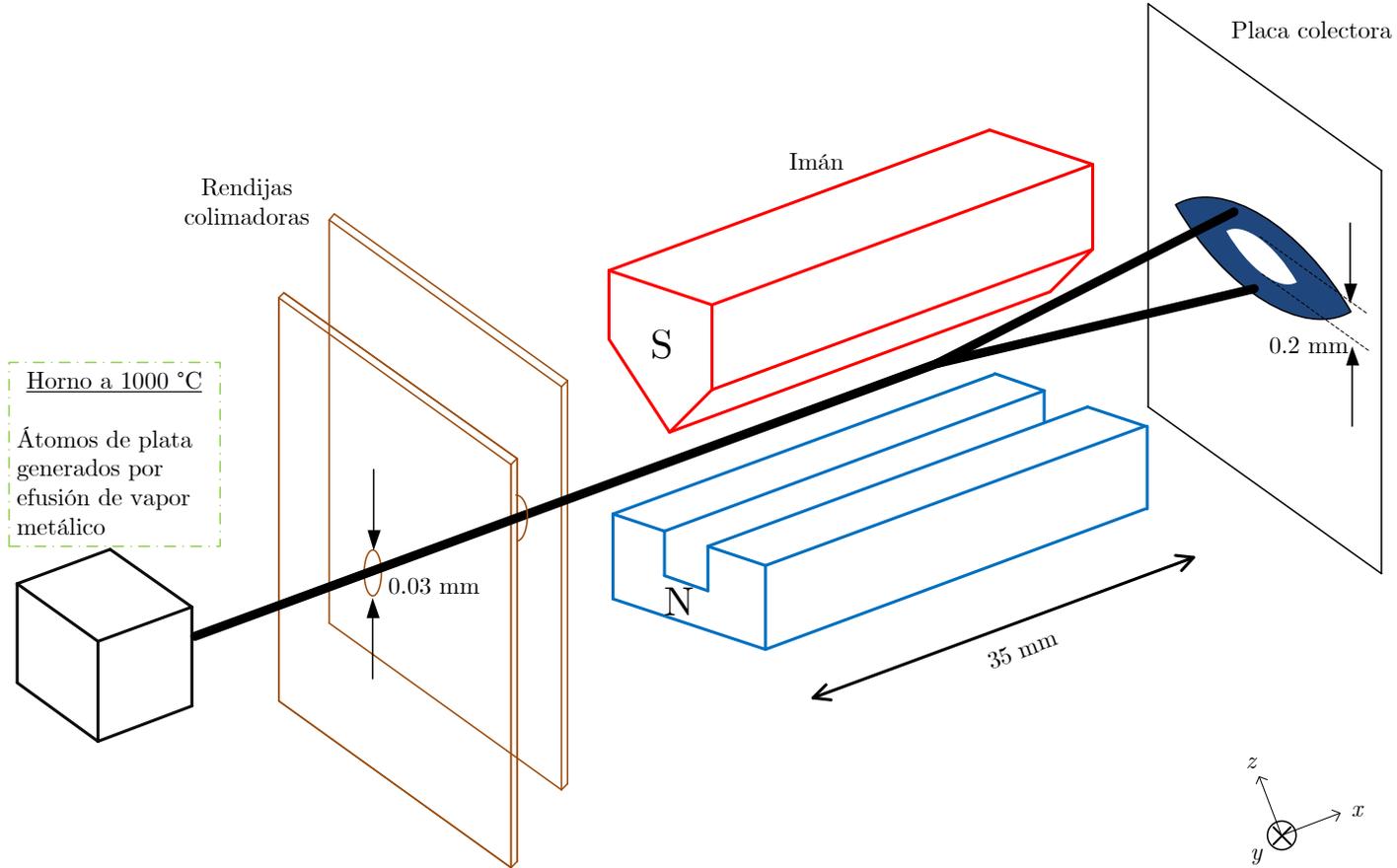


Figura 2.1: Representación del experimento original de Stern-Gerlach

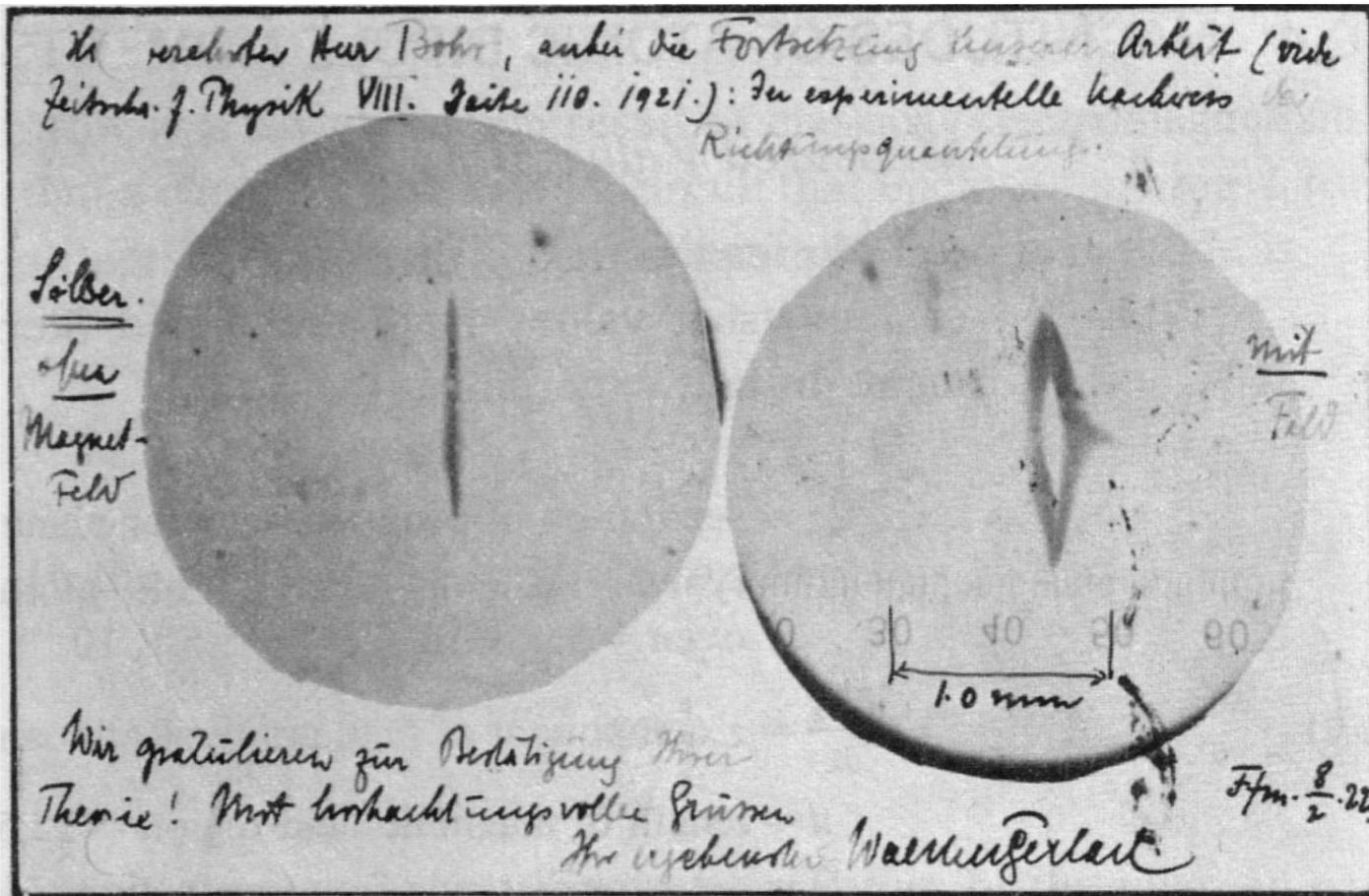


Figura 2.2: Postal enviada por Gerlach a Bohr (AIP Emilio Segrè Visual Archives)

2.3. Nociones clásicas

Un primer acercamiento para predecir los resultados del experimento de Stern-Gerlach se puede ofrecer mediante la teoría de la física clásica, que hasta antes de 1900 era la teoría predominante, y con la cual se podían explicar los fenómenos físicos observados hasta entonces.

En el plan de estudios vigente [3], un estudiante de pregrado de la UNAH que ha cursado o se encuentra cursando FS415 - Electricidad y Magnetismo II (Ver Apéndice A), sin necesidad de haber cursado FS371 - Física Moderna, está en la capacidad de formular la predicción del experimento basado en sus conocimientos y experiencia obtenida. Con ello, debe llegar a la conclusión que la teoría falla, con relación a lo observado experimentalmente.

Llevar a cabo este ejercicio supondrá motivación para explorar nuevas teorías que emulen los resultados del experimento. Otro elemento importante al abordar el experimento desde el enfoque de la física clásica yace en que muchos de los conceptos de la física moderna parten de ideas de la física clásica. El momento angular de la mecánica clásica y el momento magnético de la electrodinámica clásica de campos, son conceptos clave en la descripción del experimento de Stern-Gerlach, éstos se introducen a continuación.

2.3.1. Definición de momento angular

En la sección 2.2 se mencionó que el experimento de Stern-Gerlach tenía como objetivo probar si el momento angular de los átomos neutros individuales de plata estaba cuantizado en la presencia de un campo magnético. Servirá, por tanto, abordar el concepto de momento angular en el contexto de la física clásica.

La noción de momento angular surge del *Principia* de Newton (1,687). Es una cantidad vectorial que para una partícula clásica en movimiento se define como sigue:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{2.3.1}$$

donde \mathbf{r} es el vector posición de la partícula y \mathbf{p} su momento lineal, relacionado con el

vector velocidad \mathbf{v} mediante $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ (ver Fig. 2.3). Ya que el vector posición depende de la elección del origen, también el momento angular. Por tanto, formalmente se debe hablar de momento angular *relativo* al origen O elegido.

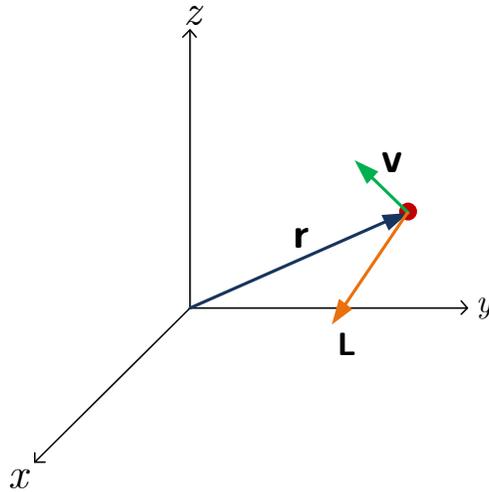


Figura 2.3: Definición de momento angular

Un caso que será de interés es el de una partícula girando en una trayectoria circular plana; en esa situación, los vectores \mathbf{r} y \mathbf{p} son mutuamente perpendiculares, y su momento angular resulta:

$$L = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = rp \sin 90^\circ = rp = mvr \quad (2.3.2)$$

Considérese ahora cómo cambia el vector momento angular \mathbf{L} en el tiempo:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{dt} \quad (2.3.3)$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p}}_0 + \mathbf{r} \times \underbrace{\frac{d\mathbf{p}}{dt}}_{\mathbf{F}} \quad (2.3.4)$$

El primer término a la derecha de la última ecuación resulta cero porque el vector velocidad $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ es paralelo a $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, claro está. El factor $d\mathbf{p}/dt$ en el segundo término es la fuerza neta actuando sobre la partícula, según la segunda ley de Newton.

Por tanto:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\tau} \quad (2.3.5)$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} \quad (2.3.6)$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ se define como el momento de torsión alrededor de O ejercido sobre la partícula debido a la fuerza \mathbf{F} .

Ésta última ecuación [Ec. (2.3.6)] tiene una forma muy similar a la segunda ley de Newton:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (2.3.7)$$

De hecho ambas juegan un papel importante en la dinámica de partículas, pero la Ec. (2.3.6) cobra mayor relevancia aplicable a objetos extendidos que giran alrededor de algún punto fijo en el espacio.

Si se tiene un sistema de partículas, el momento angular total se define como la suma o superposición de los momentos angulares de cada una de las partículas alrededor de un origen O . Se puede demostrar que el momento angular neto de un sistema de partículas interactuando mediante fuerzas centrales sujetas a un torque externo neto $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$ es:

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{tot}}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} \quad (2.3.8)$$

la cual viene a ser la generalización de (2.3.6), así como la ecuación (2.3.7) se puede generalizar para un sistema de partículas mediante:

$$\frac{d\mathbf{p}_{\text{tot}}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (2.3.9)$$

donde \mathbf{F}_{ext} es la fuerza externa neta sobre un sistema de partículas con momento neto \mathbf{p}_{tot} .

2.3.2. Momento angular para objetos en rotación

A partir de la definición de momento angular para una partícula, es posible determinar el momento angular para un objeto extendido girando alrededor de un eje fijo. En principio, dicho sistema se puede considerar un conjunto de muchas partículas, supóngase N

partículas. La Fig. 2.4 muestra la i ésima partícula, cuyo momento angular será:

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad (2.3.10)$$

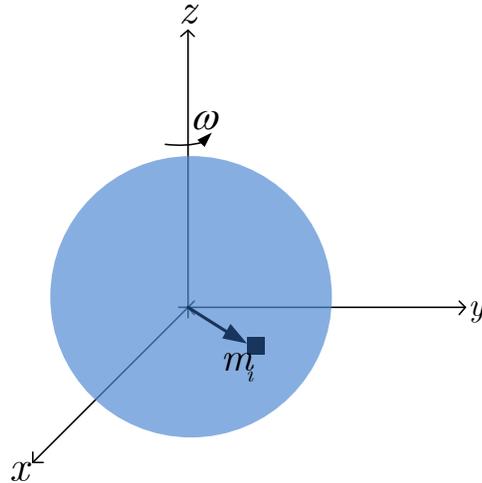


Figura 2.4: Figura auxiliar para el cálculo del momento angular de un objeto en rotación

El momento angular neto del sistema será la suma de los momentos de las N partículas:

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_i = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad (2.3.11)$$

Se calcula entonces el momento angular para una partícula y luego se suman todas las contribuciones para obtener el momento total del sistema de partículas que componen el objeto. Usando coordenadas cilíndricas circulares:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{z}} \quad (2.3.12)$$

$$\mathbf{r}_i = (\rho_i, z_i) \quad (2.3.13)$$

$$\mathbf{v}_i = \omega \hat{\mathbf{z}} \times (\rho_i, z_i) \quad (2.3.14)$$

$$\mathbf{v}_i = \omega \rho_i \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (2.3.15)$$

De manera que el momento angular de la i -ésima partícula será:

$$\mathbf{L}_i = m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \quad (2.3.16)$$

$$\mathbf{L}_i = m_i(\rho_i, z_i) \times \omega \rho_i \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (2.3.17)$$

$$\mathbf{L}_i = m_i \omega \rho_i^2 \hat{\mathbf{z}} - m_i \omega \rho_i z_i \hat{\boldsymbol{\rho}} \quad (2.3.18)$$

Para el sistema, por tanto:

$$\mathbf{L} = \sum L_i = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad (2.3.19)$$

$$\mathbf{L} = \sum m_i \omega \rho_i^2 \hat{\mathbf{z}} - \sum m_i \omega \rho_i z_i \hat{\boldsymbol{\rho}} \quad (2.3.20)$$

O bien:

$$\mathbf{L} = \left(\sum m_i \rho_i^2 \right) \omega \hat{\mathbf{z}} - \left(\sum m_i \omega \rho_i z_i \right) \omega \hat{\boldsymbol{\rho}} \quad (2.3.21)$$

Al primer término entre paréntesis a la derecha de la ecuación se le conoce como momento de inercia alrededor de z , mientras que el segundo es un producto de inercia. Notamos que ambos son factores de proporcionalidad entre las componentes respectivas de \mathbf{L} y $\boldsymbol{\omega}$. Por ejemplo:

$$L_z = I_z \omega_z = I_z \omega \quad (2.3.22)$$

$$I_z = \sum m_i \rho_i^2 \quad (2.3.23)$$

Es posible demostrar que si el momento angular no es paralelo con un eje espacial elegido (z en este caso), entonces la expresión general para el momento angular se sintetiza con el siguiente producto matricial:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad (2.3.24)$$

donde a la matriz \mathbf{I} se le conoce como *tensor de inercia*, definido por:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.3.25)$$

Todo lo descrito al momento es del conocimiento de cualquier estudiante que haya cursado el curso de FS381 - Mecánica Clásica I en el pregrado de Física en la UNAH.

Estos resultados se usarán en breve, pero antes conviene repasar un concepto de interés de la electrodinámica clásica: el momento dipolar magnético.

2.3.3. El momento dipolar magnético

Suponga la partícula mostrada en la Fig. 2.3 tiene ahora una carga neta q , además de masa m . De acuerdo a la teoría electromagnética clásica, cualquier corriente distribuida en un volumen V , con elemento diferencial $d\tau$, tiene un momento dipolar magnético $\boldsymbol{\mu}$ asociado, dado por:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{J} d\tau \quad (2.3.26)$$

En la literatura de electrodinámica, también es común utilizar \mathbf{m} en lugar de $\boldsymbol{\mu}$ para denotar el momento dipolar magnético, pero se prefiere éste último símbolo ya que es más utilizado en la literatura de la mecánica cuántica. \mathbf{J} representa la densidad de corriente volumétrica de la distribución particular.

Para el caso de una corriente estacionaria I distribuida en un espira plana de área S , o una partícula moviéndose con rapidez constante no relativista en una trayectoria cerrada, la expresión anterior se convierte en:

$$\boldsymbol{\mu} = IS\hat{\mathbf{n}} \quad (2.3.27)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector normal a la espira plana definida según la regla de la mano derecha (dedos girados en dirección de la corriente). Por ejemplo, si se tiene una partícula cargada moviéndose en una trayectoria circular de radio r , la magnitud momento magnético asociado será:

$$\mu = IS = \frac{q}{\Delta t} \pi r^2 \quad (2.3.28)$$

Si se considera ahora la Ec. (2.3.2) obtenida para el momento angular de una partícula,

se puede relacionar su momento angular con el momento magnético de la siguiente manera:

$$L = mvr \quad (2.3.29)$$

$$\mu = \frac{q}{\Delta t} \pi r^2 = \frac{q}{\Delta t} \left(\frac{2\pi r}{2} \right) r \quad (2.3.30)$$

$$\mu = \frac{qvr}{2} = \frac{q}{2m} L \quad (2.3.31)$$

Encontramos aquí una primera relación entre el momento magnético y el momento angular. Veremos que relaciones similares se obtendrán siempre entre estas dos cantidades. A continuación se presenta el cálculo del momento dipolar magnética para una esfera girando alrededor de un eje fijo.

2.3.4. Momento angular para esfera cargada girando

Supongamos la esfera (asumir radio a) de la Fig. 2.4 está cargada uniformemente en todo su volumen con una carga Q . Se puede encontrar el momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ en base a la definición 2.3.26 de la siguiente manera.

Una carga ρ_{ch} moviéndose con velocidad \mathbf{v} genera una densidad de corriente volumétrica dada por:

$$\mathbf{J} = \rho_{ch} \mathbf{v} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \mathbf{v} \quad (2.3.32)$$

$$= \frac{3Q}{4\pi a^3} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (2.3.33)$$

$$= \frac{3Q}{4\pi a^3} (\omega \hat{\mathbf{z}} \times r \hat{\mathbf{r}}) \quad (2.3.34)$$

$$= \frac{3Q\omega r}{4\pi a^3} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (2.3.35)$$

Sustituyendo en la definición de momento magnético Ec. (2.3.26):

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{J} d\tau \quad (2.3.36)$$

$$= \frac{1}{2} \int r \hat{\mathbf{r}} \left(\times \frac{3Q\omega r}{4\pi a^3} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) d\tau \quad (2.3.37)$$

$$= \frac{1}{2} \int r \hat{\mathbf{r}} \left(\times \frac{3Q\omega r}{4\pi a^3} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (2.3.38)$$

Sabiendo que $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\hat{\boldsymbol{\theta}}$, se obtiene:

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{1}{2} \int r \left(\frac{3Q\omega r}{4\pi a^3} \sin \theta \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.3.39)$$

Como $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ varía con la integración pasamos a coordenadas cartesianas:

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{1}{2} \int r \left(\frac{3Q\omega r}{4\pi a^3} \sin \theta \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi (\cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta \hat{\mathbf{z}}) \quad (2.3.40)$$

Al apreciar los límites de integración:

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a r \left(\frac{3Q\omega r}{4\pi a^3} \sin \theta \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi (\cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta \hat{\mathbf{z}}) \quad (2.3.41)$$

se observa que solo la componente en z será diferente de cero, ya que el $\cos \phi$ y $\sin \phi$ integran a cero en un período:

$$\mu_x = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a r \left(\frac{3Q\omega r}{4\pi a^3} \sin \theta \cos \theta \cos \phi \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (2.3.42)$$

$$= -\frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi}_0 \int_0^\pi \int_0^a r \left(\frac{3Q\omega r}{4\pi a^3} \sin \theta \cos \theta \right) r^2 \sin \theta dr d\theta = 0 \quad (2.3.43)$$

$$\mu_y = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a r \left(\frac{3Q\omega r}{4\pi a^3} \sin \theta \cos \theta \sin \phi \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (2.3.44)$$

$$= -\frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi}_0 \int_0^\pi \int_0^a r \left(\frac{3Q\omega r}{4\pi a^3} \sin \theta \cos \theta \right) r^2 \sin \theta dr d\theta = 0 \quad (2.3.45)$$

Finalmente, la integral en $\hat{\mathbf{z}}$ resulta:

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a r \left(\frac{3Q\omega r}{4\pi a^3} \sin \theta \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi (-\sin \theta \hat{\mathbf{z}}) \quad (2.3.46)$$

$$= \hat{\mathbf{z}} \frac{1}{2} \left(\frac{3Q\omega}{4\pi a^2} \right) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a r^4 \sin^3 \theta dr d\theta d\phi \quad (2.3.47)$$

$$= \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{3Q\omega}{8\pi a^2} \right) \left(\frac{a^5}{5} \right) (2\pi) \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \quad (2.3.48)$$

$$= \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{3Q\omega}{8\pi a^2} \right) \left(\frac{a^5}{5} \right) (2\pi) \left(\frac{4}{3} \right) \quad (2.3.49)$$

$$= \boxed{\frac{1}{5} Q a^2 \omega \hat{\mathbf{z}}} \quad (2.3.50)$$

Ahora, de la Ec. (2.3.22) recordamos que el momento angular está dado por:

$$L = I\omega \quad (2.3.51)$$

Siendo una esfera en rotación, el momento de inercia alrededor de un eje que pasa por su centro de masa es $I = \frac{2}{5}ma^2$, de modo que:

$$I = \frac{2}{5}ma^2 \rightarrow a^2 = \frac{5}{2} \frac{I}{m} \quad (2.3.52)$$

Sustituyendo en lo encontrado para el momento magnético Ec. (2.3.26), se obtiene la relación con su momento angular:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{5}Qa^2\omega\hat{\mathbf{z}} \quad (2.3.53)$$

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{5}Q \left(\frac{5}{2} \frac{I}{m} \right) \omega\hat{\mathbf{z}} \quad (2.3.54)$$

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{Q}{2m} I\omega\hat{\mathbf{z}} \quad (2.3.55)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} = \frac{Q}{2m} \mathbf{L}} \quad (2.3.56)$$

la cual es idéntica a la Ec. (2.3.31). El mismo ejercicio se puede realizar para otras distribuciones; por ejemplo, para un objeto cargado con carga Q y masa m , se obtiene el mismo resultado. Se puede generalizar lo anterior al afirmar que un cuerpo cargado girando alrededor de un eje de simetría, cuya masa y carga se distribuyen uniformemente, tendrá siempre un factor de proporcionalidad:

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{L} \quad (2.3.57)$$

donde $\gamma = \frac{Q}{2m}$. En general, a la constante de proporcionalidad γ se le conoce como relación giromagnética.

2.3.5. Discusión

En las secciones previas se encontró la relación entre el momento magnético y el momento angular de un objeto o partícula cargada. Dos casos de interés: el de una partícula

girando en una trayectoria circular a velocidad constante y el una esfera cargada girando alrededor de su propio eje, resultaron tener la misma relación entre estas cantidades. Comúnmente se asocia el término de “momento angular orbital” al caso de la partícula girando en la trayectoria circular, mientras que al momento angular de la esfera se le conoce como *momento angular de espín*. Se debe notar, sin embargo, que ambos conceptos vienen de una misma definición [Ec. (2.3.1)] por lo que no son cantidades distintas, clásicamente hablando.

Si tomamos estas ideas para aplicarlas a nuestras partículas de plata [Ag] del experimento de Stern-Gerlach, podemos esperar una relación similar a las encontradas:

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{L} = g \frac{q}{2m} \mathbf{L}} \quad (2.3.58)$$

donde g es una constante de proporcionalidad a determinar experimentalmente.

2.3.6. Fuerza de un campo externo sobre un dipolo magnético

El siguiente resultado es bien conocido en teoría electrodinámica para la fuerza que un campo externo ejerce sobre un dipolo magnético:

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z} (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) \quad (2.3.59)$$

Volviendo al experimento de Stern-Gerlach, suponiendo que el campo magnético tiene una componente en z predominante en comparación con B_x y B_y :

$$F_z = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (2.3.60)$$

De aquí que la componente en z del momento magnético del átomo de plata será:

$$\mu_z = \mu \cos \theta \quad (2.3.61)$$

donde θ es el ángulo entre eje vertical z y el momento magnético $\boldsymbol{\mu}$.

Observamos que con esta teoría clásica lo que se espera es tener valores continuos para μ_z y, por tanto, desviaciones continuas a lo largo de z , como lo muestra la Fig. 2.5.

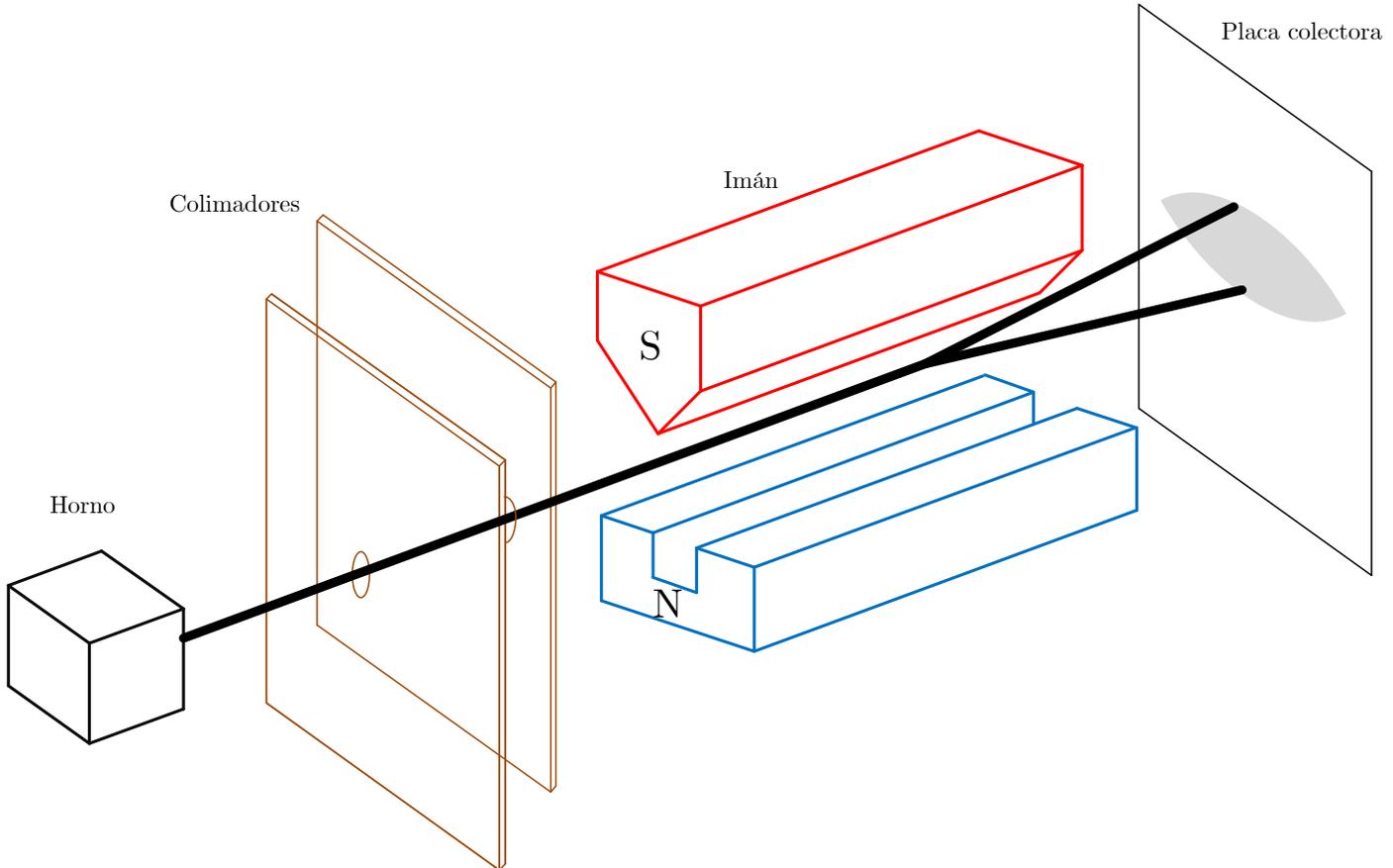


Figura 2.5: Resultados esperados del experimento de Stern-Gerlach usando física clásica

2.4. Análisis del experimento en base a teoría cuántica de la época

Regresando a la teoría de la época, remitirse a la Fig. 2.6: los números cuánticos principal n , acimutal u orbital l y magnético m_l ya se habían teorizado previo al experimento de Stern-Gerlach. El número cuántico de espín aún no se había propuesto, sino hasta 1925 por Pauli. Inicialmente Stern pensó el experimento con gas compuesto de átomos de hidrógeno, con un solo electrón por átomo, de tal manera que el electrón orbitaría en un plano perpendicular el campo magnético. Esto limitaría a dos valores posibles para el momento angular: $\pm\hbar$ según el modelo de Bohr [ver Ec. (2.2.1)]. Aunque no se sabe con certeza por qué lo pensaba así, Stern estaba convencido que el haz de hidrógeno se separaría en dos en un campo magnético [5], contrario a lo que se esperaba con la teoría clásica: los dipolos de electrones orientados aleatoriamente de tal forma que se obtiene siempre un continuo pero más ancho, como descrito en la sección anterior. Esto demostraría la cuantización espacial.

De hecho, el experimento de Stern-Gerlach y experimentos posteriores encontraron que el valor del momento dipolar magnético de cada una de las partículas era aproximadamente un magnetón de Bohr $\mu \propto \mu_B$:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = g \frac{e}{2m} \mathbf{L} \quad (2.4.1)$$

$$(2.4.2)$$

Como creían que el valor del momento angular era $L = \hbar$:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = g \frac{e}{2m} \hbar \rightarrow \boxed{g = 1}$$

Sabemos hoy día que el valor $g = 1$ es incorrecto, su valor teórico se puede encontrar mediante mecánica cuántica relativista (RQM). Para un electrón, el valor correcto y predicho es $g = 2$ como se muestra en la sección siguiente.

Es importante reconocer que la teoría de Bohr indicaba correctamente que solo existía un electrón externo en átomos de plata, de manera que se usó este elemento en lugar de

hidrógeno.

No fue hasta 1925 que Kronig, Uhlenbeck y Goudsmit teorizaron el espín. Kronig fue quien postuló inicialmente, en el contexto del efecto Zeeman anómalo, que el electrón posee un momento angular adicional al orbital con valor $\hbar/2$. Este momento angular, según Kronig, era causado por la rotación del electrón alrededor de su propio eje. Sin embargo, se encontró con problemas teóricos y su teoría fue desestimada hasta que Uhlenbeck y Goudsmit retomaron el tema:

En términos clásicos, una *partícula* no puede tener momento angular de espín. Partiendo de un modelo de esfera de radio a y tomando el límite cuando el radio tiende a cero se obtiene un momento angular de espín cero:

$$L = S = I\omega = \frac{2}{5}Ma^2\omega = 0, \quad \text{si } a \rightarrow 0 \quad (2.4.3)$$

Pero el problema del modelo usado por Kronig no sera ese. Más bien, tal como Lorentz creía, consideraban el electrón tenía un radio finito dado por:

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \quad (2.4.4)$$

Cuando se determina la velocidad para un punto en la superficie (ver Fig. 2.4, ésta viola relatividad especial al obtenerse un valor:

$$L = m_e v_s r_e = \frac{\hbar}{2} \rightarrow \boxed{v_s \approx 67c} \quad (2.4.5)$$

Debido a esta contradicción, Kronig no publicó sus ideas, desalentado también por Wolfgang Pauli. Meses después, sin embargo, Uhlenbeck y Goudsmit publicaron en esencia misma idea de Kronig en la revista *Naturwissenschaften*, alentados por su tutor Paul Ehrenfest. Era ya demasiado tarde cuando se dieron cuenta de la contradicción descrita. Al final resultó ser correcto que electrón tiene un momento angular adicional al orbital dado por $\hbar/2$, aunque, por supuesto, el modelo de giro alrededor de su propio eje no tiene cabida.

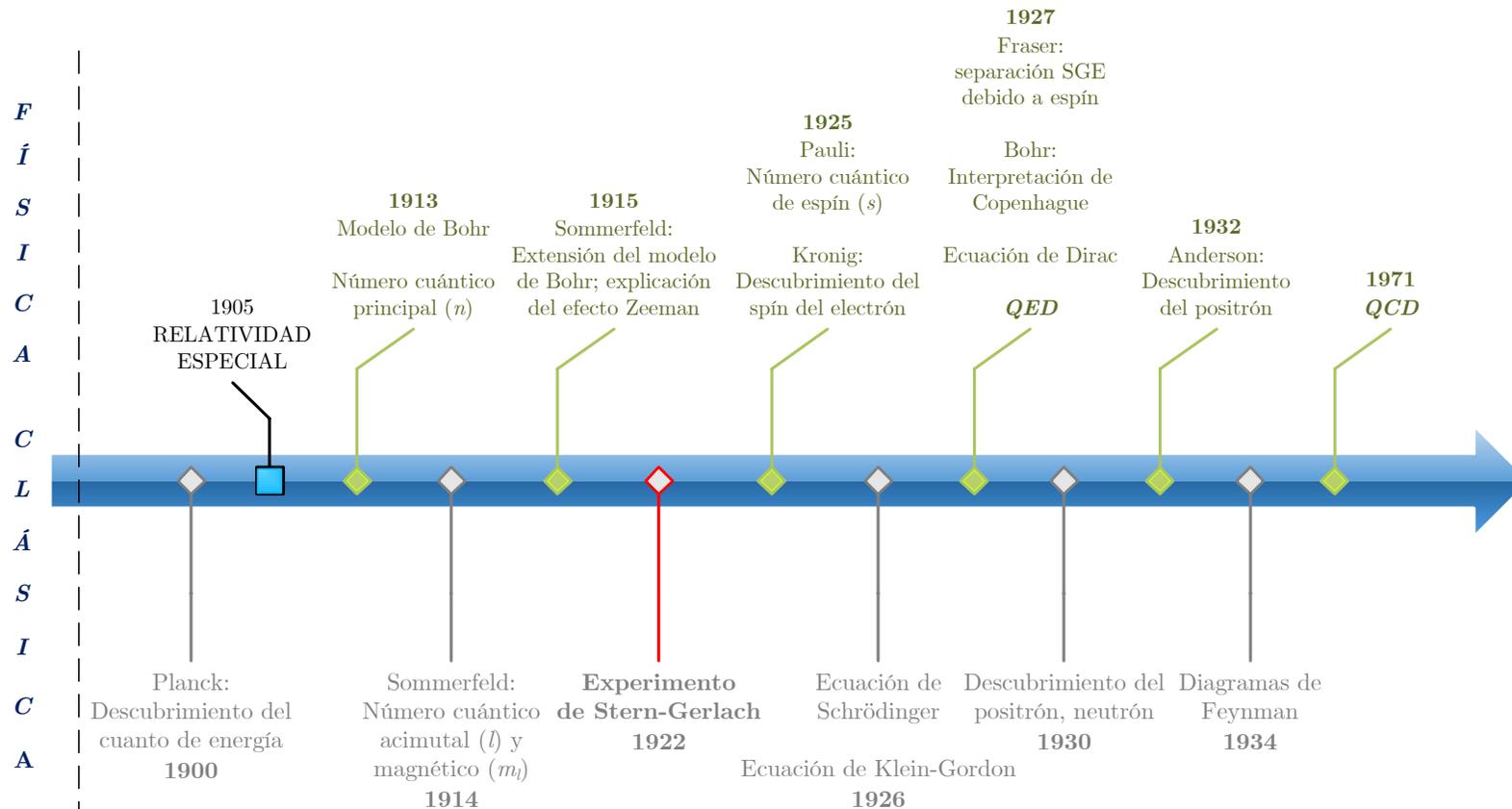


Figura 2.6: Línea de tiempo: hitos en física moderna

2.5. Discusión de resultados usando física moderna

Hoy día se sabe que el momento angular total de un átomo de plata es cero, y se acepta que tiene un momento angular intrínseco, o espín, que no tiene contraparte clásica. De manera tal que el experimento de Stern-Gerlach no tuvo que ver con la demostración de la cuantización del momento angular. En realidad no fue más que una coincidencia. El momento magnético de los átomos de plata se debe únicamente al momento angular de espín, lo que conlleva a la separación del haz en dos. Sin saberlo, Stern y Gerlach encontraron que el momento angular de espín está cuantizado; de hecho, el experimento brindó la primera evidencia experimental de la cuantización del momento angular en general.

De forma interesante, después del experimento de 1922 transcurrieron algunos años antes del descubrimiento del espín del electrón en 1925 y a pesar de ello, no se propuso esta cantidad como lo causante de la separación en el experimento de Stern-Gerlach. No fue sino hasta 1927 que Ronald Fraser notó que el estado fundamental del momento angular orbital y momentos magnéticos asociados eran cero para átomos como el hidrógeno, sodio o plata. Por tanto, el haz no se pudo haber separado debido a la cuantización del momento angular orbital, sino debido al espín del electrón.

Además, hoy día, se sabe que la configuración electrónica del estado fundamental de un átomo de plata es el siguiente:

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 4d^{10} 5s^1 \quad (2.5.6)$$

Por supuesto, esta configuración puede ser explicada por los números cuánticos n , l , m_l y s .

El átomo de plata tiene 47 electrones, 47 protones y 60 o 62 neutrones según el isótopo (estable). Los momentos dipolares de partículas masivas como los nucleones hacen que su momento magnético sea pequeño. En cuanto a los electrones, de la configuración electrónica mostrada arriba se observa que solo hay un electrón de valencia fuera de las capas cerradas. La contribución neta al momento dipolar magnético de los 46 restantes es cero: no hay momento angular orbital ni de espín asociado. Por tanto, el momento dipolar

magnético del átomo de plata se debe en esencia a ese electrón solitario, el cual no tiene momento angular orbital asociado en el estado fundamental, únicamente de espín.

La Ec. (2.3.58) se sigue cumpliendo en el caso del espín del electrón. El momento magnético será:

$$\boldsymbol{\mu} = g \frac{e}{2m} \mathbf{S} \quad (2.5.7)$$

Y los valores de S_z o de cualquier otra componente están cuantizados: $S_z = \pm \hbar/2$ (y no $\pm \hbar$ como esperaban Stern y Gerlach). Con esto se explica el resultado de separación del haz.

2.5.1. Obtención del g-factor para el electrón

El valor de la constante de proporcionalidad o *g-factor* de la Ec. (2.3.58) se puede encontrar con la ecuación de Dirac, en el contexto de la teoría cuántica relativista (RQM), lo cual resulta $g = 2$. Aún con ello, experimentalmente existen desviaciones de este valor, lo cual puede ser explicado con electrodinámica cuántica (QED). A continuación se presenta una forma de determinar el valor de g para el electrón² [6]

Suponga un electrón en un campo electromagnético descrito por el cuadri-potencial $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$, $A_\mu = (\phi, -\mathbf{A})$, la ecuación de Dirac es:

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - qA_\mu) - m] \Psi = 0 \quad (2.5.8)$$

Las matrices gamma de Dirac son:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \quad (2.5.9)$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5.10)$$

²Para un repaso de las ideas, definiciones y ecuaciones básicas de la ecuación de Dirac veáse el libro de J.J. Sakurai *Modern Quantum Mechanics*, 3ra edición, sección 8.2

donde I_2 son matrices identidad de 2×2 y σ_i son las matrices de Pauli de 2×2 que satisfacen:

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} I_2 + i \epsilon_{jkl} \sigma_l \quad (2.5.11)$$

Si examinamos el límite no relativista de la ecuación de Dirac:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix} e^{-iEt} \quad (2.5.12)$$

El sistema de ecuaciones para encontrar a Ψ_+ y Ψ_- son:

$$(E - m - q\phi)\Psi_+ + \boldsymbol{\sigma} \cdot (i\nabla + q\mathbf{A})\Psi_- = 0 \quad (2.5.13)$$

$$(E + m - q\phi)\Psi_- + \boldsymbol{\sigma} \cdot (i\nabla + q\mathbf{A})\Psi_+ = 0 \quad (2.5.14)$$

En este límite no relativista podemos hacer la aproximación:

$$(E + m - q\phi) \approx 2m \quad (2.5.15)$$

De manera que:

$$\Psi_- \approx -\frac{1}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot (i\nabla + q\mathbf{A})\Psi_+ \quad (2.5.16)$$

Sustituyendo, resulta:

$$\left\{ \frac{1}{2m} [\boldsymbol{\sigma} \cdot (i\nabla + q\mathbf{A})]^2 + q\phi \right\} \Psi_+ \approx (E - m)\Psi_+$$

Ahora, ya que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$:

$$\left[\frac{1}{2m} (-i\nabla - iq\mathbf{A})^2 + q\phi - \frac{q}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right] \Psi_+ \approx (E - m)\Psi_+ \quad (2.5.17)$$

Precisamente es la ecuación de Schrödinger con un término extra (el tercero entre paréntesis cuadrados):

$$-\frac{q}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} = -\frac{q}{m} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \quad (2.5.18)$$

donde $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}$ es el operador de momento angular intrínseco o de espín.

Ya que la energía de interacción $U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ identificamos de la expresión arriba que:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{m} \mathbf{S} \quad (2.5.19)$$

Así que considerando la relación general:

$$\boldsymbol{\mu} = g \frac{q}{2m} \mathbf{S} \quad (2.5.20)$$

De aquí que el factor g debe ser igual a 2. La electrodinámica cuántica (QED) permite calcular pequeñas desviaciones, pues según experimentos $g/2 = 1,0011596621884(43)$. Julian Schwinger [7], Feynman y Tomonaga publicaron estas variaciones.

Volviendo al experimento de Stern-Garlich, en base a la separación máxima medida en la placa detectora, energía cinética típica de los átomos saliendo del horno, el gradiente del campo en la dirección en z y la geometría de la configuración es posible estimar que el momento μ_z es aproximadamente un magnetón de Bohr.

Ahora bien, volviendo a la relación relativista con $g = 2$:

$$\mu_z = \mu_B \quad (2.5.21)$$

$$\frac{e\hbar}{2m} = g \frac{e}{2m} L_z \quad (2.5.22)$$

$$= 2 \frac{e}{2m} L_z \quad (2.5.23)$$

$$= \frac{e}{m} L_z \quad (2.5.24)$$

De aquí que $L_z = \hbar/2$. Después del descubrimiento del espín en 1925 (teoría cuántica ya completa) las cosas cambiaron; sin embargo, como mencionado con anterioridad, fue hasta 1927 que Ronald Fraser reinterpretó el experimento notando que el estado fundamental del momento angular orbital y momentos magnéticos asociados eran cero para átomos como el hidrógeno, sodio o plata ($l = 0$). De manera que el único momento angular asociado a los átomos de plata del experimento era el espín. Por tanto, el momento angular corresponde únicamente al momento angular intrínseco o de espín:

$$L_z = S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$$

2.6. Sobre la dinámica de las partículas de plata

2.6.1. Teoría clásica: precesión del momento angular

En secciones previas se ha descrito la relación estrecha entre el momento angular y el momento magnético, cumpliéndose una relación directa proporcional entre ambas cantidades tanto en el caso clásico (objetos cargados girando u orbitando) como para el electrón. En este último caso la relación está cuantizada: ambos momento angular y momento magnético están cuantizados, como sugirió el experimento de Stern-Gerlach.

Desde el punto de vista de la física clásica, conviene ver lo que ocurre con las partículas cargadas en presencia de un campo magnético. Supóngase una partícula con carga q y masa m , el torque generado en presencia de un campo magnético uniforme es:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (2.6.1)$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \quad (2.6.2)$$

Ya que $\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{2m}\mathbf{L}$:

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \frac{q}{2m}\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \quad (2.6.3)$$

El momento de torsión actuando sobre la partícula $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ es perpendicular al momento angular dado por la relación $\mathbf{L} = \frac{2m\boldsymbol{\mu}}{q}$, esto causa precesión alrededor de la dirección del campo magnético con frecuencia $\omega = \frac{qB}{2m}$. O sea, el objeto se comporta como un giroscopio. El ángulo entre el momento angular y el campo externo permanece constante.

2.6.2. Física cuántica: precesión del espín y desviación de átomos

Se muestra a continuación, usando la ecuación de Schrödinger, que el valor esperado del espín muestra precesión, situación análoga a lo que se describió en sección anterior para el momento angular y momento magnético a nivel clásico. Esta relación se predice a partir del teorema de Ehrenfest, el cual establece que valores esperados en mecánica cuántica obedecen leyes clásicas.

La teoría a ser utilizada en la presente sección para la evolución temporal del sistema de espín $1/2$ se discute en la sección 3.5.2. Basta conocer el hamiltoniano del sistema y condiciones iniciales. Un tratamiento similar se puede encontrar en el libro de David H. McIntyre o Griffiths³.

Antes de proceder a realizar cálculos, se adelantan aquí algunas ideas que se verán más adelante.

Tradicionalmente, los autores de libros de mecánica cuántica introducen el concepto de momento angular primero, y luego el de momento angular intrínseco o espín, como un tipo de momento angular. De aquí, que obedece a las mismas relaciones de conmutación (también se pueden deducir de las matrices que representan a S_x , S_y y S_z , ver sección 3.5.2):

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x, \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y \quad (2.6.4)$$

En relación al experimento de Stern-Gerlach, en el cual está involucrado un sistema de espín $1/2$ (electrón), el haz original se separa en dos. Si se tiene una partícula de espín s el haz original se separa en $2s + 1$ haces (e.g. para el fotón $s = 1$, se esperan 3 haces). Y es que el valor de espín s es invariante para cada partícula, lo cual hace la teoría de espín mas sencilla (con relación a momento angular orbital).

Por lo anterior, los sistemas de espín $1/2$ es el sistema cuántico más simple posible, ya que solo admite dos estados. En lugar de tener un espacio de Hilbert infinito, se tiene un espacio vectorial ordinario bidimensional; en lugar de tener ecuaciones diferenciales y funciones especiales (en contraste con momento angular orbital), se tienen matrices de 2×2 y vectores de dos componentes, como se verá más adelante.

Volviendo al espín de partículas, los fermiones tienen espín impar semientero, mientras que los bosones tienen espín entero. Así, s puede tener valores de $0, 1/2, 1, 3/2, \dots$, en el entendido existen estas dos clases de partículas subatómicas. Una medición de la componente de espín en una dirección determinada conllevará al resultado de $-s\hbar$ como mínimo, y $s\hbar$ como máximo, en múltiplos enteros de \hbar . En el caso del experimento original

³Ver Griffiths *Introduction to quantum mechanics*, Prentice Hall, páginas 154-165

de Stern Gerlach cada partícula de plata tenía $s = 1/2$ debido a un solo electrón, como se ha dicho. En cuanto a los valores posibles de la componente de espín en la dirección en z se denota con m al factor que multiplica a \hbar . En realidad, este es el mismo número cuántico magnético m que se introduce en la teoría general de momento angular. Así, un estado cuántico de espín queda descrito por valores de s y m , se denota entonces como $|sm\rangle$. Por cierto, para el espín, los valores propios no son funciones, como ocurre con el momento angular orbital, por eso se suelen usar kets para la notación, como también se hará en el capítulo 3 al presentar el enfoque Spin-First.

Dicho lo anterior, la ecuación de valores propios para los operadores S^2 , S_z y S_{\pm} son:

$$S^2|sm\rangle = \hbar^2 s(s+1)|sm\rangle; \quad S_z|sm\rangle = \hbar m|sm\rangle \quad (2.6.5)$$

$$S_{\pm} = \hbar \sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)} |s(m \pm 1)\rangle \quad (2.6.6)$$

donde $S_{\pm} = S_x + iS_y$ son los útiles operadores escalera introducidos comúnmente en el contexto de momento angular.

Precesión del espín

Supongamos que se tiene un objeto cargado en un campo magnético. Se espera que el momento dipolar magnético sea proporcional a su momento angular de espín, como expuesto en secciones previas:

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{S} \quad (2.6.7)$$

Sabemos además que en el caso del electrón $\gamma = g \frac{q}{2m_e} = \frac{q}{m_e} = -\frac{e}{m_e}$

Si el campo es homogéneo, no hay fuerza actuando sobre la partícula, ya que $\mathbf{F} = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B})$, pero experimenta un torque con energía asociada:

$$H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad (2.6.8)$$

Así, el hamiltoniano de un objeto que se le permite girar, pero que no se traslada es:

$$H = -\gamma \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \quad (2.6.9)$$

Para el caso del electrón se tiene un momento angular de espín:

$$H = -\gamma \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \quad (2.6.10)$$

$$= \frac{e}{m_e} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \quad (2.6.11)$$

$$= \frac{e}{m_e} B_0 S_z \quad (2.6.12)$$

$$= \frac{eB_0}{m_e} S_z \quad (2.6.13)$$

Escojamos ahora una forma definida para el campo magnético homogéneo, por ejemplo:

$$\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}} \quad (2.6.14)$$

Para ser consistente con la nomenclatura de cap. 3, se usará el símbolo \doteq para indicar representación. Así, el operador hamiltoniano representado como una matriz en la base de S_z resulta:

$$H = -\gamma B_0 S_z \quad (2.6.15)$$

$$\doteq -\frac{\gamma B_0 \hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.6.16)$$

Los elementos diagonales son sus valores propios:

$$E_+ = -(\gamma B_0 \hbar)/2 \quad (2.6.17)$$

$$E_- = +(\gamma B_0 \hbar)/2 \quad (2.6.18)$$

Siendo sus vectores propios correspondientes los mismos de S_z , ya que conmutan (son operadores compatibles, ver sección 3.5.2): $|+\rangle$ y $|-\rangle$, respectivamente.

Notando el hamiltoniano es independiente del tiempo, la solución general a la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H |\psi(t)\rangle \quad (2.6.19)$$

puede ser expresada en términos de estados estacionarios:

$$|\psi(t)\rangle = a|+\rangle e^{-iE_+t/\hbar} + b|-\rangle e^{-iE_-t/\hbar} \quad (2.6.20)$$

$$|\psi(t)\rangle \doteq \begin{pmatrix} a e^{i\gamma B_0 t/2} \\ b e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \quad (2.6.21)$$

Siendo las condiciones iniciales:

$$|\psi(0)\rangle \doteq \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (2.6.22)$$

Donde se ha introducido un ángulo θ convenientemente, cuya interpretación se hace evidente en breve.

Podemos ahora calcular el valor esperado $\langle S_x \rangle$, $\langle S_y \rangle$ y $\langle S_z \rangle$. Veamos:

$$\langle S_x \rangle = \langle \psi(t) | S_x | \psi(t) \rangle \quad (2.6.23)$$

$$\langle S_x \rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\theta B_0 t/2} & \sin(\theta/2)e^{i\theta B_0 t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \hbar/2 \\ \hbar/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{i\theta B_0 t/2} \\ \sin(\theta/2)e^{-i\theta B_0 t/2} \end{pmatrix} \quad (2.6.24)$$

$$\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin \theta \cos(\gamma B_0 t) \quad (2.6.25)$$

De la misma manera para $\langle S_y \rangle$ se obtiene:

$$\langle S_y \rangle = \langle \psi(t) | S_y | \psi(t) \rangle \quad (2.6.26)$$

$$= -\frac{\hbar}{2} \sin \theta \sin(\gamma B_0 t) \quad (2.6.27)$$

Finalmente, para S_z :

$$\langle S_z \rangle = \langle \psi(t) | S_z | \psi(t) \rangle \quad (2.6.28)$$

$$= \frac{\hbar}{2} \cos \theta \quad (2.6.29)$$

Identificamos que el valor esperado del vector total de espín $\langle \mathbf{S} \rangle$ está inclinado un ángulo θ con el eje z , y que muestra precesión alrededor de dicho eje (la dirección del campo magnético) con frecuencia angular, llamada frecuencia de Larmor, dada por: $\omega = \gamma B_0$.

División del haz en el experimento de Stern-Gerlach

Podemos analizar ahora lo que sucede en el experimento de Stern-Gerlach usando mecánica cuántica, ya que la fuerza como tal no es parte de su formalismo. Recordemos las partículas se encuentran en un campo magnético no uniforme, de manera que ahora (a diferencia del caso discutido previamente) también habrá una fuerza actuando, dada por:

$$\mathbf{F} = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) \quad (2.6.30)$$

El haz de partículas neutras como las de plata usadas por Stern y Gerlach son pesadas. Siendo este el caso, podemos evitar la desviación grande que resultaría de la fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} + q\mathbf{E}$, además interesa para construir paquetes de onda localizados y tratar el movimiento en términos de trayectorias de partículas clásicas. Si se usaran solo electrones, el experimento de Stern-Gerlach no funcionaría.

De nuevo, hemos ya visto el argumento de la desviación mediante fuerzas en sección 2.3.6, pero en el formalismo de la mecánica cuántica la *fuerza* no tiene cabida. Podemos, en su lugar, usar el hamiltoniano del sistema en un marco que se mueve con el haz. En este marco, el hamiltoniano comienza con cero, existe por un tiempo T , y luego desaparece:

$$H(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < 0 \\ -\gamma(B_0 + \alpha z)S_z, & \text{para } 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{para } t > T \end{cases} \quad (2.6.31)$$

Supongamos un átomo de espín 1/2 que tiene un estado inicial:

$$|\psi(t)\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle, \quad \text{para } t \leq 0 \quad (2.6.32)$$

Así que mientras el hamiltoniano actúe, $|\psi(t)\rangle$ evoluciona de acuerdo con:

$$|\psi(t)\rangle = a|+\rangle e^{-iE_+t/\hbar} + b|-\rangle e^{-iE_-t/\hbar}, \quad \text{para } 0 \leq t \leq T \quad (2.6.33)$$

donde, de la ecuación (2.6.9), se tienen los valores propios de la matriz hamiltoniana:

$$E_{\pm} = \mp\gamma(B_0 + \alpha z)\frac{\hbar}{2} \quad (2.6.34)$$

Por tanto, emerge de la zona de influencia de campo magnético en el estado:

$$|\psi(t)\rangle = (ae^{i\gamma TB_0/2}|+\rangle) e^{i(\alpha\gamma T/2)z} + (be^{-i\gamma TB_0/2}|-\rangle) e^{-i(\alpha\gamma T/2)z}, \quad t \geq T \quad (2.6.35)$$

La componente en z tiene momento en z y $-z$ de manera que tenemos la desviación esperada:

$$p_z = \frac{\alpha\gamma T\hbar}{2} \quad (2.6.36)$$

Por último, vale mencionar dos cosas adicionales. En primer lugar, la forma de la boca que se aprecia en la Fig. 2.2 y Fig. 2.3 se debe a que realmente existe gradiente de campo en la dirección en y (siempre perpendicular al haz), no solo en z .

Lo otro importante es que la trayectoria aproximada de los átomos de plata se puede tratar con física clásica, como expuesto recientemente. Bajo la influencia del campo magnético, una partícula con velocidad inicial en la dirección horizontal x estará sujeta a una fuerza vertical en z . Al dejar la zona de interacción se habrá desplazado tanto en x como en z , y tendrá ahora momento lineal en la dirección vertical dado por (2.6.36). Así, después de algún tiempo se habrá desplazado todavía más en la dirección z hasta llegar al detector. Ver por ejemplo el libro clásico de French y Taylor para un tratamiento teórico usando estas ideas⁴:

2.7. Comentarios finales

De acuerdo a lo descrito en este capítulo, es importante resumir algunos de los logros alcanzados con el experimento de Stern-Gerlach (SGE) que serán importantes para la descripción del enfoque Spin-First tratado en el siguiente capítulo:

- SGE verificó que cada átomo de plata tiene un momento dipolar magnético de aproximadamente un magnetón de Bohr.
- SGE presentó la primera evidencia experimental de que el momento angular está cuantizado.
 - No fue hasta 1925 que Kronig, Uhlenbeck y Goudsmit postularon el espín.
- El experimento mostró una división en dos haces; según conocemos hoy día debido al momento angular intrínseco = $\pm\hbar/2$.
- SGE produjo el primer haz atómico totalmente polarizado por espín.

⁴A.P. French y Edwin F. Taylor, *An Introduction to Quantum Physics*, Norton & Company, 1978

- El SGE fue el primer experimento de haz molecular completamente exitoso en alto vacío.
- En aquel entonces se desconocía por qué y cómo el momento magnético interno (indirectamente, el momento angular) de cada átomo “colapsa” en el aparato SG en orientaciones angulares bien definidas con respecto a la dirección del campo.

Capítulo 3

Experimentos de Stern-Gerlach en la educación de la física cuántica

3.1. Introducción

En el capítulo 2 se describió el experimento de Stern-Gerlach y se analizó en base a la física clásica, semiclásica de la época y física moderna. Además, se comentó sobre la importancia de entender el experimento desde estos tres enfoques para los alumnos e instructores. Se brindaron algunas pautas pedagógicas para trabajar la transición de la física clásica a la física moderna, en el contexto del experimento de Stern-Gerlach.

El capítulo actual presenta la relevancia del experimento en la enseñanza de la mecánica cuántica contemporánea. Se define el concepto de *enseñanza tradicional* en mecánica cuántica; se propone y describe un enfoque diferente: uno basado en experimentos de Stern-Gerlach previo a la presentación de la mecánica ondulatoria: el llamado *Spin-First approach*. Se revisan las principales fuentes de dicha metodología, que son primordialmente libros de texto.

La importancia de generar y/o incorporar nuevos enfoques pedagógicos para la enseñanza-aprendizaje de la mecánica cuántica se justifica en base a errores comunes o “misconceptions” encontrados en universidades alrededor del mundo y en Honduras. Es-

tos estudios se revisan en el presente capítulo, y sugieren que la mecánica cuántica es difícil de comprender y, por tanto, nuevas alternativas pedagógicas deben ser revisadas. Además, se discuten estudios que han medido el impacto del enfoque de *Spin-First* propuesto, en cuanto al mejoramiento de su comprensión de la mecánica cuántica.

Finalmente, enmarcados en los planes de estudio de la Licenciatura y Maestría en Física en UNAH-CU, se proponen diseños de implementaciones con base a experimentos de Stern-Gerlach para sistemas de espín $1/2$ o 1 .

3.2. Enseñanza tradicional de la mecánica cuántica

La enseñanza de la mecánica cuántica no ha cambiado mucho desde que logró ser una teoría estable a partir del segundo cuarto del siglo pasado. Hasta recientemente se realizan investigaciones pedagógicas para determinar de qué manera se puede enseñar de forma más eficiente [10].

El término *tradicional* se refiere a la forma en que se ha impartido la materia a lo largo de los años. Esta enseñanza tradicional de la mecánica cuántica se puede apreciar directamente de libros de texto clásicos de la materia.

Comúnmente, el proceso de diseño curricular de las universidades incluye la selección de libros de texto, que guiarán primordialmente la temática a impartir por el instructor. La tabla 3.1 presenta libros de texto clásicos en la materia en mecánica cuántica publicados a lo largo de las últimas décadas. Según Sakurai, la forma más acostumbrada o tradicional es iniciar el estudio de la mecánica cuántica siguiendo acontecimientos históricos [9] Ley de Planck, el Átomo de Bohr, ondas de materia, etc. Enseguida, es de notar que los libros descritos tienen en común que parten conceptos de la mecánica clásica como posición, velocidad, aceleración, energía, se introduce la función de onda, operadores y el formalismo matemático se va construyendo en el camino. Otros autores, presentan primero el formalismo matemático y luego la teoría cuántica como tal (e.g. Shankar), iniciando con mecánica ondulatoria. Cualquiera sea el caso, los primeros conceptos que se introducen son los relacionados con la función de onda y la ecuación de Schrödinger: lo que se conoce

como mecánica ondulatoria. Los alumnos invierten gran parte del tiempo resolviendo la ecuación de Schrödinger para una partícula en la presencia de diferentes potenciales.

En estos libros tradicionales, es importante también notar que el concepto de espín se ofrece como parte o posterior al tema *Momento angular*: se introduce el concepto (momento angular intrínseco), se detallan los nuevos operadores, se trabaja el álgebra, se usa la ecuación de Schrödinger para determinar su evolución temporal en la presencia de un campo magnético, entre otros.

En otras palabras, en la enseñanza tradicional de la mecánica cuántica el espín se presenta como una aplicación más, no se enfatiza en como el uso de experimentos o *dispositivos* de Stern-Gerlach contribuyen a la comprensión conceptual del formalismo de la mecánica cuántica, como se verá más adelante.

Tabla 3.1: Contenido de libros tradicionales para la enseñanza de la mecánica cuántica

Libro	Temas presentados	Abordaje de Stern-Gerlach
<i>LANDAU</i> (1964)	1. Energía y momento 2. Ecuación de Schrödinger (El pozo de potencial) 3. Momento angular 4. Movimiento en un campo simétrico 5. Teoría de perturbaciones 6. El caso semi clásico (Cuantización de Bohr-Sommerfeld) 7. Espín 8. Partículas idénticas 9. El átomo 10. La molécula diatómica 11. Teoría de Simetría 12. Moléculas Poliatómicas 13. Adición de momento angular 14. Movimiento en un campo magnético 15. Estructura nuclear 16. Teoría de colisiones elásticas 17. Teoría de colisiones inelásticas	Tratamiento clásico en el marco del momento angular
continúa...		

Tabla 3.1 – continuación

Libro	Temas presentados	Abordaje de Stern-Gerlach
<i>SHANKAR</i> (1980)	1. Introducción matemática 2. Repaso de la mecánica clásica 3. No todo está bien con la mecánica clásica 4. Los postulados (de la mecánica cuántica): una discusión general 5. El límite clásico 6. El oscilador armónico 7. Integral de caminos de la mecánica cuántica 8. Relaciones de incertidumbre de Heissenberg 9. Sistemas con N grados de libertad 10. Simetrías y sus consecuencias 11. Invarianza rotacional y momento angular 12. El átomo de hidrógeno 13. Espín 14. Adición del momento angular 15. Métodos variacionales y WKB 16. Teoría de perturbaciones independiente del tiempo 17. Teoría de perturbaciones dependiente del tiempo 18. Teoría de dispersión 19. La ecuación de Dirac	Tratamiento clásico en el marco del momento angular
continúa...		

Tabla 3.1 – continuación

Libro	Temas presentados	Abordaje de Stern-Gerlach
<i>GRIFFITHS</i> (1994)	1. La función de onda 2. La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo 3. Formalismo 4. Mecánica cuántica en 3D 5. Partículas idénticas 6. Teoría de perturbaciones independiente del tiempo 7. El principio variacional 8. La aproximación WKB 9. Teoría de perturbaciones dependiente del tiempo 10. La aproximación adiabática 11. Dispersión	Tratamiento clásico en el marco del momento angular

3.3. Enseñanza de la mecánica cuántica en la UNAH

La UNAH actualmente cuenta con un pregrado en física (Licenciatura en Física) y un posgrado (Maestría en Física), ambos a cargo de la Escuela de Física, antes llamado Departamento de Física, cuya funcionamiento inicia allá por la década de 1960, siendo parte del Centro Universitario de Estudios Generales [11].

Del plan de estudios vigente (1993) para la Licenciatura en Física [3], se observa que la enseñanza de la mecánica cuántica se propone con un enfoque esencialmente tradicional: se inicia con un curso de acontecimientos históricos que no podían ser explicados con física clásica (FS371 - Física Moderna); enseguida se presenta un curso introductorio de mecánica cuántica en el cuál se propone el estudio de la mecánica ondulatoria y ecuación de Schrödinger desde el principio (FS472 - Mecánica Cuántica I). Finalmente, en un segundo curso (FS473 - Mecánica Cuántica II) se aborda Momento Angular y Espín, así como aplicaciones a la teoría atómica, entre otras. Actualmente está en proceso de aprobación un nuevo diseño curricular para la Licenciatura en Física, pero seguirá siendo un currículo tradicional: se ubica el tratamiento del espín como una aplicación a la ecuación más de Schrödinger y, además, se sugiere el uso de libros con enfoques tradicionales: Greiner, Shankar y Griffiths.

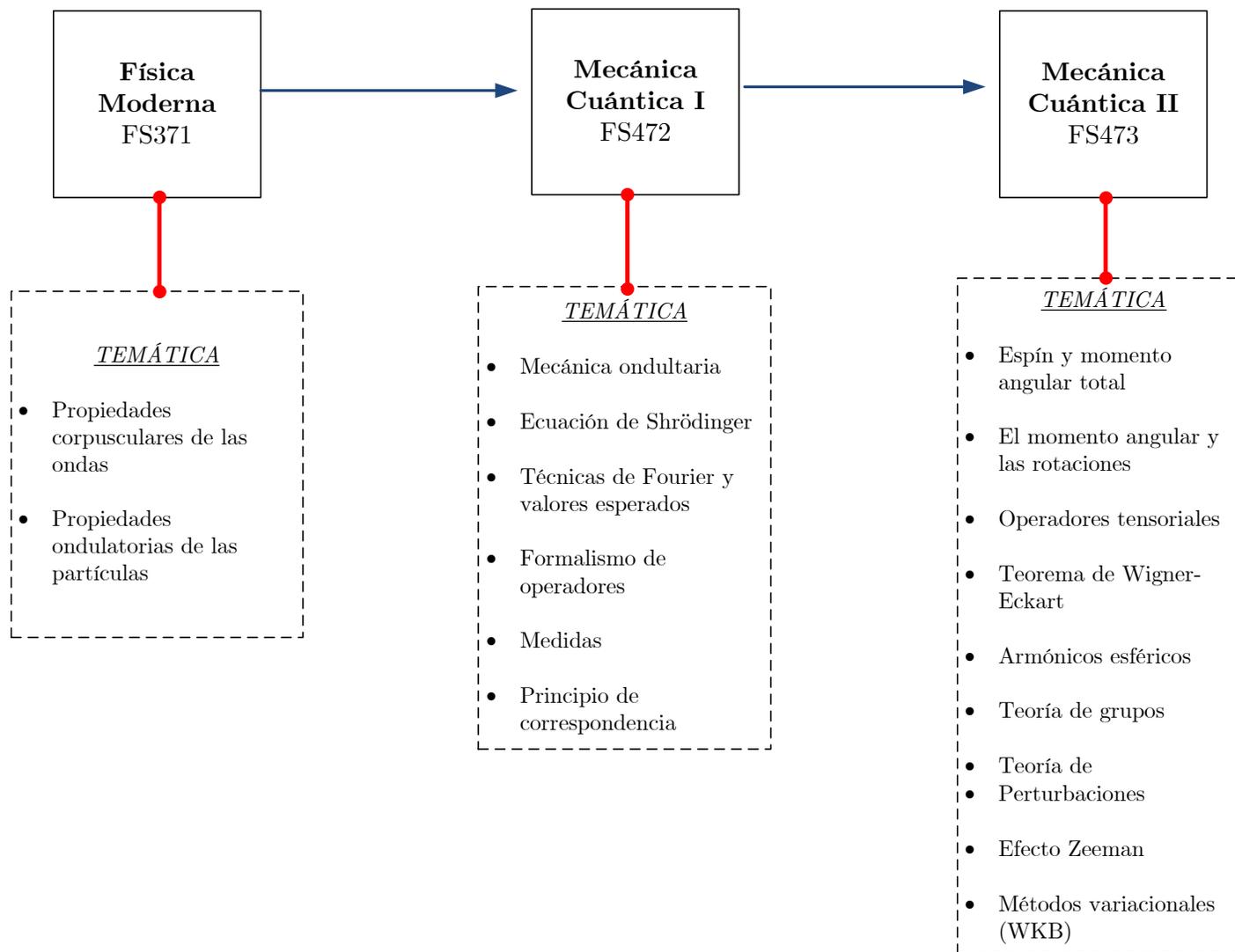


Figura 3.1: Cursos de física cuántica a nivel de pregrado en la UNAH

En cuanto al posgrado, la Maestría en Física ofrece un curso propedéutico o preparativo de Física Moderna previo al inicio de clases formales del plan curricular [4]. Enseguida se aborda la física cuántica comenzando con la ecuación de Schrödinger en una y tres dimensiones, momento angular y espín, y aplicaciones a la teoría atómica y computación cuántica. Ver Fig 3.2. Existe también un curso optativo de tópicos especiales de física cuántica (de dos necesarios): MFS702 - Tópicos de Mecánica Cuántica. En la descripción de este curso, explícitamente se indica que uno de sus objetivos es “capacitar al estudiante en el uso de la computadora como herramienta didáctica en la enseñanza de la mecánica por medio de simulaciones”. De tal forma que este currículo de la maestría, fundada en el año 2006, supone un enfoque más moderno e innovador.

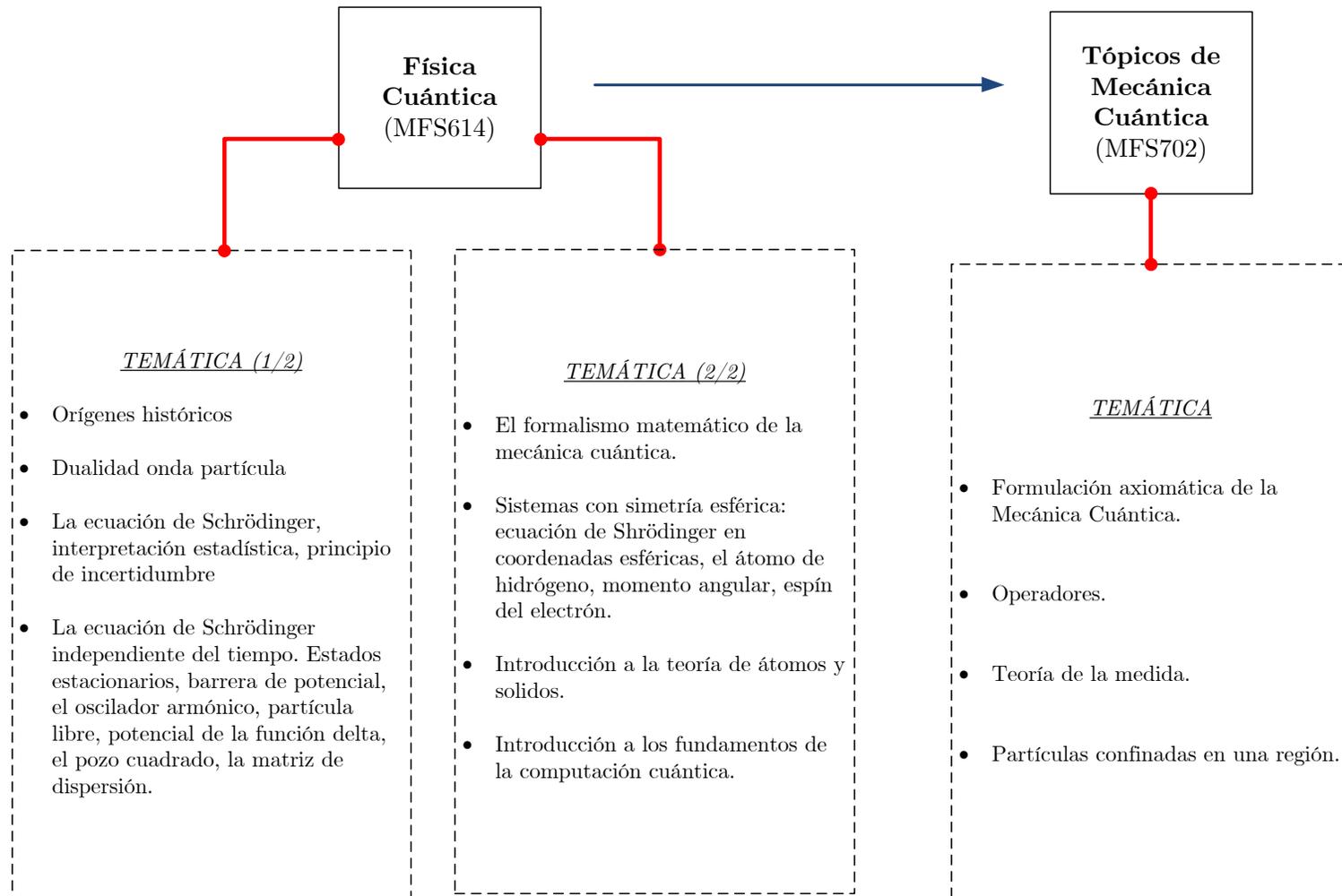


Figura 3.2: Cursos de física cuántica a nivel de posgrado en la UNAH

3.4. Comprensión de la mecánica cuántica

Todo aquel que ha estudiado o enseñado mecánica cuántica sabe que es todo un reto. Feynman mismo dijo con seguridad que “nadie entiende la mecánica cuántica” [12], con relación a problemas interpretativos. Existen investigaciones que han sacado a relucir conceptos erróneos típicos de estudiantes de mecánica cuántica a nivel de pregrado y posgrado. Ya que aún hoy día predomina la enseñanza tradicional a nivel mundial y en el contexto nacional, es importante plantearse si dicha enseñanza es suficiente para un aprendizaje adecuado por parte de los estudiantes, o bien para que los estudiantes tengan una experiencia gratificante que los motive a seguir cursos y metas posteriores.

Los siguientes artículos son producto de investigaciones en el ámbito de la enseñanza de la física, mejor conocida como PER, por sus siglas en inglés (Physics Education Research). Todos están relacionados con el entendimiento (o falta de) en el estudio de ciertos temas particulares de la mecánica cuántica o de su formalismo en general. La importancia mayor de estas investigaciones es que sirven de base para desarrollar métodos que ayuden a que los estudiantes entiendan mejor la mecánica cuántica:

- (Styer, 1996): Common misconceptions regarding quantum mechanics (pregrado) [13]
- (Ireson, 2000): The quantum understanding of pre-university physics students (pre-universitario) [14]
- (Singh, 2001): Student understanding of quantum mechanics (pregrado) [15]
- (Johnston, 1998): Student difficulties in learning quantum mechanics (pregrado) [10]
- (Caliskan, 2009): Student Understanding of Some Quantum Physical Concepts (pregrado) [16]
- (Didis, 2010): Pre-service Physics Teachers' Comprehension of Quantum Mechanical Concepts (pregrado) [17]
- (Zhu, 2012): Surveying students' understanding of quantum mechanics in one spatial dimension (pregrado y posgrado) [18]

- (Turcios, 2015): Explorando la comprensión conceptual de la Mecánica Cuántica en estudiantes de pregrado de la carrera de Física de la UNAH [1]

A continuación se discuten brevemente los métodos y hallazgos de las investigaciones más pertinentes de la lista arriba. Además, si aplicase, se presentan las propuestas de los autores para contribuir a dilucidar los conceptos erróneos en base a sus hallazgos.

Styer (1996) encontró 15 conceptos erróneos comunes en base a cuatro subgrupos:

(I) Ideas erróneas con respecto a la idea del estado cuántico.

- Los valores propios de energía son los únicos permitidos
- Un estado cuántico está completamente descrito por su densidad de probabilidad $|\psi(\mathbf{x})|^2$
- La función de onda $\psi(\mathbf{x})$ es una función de tres coordenadas espaciales comunes
- La función de onda es adimensional
- La función de onda (o vector de estado) describe un ensamble de sistemas clásicos
- La función de onda (o vector de estado) describe un solo sistema promediado en algún intervalo de tiempo

(II) Ideas erróneas con respecto a la medición.

- El colapso del paquete de onda permite comunicación más rápida que la luz.
- La medición perturba el sistema.
- Mediciones de momento angular

(III) Ideas erróneas con respecto a partículas idénticas

- En la expresión $\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$
- Una función de onda antisimétrica para dos partículas es necesariamente la diferencia de productos de una función de onda de una partícula.

- Dos fermiones (en el mismo estado de espín) se repelen con una fuerza.

(IV) Otros conceptos erróneos

- Una barrera lejana a la partícula puede afectarla
- La densidad de corriente de probabilidad $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ se relaciona con la rapidez de esa parte de la partícula que se localiza en \mathbf{x}
- Para cualquier estado propio de energía, la densidad de probabilidad debe tener la simetría del hamiltoniano.

Zhu y Singh (2012) exploran las dificultades que tienen estudiantes avanzados de pregrado y posgrado mediante un test especializado llamado QMS (Quantum Mechanics Survey), que consta de 31 preguntas de selección múltiple. Este test, o encuesta, se administró a 226 estudiantes de diferentes universidades, 33 de ellos ya graduados, cursando un primer año de posgrado. La encuesta se podía responder sin necesidad de acudir a matemáticas complicadas. No se incluyó en la temática el concepto de espín para asegurar todos tuvieran conocimientos de los temas. Los 31 ítems contenían preguntas relacionadas con:

- Posibles funciones de onda
- Valores esperados
- Estados estacionarios
- El rol del hamiltoniano
- Dependencia temporal de la función de onda
- Mediciones
- Otros, como el Principio de Incertidumbre

Esta encuesta también fue administrada a estudiantes de pregrado de la UNAH por **Turcios** en el 2015 [1]. Lo más importante que destacar de los resultados es lo siguiente:

- El promedio de los porcentajes de las respuestas correctas de los estudiantes de la UNAH fue de 17, mientras que el promedio de los porcentajes de las respuestas correctas de los estudiantes de Universidades de EE. UU. fue 46
- Los estudiantes de pregrado de física de la UNAH tienen ideas correctas y equivocadas de forma simultánea, lo que dificulta la discriminación de conceptos relacionados.

Zhu y Singh, además, encontraron que a los estudiantes que usaron herramientas pedagógicas basadas en investigación (tales como pruebas conceptuales o tutoriales interactivos) les fue mejor que al resto.

Es importante mencionar que la identificación de conceptos erróneos pueden ayudar a diseñar estrategias y herramientas para mejorar el entendimiento por parte del estudiante. Turcios (2015) propuso la elaboración de videos educativos relacionados.

Finalmente, y de especial interés para esta tesis, **Singh** (2001) llega a conclusiones interesantes usando como población estudiantes que estaban terminando un curso de mecánica cuántica avanzada de un año de duración, a quienes se les administró una prueba relacionada con mediciones y evolución temporal (14 preguntas). Sin importar la base de conocimiento, estilos de enseñanza, y libros de texto, todos estudiantes tuvieron las mismas dificultades comunes. Conceptos relacionados con estados estacionarios, valores propios y dependencia del tiempo de valores esperados fueron de particular dificultad para los alumnos. Análisis mostró que la incapacidad de discriminar entre conceptos relacionados y la sobregeneralización originan los conceptos erróneos.

Los estudiantes del estudio provenían de universidades que usaban libros de texto tradicionales:

- 11 estudiantes de la Universidad de Pittsburgh, que usaban el libro de Liboff
- 7 estudiantes de la Universidad de Carnegie Mellon, que usaban el libro de Shankar
- 17 estudiantes de la Universidad de Illinois, Urbana Champaign, que usaban el libro de Goswami
- 13 estudiantes de la Universidad de Boston, que usaban el libro de Griffiths

- 34 estudiantes de la Universidad de California, Santa Barbara, que usaban el libro de Griffiths
- 7 estudiantes de la Universidad de Colorado, Boulder, que usaban el libro de Griffiths

En el artículo publicado [15] se pueden ver los errores conceptuales; muchos de estos temas pueden ser aclarados usando analizadores de Stern-Gerlach, como se explica en la siguiente sección.

Singh concluye que aunque los estudiantes sean de un curso avanzado, y aunque que resuelto la ecuación de Schrödinger para potenciales complicados y condiciones de frontera, muchos tienen dificultades conceptuales relacionadas con mediciones y evolución temporal.

Ante la evidente falta de comprensión por parte de los estudiantes según los estudios descritos anteriormente, se describe a continuación el enfoque de enseñanza de la mecánica cuántica, el cual puede ayudar a mejorar la experiencia y entendimiento de los estudiantes en la materia: el *Spin-First approach*.

3.5. Enfoques pedagógicos usando experimentos de Stern-Gerlach

3.5.1. El enfoque Spin-First

El experimento de Stern-Gerlach fue descrito en el cap. 2, y su resultado explicado con física moderna: el haz de partículas de plata se separa en dos dado que el espín del electrón está cuantizado con valores posibles de $\pm\hbar/2$ en su medición. Este tipo de sistemas se conoce como *sistema de espín 1/2*. Un experimento similar se puede realizar con partículas de espín diferente. Por ejemplo, una partícula de espín 1 se separaría en tres haces diferentes, con valores posibles de espín \hbar , $-\hbar$ y 0. Se describe a continuación la forma en que el experimento se puede usar para la enseñanza de la mecánica cuántica: los estudiantes se sumergen en el mundo exclusivo de la mecánica, donde su intuición no ayuda, ya que están familiarizados con resultados de la física clásica. En palabras de

Sakurai: se someten a un tratamiento se shock. Además, adquieren experiencia con el formalismo de la mecánica cuántica y sus postulados, en la interpretación de Copenhague. El sistema de espín $1/2$ es el contexto más simple y limpio para pensar en las paradojas de la mecánica cuántica [19].

Este enfoque fue propuesto inicialmente por Feynman [20]; sin embargo, fue Sakurai [9] quien brindó experimentos más pedagógicos en el contexto del sistema de espín $1/2$. Otros autores han utilizado experimentos similares a lo largo de las últimas décadas. Es importante reconocer que la teoría cuántica no relativista se finalizó por completo desde antes de la segunda mitad del siglo XX, gracias a científicos como Schrödinger, Heisenberg, Dirac, entre otros. Dirac fue quien completó de forma axiomática la teoría cuántica, y concilió así los enfoques de mecánica ondulatoria de Schrödinger vs. mecánica matricial de Heisenberg. El formalismo de Dirac se usa en el tratamiento de sistemas de dimensiones finitas como espín $1/2$ o 1 .

Como expuesto con anterioridad, desde la segunda mitad del siglo pasado, la mecánica cuántica se puede considerar una teoría estable, y en este sentido, varios autores como los citados en la sección 3.2, escribieron libros de enseñanza de la mecánica cuántica que contienen los elementos estudiados en aquellas décadas y que sentaron base para futura literatura: lo que definimos como libros tradicionales. Éstos comienzan su exposición con física clásica, pasando por historia y resultados de experimentos cercanos a 1900 que no podían explicarse con física clásica, hasta llegar a la mecánica cuántica ondulatoria.

Otros autores, sin embargo, han tomado como base pedagógica el experimento de Stern-Gerlach para dar a conocer *desde un principio* el formalismo de la mecánica cuántica, previo a la introducción de la mecánica ondulatoria; un enfoque que no es, precisamente, el tradicional. Entre los autores que han publicado libros que contienen elementos innovadores de este tipo están los siguientes, en orden cronológico:

- R. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands: *The Feynman lectures on Physics, Vol. III* (1961-1963) [20]
- J.J. Sakurai, J. Napolitano: *Modern Quantum Mechanics 2nd ed.* (1st ed 1985, revi-

sed 1994) [9]

- Cohen-Tannoudji, B. Diu , F. Laloe: *Quantum mechanics, Vol. I* (1973 FR, 1991 EN) [21]
- J.S. Townsend: *A Modern Approach to Quantum Mechanics* (2000) [22]
- D.H. McIntyre: *Quantum Mechanics: A Paradigms Approach* (2012) [23]

A continuación se describen las contribuciones de cada autor en cuanto al uso de experimentos de SGE para la enseñanza de la mecánica cuántica. Además, se citan algunas reflexiones de los mismos autores en cuanto a la metodología. La Tab 3.2 presenta un resumen de lo expuesto; note el orden cronológico de las publicaciones.

Feynman Lectures - 1961

Richard Feynman *et al* en sus *Lectures, Volume III*, capítulo 5, presentan el experimento como un fenómeno mecánico cuántico por excelencia. Exponen que no hay conexión alguna desde la mecánica clásica, ni analogías. Los autores comienzan con sistemas de espín 1 para no introducir algo tan sencillo, como el sistema de espín 1/2. La idea es que estos experimentos sean prototipos para todos los fenómenos mecánico cuánticos. Esto abrirá brecha para otros autores como Cohen-Tannoudji y Sakurai.

Describen el fenómeno diciendo que el haz original se separa en cierto número de haces: el número dependerá del tipo de átomo particular y su estado. Toman el caso de un átomo que da origen a tres haces: una partícula de espín 1. Lo mismo se puede generalizar para 5, 7 haces, etc. En el capítulo 6 los autores analizan el caso más sencillo de espín 1/2. De hecho, este caso es tomado como referencia por cualquier otro autor futuro que presenta experimentos de Stern-Gerlach para la enseñanza. Por su sencillez, por supuesto.

Feynman desarrolla, adicionalmente, experimentos teóricos más elaborados o modificados, girados por ejemplo, y analiza los experimentos desde el formalismo de la mecánica cuántica presentada hasta el momento. Aborda la ecuación de Schrödinger hasta el Capítulo 16: La dependencia de las amplitudes con la posición.

Más adelante en este trabajo, se simulan los experimentos propuestos por Feynman en una aplicación en JAVA.

¿Qué se requiere para abordarlo el experimento como Feynman lo hacen? Los autores ya han tratado previamente los conceptos de *partículas y ondas* y amplitudes de probabilidad. O sea, podríamos decir que este enfoque es “Spin-First”, en el sentido que se aborda previo a la ecuación de Schrödinger.

Feynman menciona algo importante en la tendencia de la enseñanza de aquella época: solo cuando se ha estudiado la ecuación de Schrödinger y resuelto numerosos problemas se pasa el problema “avanzado” de espín. Se refiere al tratamiento tradicional del espín en el contexto del momento angular. De hecho, en la tabla 3.1 muestra los libros que tienen este enfoque tradicional. De nuevo: solo luego de la discusión de momento angular introducen el concepto espín.

Por otro lado, el experimento de Stern-Gerlach es un experimento descriptivo y sencillo, un experimento pedagógico para el cual no se ahonda, en principio, el concepto de momento angular en general o la mecánica cuántica ondulatoria (wave mechanics).

Sakurai 1ra edición - 1985

Sakurai es el primero en dejar experimentos pedagógicos en base a experimentos de Stern-Gerlach usando notación de Dirac. Es importante hacer notar que el libro está orientada hacia estudiantes de primer año de posgrado.

Sobre la importancia de la mecánica cuántica, comenta en su prólogo que el cambio revolucionario en el entendimiento de fenómenos microscópicos se dió en los primeros 27 años del siglo XX. No solo se encontraron limitaciones en física clásica, sino teorías alternativas, con mayor aplicabilidad.

Sakurai menciona que la forma más tradicional de iniciar el estudio el estudio de la mecánica cuántica es siguiendo los acontecimientos históricos, por ejemplo:

- Ley de Planck
- Teoría de Einstein-Debye

- El átomo de Bohr
- Ondas de materia de de Broglie
- Otros experimentos: Efecto Compton, Franck-Hertz, Davisson-Germer-Thomson.

Poco a poco en el primer cuarto de siglo los físicos fueron abandonando conceptos de la física clásica y como, a pesar de los tropiezos, los maestros Heisenberg, Shrodinger, Dirac, entre otros, finalmente formularon la mecánica cuántica tal como la conocemos hoy día.

Sin embargo, Sakurai y demás autores de ediciones posteriores no siguen un enfoque histórico, empiezan con un ejemplo del por qué la física clásica es inadecuada: una especie “tratamiento de shock”, y llaman al lector a adentrarse en la forma de pensar en mecánica cuántica (*quantum mechanical way of thinking*). Mencionan los autores que el experimento de Stern-Gerlach lo concibió Otto Stern en Frankfurt, y fue realizado junto a Gerlach en 1922. El experimento nos muestra la necesidad de alejarse de mecánica clásica. Se presentan los axiomas de la mecánica cuántica con el experimento en mente en este libro. Esto, pues, justifica el inicio de su libro con el experimento de Stern-Gerlach.

En corto, Sakurai empieza desde un principio con el llamado *Spin-First approach*, y es digno de mención las analogías que hace con la física clásica para la construcción de la matemática de Dirac.

Cohen-Tannoudji 1ra edición - 1991

El autor principal (Cohen-Tannoudji) fue ganador del Nobel de Física por sus contribuciones relacionados con enfriamiento de láser. Por su experiencia en enseñanza, comenta que en su libro se introducen los postulados de la mecánica cuántica de forma temprana, en el capítulo 3.

El capítulo primero es tradicional: exponen las ideas fundamentales de la mecánica cuántica (ondas electromagnéticas y fotones, ondas y materia, etc), incluso abordan mecánica ondulatoria. Realizan analogías importantes con la mecánica clásica y teoría electromagnética clásica. En corto, en el capítulo 2 introducen las herramientas matemáticas formalmente, y los postulados de mecánica cuántica en el capítulo 3. En el

capítulo 4 ponen en acción los postulados presentados en el capítulo 3 al sistema de espín $1/2$. Brindan ejemplos de la importancia de física atómica, molecular y estado sólido.

Contrastan sobre el uso de un enfoque inductivo en lugar de deductivo, a pesar que ambos son necesarios para los estudiantes.

Hacen notar que existen problemas unificando teoría cuántica y mecánica relativista. *Sin embargo, la mayor parte de la física atómica y molecular puede ser bien explicada por mecánica cuántica no relativista.*

En Capítulo IX vuelven los autores a considerar el experimento de Stern-Gerlach ya con un tratamiento más avanzando, como típicamente lo hacen los autores de libros tradicionales.

Townsend - 2000

El libro de Townsend está pensando para estudiantes de último año de pregrado y su pedagogía se basa en dos fuentes básicas: Feynman y Sakurai. Su tratamiento es un intermedio de éstos dos: más avanzado que Feynman, pero más básico que Sakurai.

Como otros libros citados, en lugar de seguir una perspectiva histórica, introduce la mecánica cuántica a través de una discusión de espín y experimento de Stern-Gerlach. Es de notar, sin embargo que el autor supone los alumnos ya conocen mecánica ondulatoria.

Entre las ventajas de la metodología de *Spin-First* el autor menciona las siguientes:

- Permite hacer conexiones con lo que ya han visto en algún curso previo de mecánica ondulatoria.
- Ilustra la estructura esencial de la mecánica cuántica sin ser eclipsada por mecánica ondulatoria avanzada.

Mecánica cuántica puede presentarse con ejemplos concretos, establece. Luego se generaliza. Enfatiza que la mecánica ondulatoria es solo un aspecto de la mecánica cuántica, y que la mecánica ondulatoria (Schrödinger) y la matricial (Heisenberg) es la misma mecánica cuántica.

Su percepción general es que es preferible estudiar un poco de la mecánica ondulatoria antes: pues los estudiantes hacen un *overlap* con la mecánica clásica; sin embargo, un segundo curso con mecánica ondulatoria podría extraviarlos.

Momento angular y evolución temporal con Schrödinger lo introduce después, siempre con el sistema de espín $1/2$ en mente.

De hecho, el libro de McIntyre, que se discute a continuación, va en la misma línea que Townsend.

McIntyre - 2012

Es el libro más moderno e innovador. Pensado para los estudiantes de la Universidad de Oregon (Oregon State University - OSU), contiene el material para cuatro cursos básicos de primer año y un curso senior (último año), para pregrado. Esto forma parte de un rediseño curricular llamado *Paradigms* para todos los cursos de física. Los primeros tres capítulos se exponen con mucho apoyo de sistemas de espín $1/2$, tratándose en el tercero la ecuación de Schrödinger para la evolución temporal de éstas partículas. Posterior a ello, aborda la mecánica ondulatoria, la función de onda y soluciones para diferentes potenciales. La transición de sistemas de espín $1/2$ a sistemas de dimensiones infinitas es de especial interés en este trabajo y se aborda posteriormente. Supone, además, una clara desventaja para el enfoque de Spin-First. Los primeros tres capítulos del libro están pensados para estudiantes que ni siquiera saben de mecánica ondulatoria, algo novedoso en relación a los libros discutidos anteriores.

Algo importante que mencionar es que McIntyre y equipo portaron a JAVA una aplicación para la simulación de experimentos de Stern-Gerlach desarrollada por Schroeder en 1993 [26], de tal manera que pudiera ejecutarse en cualquier sistema, no solo en MAC. Este software resulta de gran apoyo, pues ya no se acompaña la metodología con experimentos mentales (Gedankenexperiment), sino también con una ayuda visual e interactivo.

Discusión

De acuerdo a lo investigado, Richard Feynman en 1961 fue el primero que propuso experimentos mentales de Stern-Gerlach para dar a entender los postulados de la mecánica cuántica sin haber introducido previamente la ecuación de Schrödinger.

Sakurai (1985) y Cohen (1991) describen experimentos específicos más didácticos en el contexto de sistemas de espín $1/2$. Cohen presenta mecánica ondulatoria previo a experimentos de Stern-Gerlach.

El libro de Sakurai se pensó para estudiantes iniciando su posgrado (graduate level); supone que el lector debe conocer un poco de mecánica ondulatoria, y con esas consideraciones comienza con el enfoque *Spin-First*.

Townsend informa que su exposición no es tan avanzada como la Sakurai pero tampoco tan elemental como Feynman. Un punto intermedio que servirá a estudiantes de pregrado avanzados. Adicional, hace referencia a sistemas de espín $1/2$ a lo largo del libro.

McIntyre sigue un enfoque totalmente nuevo, pues está diseñado para alumnos que no han tenido relación alguna con mecánica cuántica. Adicional, propone el uso de software (aplicación llamada SPINS) para facilitar la comprensión del enfoque simulando experimentos de Stern-Gerlach, no solamente pensarlos. Para el año 2012, era una de las aplicaciones más gustadas entre físicos para la enseñanza de la mecánica cuántica, como se expone más adelante.

La tabla 3.2 resume lo anterior.

Finalmente, es oportuno mencionar ahora que existen algunas intervenciones educativas documentadas que usaron el enfoque de McIntyre para la enseñanza de la mecánica cuántica, tal como Sadaghiani, cuyos diseños y resultados discutirán en sección posterior. Antes, se examina en detalle como se usan experimentos de Stern-Gerlach en la enseñanza de la mecánica cuántica en su interpretación de Copenhague.

Tabla 3.2: Libros con elementos pedagógicos basados en experimentos de Stern-Gerlach

Libro	Destinado a	¿Conocimiento de ecuación de Schrödinger requerido?	Temas presentados previo a experimento Stern-Gerlach	Uso pedagógico de experimentos de Stern-Gerlach
<i>Feynman lectures of Physics, Volume III</i> (1961)	Estudiantes de pregrado	No es requerido	1. Comportamiento cuántico 2. Dualidad onda-partícula 3. Principio de incertidumbre 4. Amplitudes de probabilidad 5. Partículas idénticas	Metodología <i>Spin-First</i> : introduce postulados de la mecánica cuántica previo a Ecuación de Schrödinger en cap. 4 Espín 1 y cap. 5 Espín 1/2.
<i>Quantum Mechanics, Volume I</i> , Cohen-Tannoudji (1973)	Estudiantes de último año de pregrado	Sí, lo cubre previamente	1. Ondas y partículas: introducción a las ideas de la mecánica cuántica 2. Las herramientas matemáticas de la mecánica cuántica 3. Los postulados de la mecánica cuántica	Una vez presentados los postulados de la mecánica cuántica en cap. 3, los aplica a un sistema de espín 1/2 en cap. 4. Sin embargo, en cap. 3 introduce ecuación de Schrödinger. En tal sentido, no es un enfoque <i>Spin-First</i> .
				continúa...

Tabla 3.2 – continuación

Libro	Destinado a	¿Conocimiento de ecuación de Schrödinger requerido?	Temas presentados previo a experimento Stern-Gerlach	Uso pedagógico de experimentos de Stern-Gerlach
<i>Modern Quantum Mechanics</i> , J.J. Sakurai (1994)	Estudiantes de primer año de posgrado	Sí, ya que el libro está destinado a posgrado	Ningún tema presentado previamente; inicia con los conceptos fundamentales y postulados de la mecánica cuántica usando el experimento de Stern-Gerlach	El enfoque es <i>Spin-First</i> para estudiantes de posgrado, posteriormente introduce dinámica cuántica (ecuación de Schrödinger)
<i>A Modern Approach to Quantum Mechanics</i> , John S. Townsend (2000)	Estudiantes de último año de pregrado	Sí, está dirigido a último año pregrado	Ningún tema presentado previamente; sin embargo, no sigue un enfoque de postulados	El enfoque es <i>Spin-First</i> para estudiantes de último año pregrado, a lo largo del texto continúa haciendo referencia a sistemas de espín 1/2
				continúa...

Tabla 3.2 – continuación

Libro	Destinado a	¿Conocimiento de ecuación de Schrödinger requerido?	Temas presentados previo a experimento Stern-Gerlach	Uso pedagógico de experimentos de Stern-Gerlach
<i>Quantum Mechanics</i> , David H. McIntyre (2012)	Estudiantes de primer año y último año de pregrado	No, arranca con experimentos de Stern-Gerlach sin conocimientos previos de mecánica cuántica ondulatoria	Ningún tema presentado previamente; sigue una estrategia pedagógica de postulados	El enfoque es <i>Spin-First</i> (ecuación de Schrödinger se introduce en cap. 3). A lo largo del texto continúa haciendo referencia a sistemas de espín 1/2

3.5.2. Descripción detallada del enfoque Spin-First

Según lo expuesto al momento, la enseñanza de la mecánica cuántica puede llevarse por varios caminos, siendo lo tradicional la exposición temprana a las ideas nuevas a partir de experimentos que no podían ser explicados con física clásica, la presentación del formalismo matemático, la introducción de la función de onda y la ecuación de Schrödinger, y aplicaciones para partículas en distintos potenciales. Esto marca, quizá sin ningún orden particular, el inicio de la enseñanza de la mecánica cuántica. Enseguida, se tratan aplicaciones de la teoría cuántica en tres dimensiones, teoría de perturbaciones, etc. Ver libros tradicionales en la tabla 3.1.

Se ha presentando además otro rumbo: el enfoque *Spin-First*, que presenta desde el principio un sistema sencillo de espín $1/2$ (o espín 1) previo a presentación la función de onda y operadores de posición, velocidad o energía. Entre los libros que usan este enfoque están los descritos en la tabla 3.2.

Repasamos ahora algunas características preliminares importantes que saldrán a relieve en breve:

- El sistema de espín $1/2$ es el sistema más simple y limpio para pensar las paradojas conceptuales de la mecánica cuántica [19]. Una de tales, es la paradoja EPR (Einstein–Podolsky–Rosen), rescrita por David Bohm.
- No tiene contraparte clásica.
- Se puede aplicar la mecánica cuántica moderna, tal como la dejó Dirac y von Neuman.
- Feynman afirmó que el espín es un fenómeno cuántico por excelencia (exclusivo de la mecánica cuántica)
- Sakurai describe el enfoque como un *tratamiento de shock*.

Hay autores como McIntyre que proponen una formulación axiomática para el enfoque. Otros, como Townsend [22], no. En lo que a continuación se expone, se usa una formulación

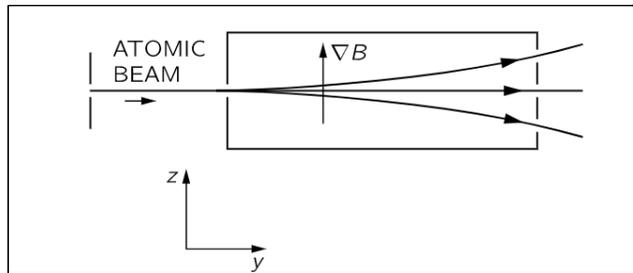
postulatoria, al estilo de David H. McIntyre, usando similar nomenclatura y presentación matemática y conceptual [24]. Con esta perspectiva postulatoria, quizá al estudiante le será más sencillo abordar la mecánica cuántica relativista de Dirac posteriormente.

Sakurai y Townsend proponen experimentos mentales; mientras que McIntyre va un poco más allá y él y su equipo han programado una aplicación para simular experimentos de Stern-Gerlach secuenciales. En base a estos experimentos se aprende sobre el formalismo matemático de la mecánica cuántica.

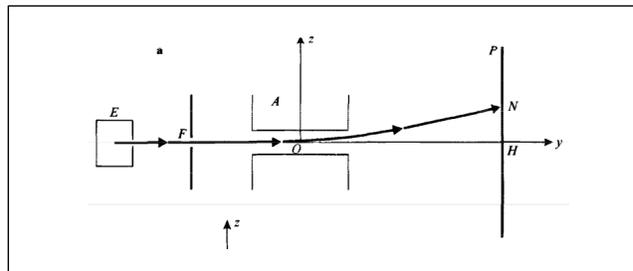
¿De qué trata exactamente y como se logra implementar efectivamente el enfoque *Spin-First*? Las páginas restantes de este trabajo lo describe.

Modelo esquemático del aparato de Stern-Gerlach

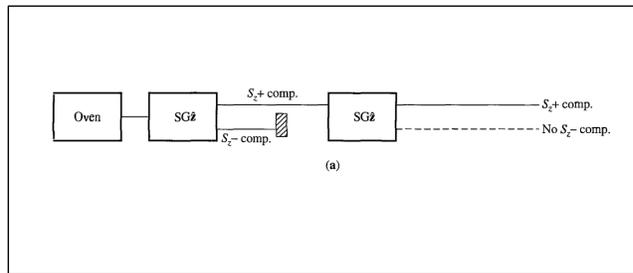
Los diversos autores que hacen uso del enfoque *Spin-First* utilizan representaciones esquemáticas diferentes para modelar el aparato de Stern-Gerlach y sugieren experimentos mentales (Gedankenexperiment) en sus exposiciones. Unas presentaciones son más ventajosas que otras. Los modelos se muestran en la Fig. 3.3, según se presentan en los libros de texto correspondientes al autor listado.



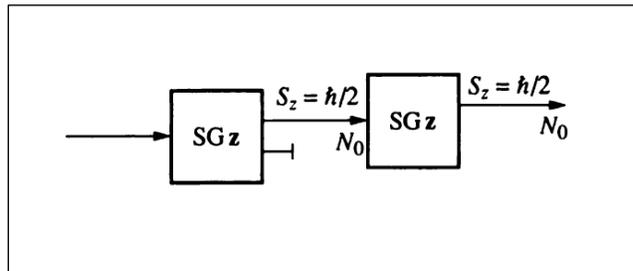
Feynman



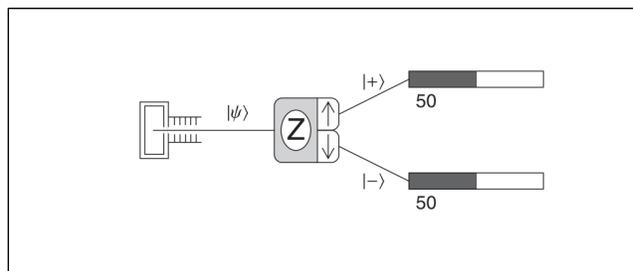
Cohen-Tannoudji



Sakurai



Townsend



McIntyre

Figura 3.3: Modelos esquemáticos usados por diversos autores para el dispositivo de Stern-Gerlach

La representación esquemática del aparato o dispositivo de Stern-Gerlach elegida en este trabajo se muestra en la Fig. 3.4, en base al modelo propuesto por Schroeder [26] en su aplicación para MAC y luego usado por McIntyre en su libro [23] y aplicación SPINS: un horno que produce los átomos de plata y pasan por un colimador, dos o tres puertos de salida que representan los dos o tres posibles valores medidos para el espín de la partícula, según sea el caso para espín $1/2$ o 1 , respectivamente. Además, los contadores de átomos se encuentran a la derecha. En el experimento original eran detectores, no contadores; pero resulta conveniente pensar en contadores de átomos. Se incorpora también, cuando se estima necesario, explicitar el número de partículas N_0 que ingresan a determinado analizador.

Las flechas hacen referencia a los valores posibles de las mediciones. En el caso de espín $1/2$ los valores posibles son: $S_z = \pm\hbar/2$, mientras que en el caso de partículas de espín 1 serían $S_z = \hbar, -\hbar, 0$.

Notar que el dispositivo de Stern-Gerlach, a veces denotado como SGA (Stern-Gerlach Apparatus) está rotulado con una $\mathbf{Z}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \hat{\mathbf{n}}$ lo cual indica la dirección la orientación del gradiente del campo magnético. El vector $\hat{\mathbf{n}}$ representa un vector unitario que apunta en cierta dirección arbitraria; esto es, el aparato se gira un ángulo ϕ con el eje x en el plano xy .

Se puede expresar que el dispositivo de Stern-Gerlach *filtra, selecciona ó analiza* las partículas entrantes en dos posibles salidas: $S_z = \pm\hbar/2$, como se hará evidente a continuación.

A partir de este modelo se pueden introducir varios conceptos importantes:

- Solo hay ciertos valores permitidos para la medición, que se pueden llamar espín arriba, espín abajo, etc.
- A la cantidad física medida se le conoce como **observable**; así como también lo es la posición, momento, etc que los alumnos han trabajado desde cursos de física clásica.
- Podemos considerar al dispositivo como un analizador.

- Se establece que la representación matemática para los estados cuánticos se llaman *kets*. Por ejemplo, el estado de los átomos que salen del horno se denota con un ket genérico $|\psi\rangle$, mientras que el estado con el que salen de los puertos de superior e inferior se denotan $|+\rangle$ y $|-\rangle$, respectivamente. Entre otras nomenclaturas se suelen usar (e.g. $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$). Esta notación de *kets* se la debemos a Paul A. M. Dirac, quien la estableció en 1939.

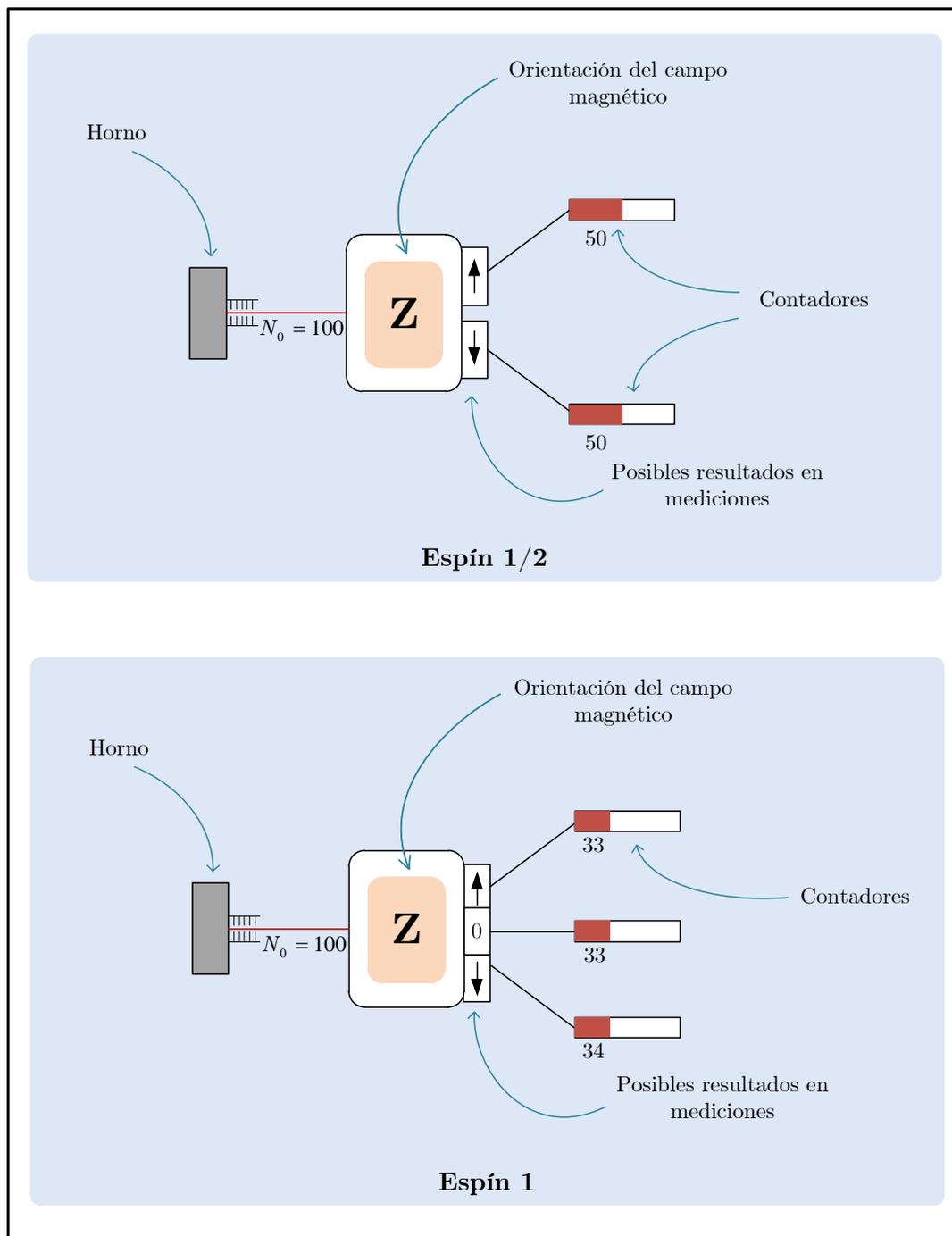


Figura 3.4: Modelos esquemáticos propuestos para dispositivos de Stern-Gerlach

Una vez introducido lo anterior a partir del modelo presentado en la Fig. 3.4 se puede enunciar un primer postulado de la mecánica cuántica:

Postulado 1: El estado de un sistema mecánico cuántico, incluyendo toda la información que se puede saber sobre el mismo, está representado matemáticamente por un ket normalizado $|\psi\rangle$.

El concepto de ket *normalizado*, así como otras propiedades de éstos, se repasan en breve. El primer postulado establece, pues, que los kets representan estados cuánticos vectoriales. Estos vectores de estado, además, deben emplear números complejos para describir correctamente los sistemas de la mecánica cuántica.

Los estados cuánticos vectoriales son parte de un espacio vectorial llamado espacio de Hilbert. Al momento de introducir la función de onda posteriormente, conviene explicar al estudiante que también yace en un espacio de Hilbert (en este caso de dimensionalidad infinita) y se hacen las conexiones convenientes con el espacio finito.

La dimensionalidad del espacio de Hilbert se determina por la física del sistema en particular. Por ejemplo, para el caso de espín 1/2 el espacio es bidimensional.

Más sobre los kets y el espacio dual

Habiendo presentado el esquema del dispositivo de Stern-Gerlach de la Fig. 3.4 e introducido el concepto de vector de estado cuántico partir del primer postulado, se puede continuar caracterizando el espacio vectorial y los kets.

Los kets $|\pm\rangle$ forman una base completa, ortogonal y normalizada. Se puede hacer una analogía matemática con el espacio euclídeo tridimensional que se usa en física clásica con los vectores \hat{x} , \hat{y} y \hat{z} para obtener una base completa, y expresar cualquier vector espacial en función de éstos. Puede hacerse, además, una analogía con los vectores de campo eléctrico y magnético, tal como lo sugiere Sakurai [9].

En relación al espacio euclídeo tridimensional, la analogía se resume como sigue.

Un estado general entonces se puede escribir en términos de la base de los vectores $|+\rangle$ y $|-\rangle$, tal como sucede con un vector A cualquiera en el espacio tridimensional: $A =$

$a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z}$. Así, para nuestro espacio vectorial normado complejo:

$$|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle \quad (3.5.1)$$

Algo importante que hacer notar es que los kets $|\psi\rangle$ no son funciones de onda, sobre todo si los alumnos han tenido un curso previo de mecánica ondulatoria. Los kets no tienen una dependencia espacial. Tampoco se puede decir que las funciones de onda son kets especiales. De hecho, hay otros atributos requeridos para describir por completo a la partícula, como su posición y momento. A este punto, el interés se concentra solo en los grados de libertad de *espín*, más nada. Históricamente, por supuesto, la mecánica cuántica se enfocó en grados de libertad más comunes, como la posición y de hecho, los autores de libros tradicionales comienzan con discusiones de esas cantidades en el contexto de la mecánica cuántica.

Es importante que los alumnos logren reconocer que en el caso de la mecánica cuántica no es mera conveniencia el uso de un espacio complejo, es necesario. No sucede como en teoría electromagnética, que se usan números complejos por conveniencia, recuperándose las cantidades físicas (reales) cuando se necesite.

El análogo del vector conjugado complejo en física clásica es lo que Dirac acuñó como *bra*: $\langle\psi|$. Estos pertenecen a otro espacio vectorial, también complejo, conocido como *espacio dual*.

En la base de $|\pm\rangle$, un bra genérico se escribe como $\langle\psi| = a^*\langle+| + b^*\langle-|$. Este sería el correspondiente al ket generalizado $|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$.

El producto escalar, **producto interno** o proyección se define como un bra-ket **bracket**:

$$(\langle+|)(|-\rangle) = \langle+|-\rangle \quad (3.5.2)$$

De hecho, desde otra perspectiva, se puede pensar también en la definición de un producto interno $\langle\phi|\psi\rangle$ y que luego Dirac “partió” en dos. Se presentan otras propiedades de los bra y kets base:

Los vectores están normalizados:

$$\langle +|+ \rangle = 1 \quad (3.5.3)$$

$$\langle -|- \rangle = 1 \quad (3.5.4)$$

Son ortogonales:

$$\langle +|- \rangle = 0 \quad (3.5.5)$$

$$\langle -|+ \rangle = 0 \quad (3.5.6)$$

Forman una base completa:

$$|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle \quad (3.5.7)$$

En general, hablamos de normalización, ortogonalidad y completitud. Se puede seguir usando analogías con los vectores $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$, que tienen las mismas propiedades.

Notar que una manera alternativa para expresar las relaciones de ortogonalidad y normalización, para cualquier base, es la siguiente:

$$\langle a_i|a_j \rangle = \delta_{ij} \quad (3.5.8)$$

La misma puede ser de utilidad para temas posteriores.

El producto ket-ket y bra-bra no está definido, mientras que el producto de un ket y un bra si lo está.

Con estas reglas, el producto del bra $\langle +|\psi\rangle$ con un vector de estado general será:

$$\langle +|\psi\rangle = \langle +|(a|+\rangle + b|-\rangle) \quad (3.5.9)$$

$$= \langle +|a|+\rangle + \langle +|b|-\rangle \quad (3.5.10)$$

$$= a\langle +|+\rangle + b\langle +|-\rangle \quad (3.5.11)$$

$$= a \quad (3.5.12)$$

Ya que el producto interno obedece a propiedad distributiva.

De aquí que podemos escribir también:

$$|\psi\rangle = |+\rangle\{\langle +|\psi\rangle\} + |-\rangle\{\langle -|\psi\rangle\} \quad (3.5.13)$$

Y de la misma forma se obtiene:

$$\langle \psi | + \rangle = \langle + | a^* | + \rangle + \langle - | b^* | + \rangle = a^* \quad (3.5.14)$$

De hecho, esta propiedad aplica para cualesquiera dos vectores de estado generales $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$:

$$\langle \phi | \psi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle^* \quad (3.5.15)$$

Normalización

El primer postulado requiere que todos los vectores de estado estén normalizados (esto tiene que ver con la interpretación probabilística luego descrita), no solo los vectores base (que sabemos tienen norma unitaria). En otras palabras es necesario que:

$$\langle \psi | \psi \rangle = \{a^* \langle + | + \rangle + b^* \langle - | - \rangle\} \{a | + \rangle + b | - \rangle\} = 1 \quad (3.5.16)$$

Por tanto:

$$a^* a \langle + | + \rangle + a^* b \langle + | - \rangle + b^* a \langle - | + \rangle + b^* b \langle - | - \rangle = 1 \quad (3.5.17)$$

$$\Rightarrow a^* a + b^* b = 1 \quad (3.5.18)$$

$$\Rightarrow |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (3.5.19)$$

Usando los resultados de la Ec. (3.5.12) y Ec. (3.5.14):

$$|\langle + | \psi \rangle|^2 + |\langle - | \psi \rangle|^2 = 1 \quad (3.5.20)$$

Los alumnos pueden realizar múltiples ejercicios de normalización de vectores, encontrando las constantes (complejas) de normalización. Aquellos que han llevado algún curso de mecánica ondulatoria tiene la oportunidad de hacer conexiones desde ya con la función de onda, y recordar como la normalizaban usando la condición:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad (3.5.21)$$

Probabilidad

De la relación encontrada Ec. (3.5.20):

$$|\langle + | \psi \rangle|^2 + |\langle - | \psi \rangle|^2 = 1 \quad (3.5.22)$$

se postula que cada término de la suma es igual a la probabilidad que el estado cuántico $|\psi\rangle$ se mida en el estado $|+\rangle$ ó $|-\rangle$. Así, esta condición garantiza que estará en uno u otro estado, como se advierte experimentalmente: para sistemas de espín $1/2$ solo hay dos posibles valores en la medición.

Por tanto:

$$\mathcal{P}_{S_z=+\hbar/2} = |\langle +|\psi\rangle|^2 \quad (3.5.23)$$

es igual a la probabilidad de que el estado $|\psi\rangle$ se encuentre en el estado $|+\rangle$ cuando se realiza una medición de S_z ; o sea, de que se obtiene un resultado $S_z = +\hbar/2$. De manera similar:

$$\mathcal{P}_{S_z=-\hbar/2} = |\langle -|\psi\rangle|^2 \quad (3.5.24)$$

indica la probabilidad que la medición conlleve al resultado $S_z = -\hbar/2$.

Esto es toral en mecánica cuántica, que viene de la interpretación de Copenhague (habiendo otras como posiciones filosóficas, como la realista, la agnóstica, entre otras).

Vemos aquí, como adelantado, que esta regla básica de probabilidad explica por qué las reglas de la mecánica cuántica requieren que todos los estados estén normalizados antes de hacer uso de cálculos de probabilidad.

Es importante afirmar que, tal como en experimentos de Stern-Gerlach reales, el número de átomos detectados en estados particulares pueden ser predichos por reglas de probabilidad. En la Fig. 3.4 no hay alusión a incertidumbres estadísticas por claridad, pero tanto en la mecánica cuántica como en los simuladores de experimentos de Stern-Gerlach citados en este documento, existen reglas de probabilidad e incertidumbre.

Las descritas al momento son las reglas básicas del espacio de kets y su espacio dual de bras. En lo que sigue, se consideran 4 experimentos que se originan de los libros de textos contenidos en la tabla 3.2, como el de Sakurai o Townsend. Estos experimentos sirven para dar a conocer la naturaleza de la mecánica cuántica.

Antes de proceder con el abordaje de los experimentos, hemos de introducir un postulado más: el postulado 4 de la mecánica cuántica. De nuevo, todos los postulados se usarán para explicar los experimentos de Stern-Gerlach. Dice así:

Postulado 4: Para espectros discretos de valores propios, la probabilidad de obtener un valor propio a_n en una medición del observable A en el sistema que se encuentra en un estado normalizado $|\psi\rangle$ es:

$$\mathcal{P}_{a_n} = |\langle a_n | \psi \rangle|^2$$

Para espectros continuos de valores propios, la probabilidad de obtener un valor propio x en una medición del observable A en el sistema que se encuentra en un estado normalizado $|\psi\rangle$ es:

$$d\mathcal{P}(x) = |\langle x | \psi \rangle|^2 dx$$

Más adelante se describen los vectores propios y valores propios, en el contexto del tercer y cuarto postulado. Al momento, es suficiente indicar que para un sistema de espín $1/2$, este postulado dicta:

Postulado 4: La probabilidad de obtener el valor $\pm\hbar/2$ en una medición del observable S_z en el sistema que se encuentra en un estado normalizado $|\psi\rangle$ es:

$$\mathcal{P}_{\pm} = |\langle \pm | \psi \rangle|^2$$

De nuevo, se puede seguir o no un camino postuladorio: Townsend [22] no lo hace, pero siempre explica el comportamiento en base a los postulados de forma implícita. McIntyre, por el contrario, sigue un tratado postuladorio explícito. De cualquier manera el estudiante debe lograr aprender lo mismo al margen del enfoque. Sakurai [9] también sigue un planteamiento axiomático.

Regresando al postulado 4, éste requiere de conceptos que se abordan en el segundo y tercer postulado (por las referencias que hace a observables y valores propios). Además, es importante notar que para sistemas que presentan valores propios discretos se presenta una versión, mientras que para aquellos observables que muestran espectros continuos de valores propios (como la posición) se tiene una versión diferente. Para el último caso la

probabilidad está dada por:

$$d\mathcal{P}(x) = |\langle x|\psi\rangle|^2 dx \quad (3.5.25)$$

Donde $|\langle x|\psi\rangle|^2$ es ahora una densidad de probabilidad. En el apartado *La transición a la función de onda* se discute más sobre esto.

Retomando sistemas discretos, el cuadrado del producto interno es una probabilidad, siempre que $|\psi\rangle$ se encuentre apropiadamente normalizado, acorde a (3.5.16). Al producto interno, por tanto, se le define como *amplitud de probabilidad*, o solo amplitud. En el contexto de analizadores de Stern-Gerlach, en los cuales átomos entran y salen, es conveniente notar que la amplitud de probabilidad se puede escribir en éstos términos:

$$\langle out|in\rangle = \langle in|out\rangle^*$$

Con esta matemática básica se pueden analizar algunos experimentos con los alumnos, y/o hacer una extensión de las ideas y la estadística como tal en laboratorios virtuales. En la intervención educativa descrita en el siguiente capítulo se sigue esta filosofía. Además, se pueden hacer uso de histogramas para representar probabilidades de las mediciones.

La matemática y postulados abordados al momento son suficientes para explicar los resultados de los experimentos siguientes, con tendencia hacia lo deductivo. O se puede trabajar al contrario, a partir de los experimentos llegar a los postulados generales, usando entonces razonamiento inductivo.

Finalmente, previo a la descripción de los experimentos, algo importante que mencionar sobre el experimento original de Stern-Gerlach, mostrado en la Fig. 3.4, es que no se puede predecir por cuál puerto los átomos saldrán, las llegadas a los contadores son totalmente aleatorias. Lo único que podemos decir es que existe una probabilidad del 50%.

Una cosa más que será de utilidad: la relación entre la probabilidad de llegada y el número de partículas totales N_0 está dada por:

$$\mathcal{P}_+ = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_+}{N} \quad (3.5.26)$$

Esto es sensible, ya que si en el enfoque de Spin-First se usan simuladores (como SPINS), estos no brindan probabilidades, sino el número de partículas que arriban a

determinado contador. La relación arriba nos permite conocer la probabilidad dado el número de partículas que entran al analizador y salen por un puerto específico del mismo, o viceversa.

Experimento 1: preparación de estados

Se presenta en la Fig. 3.5 un experimento para el cual se tienen dos analizadores de Stern-Gerlach. Ahora, en lugar de medir el número de átomos en el puerto superior, se dirigen esos átomos a un segundo analizador de SG (cuyo campo magnético también va en dirección $+\hat{z}$) y se mide nuevamente la componente de espín. El resultado del experimento es que ningún átomo se detecta en el puerto inferior. Todos los átomos que salen del primer puerto superior del primer analizador también pasan por el puerto superior del segundo analizador. Esto es: cuando el primer analizador mide que un átomo tiene componente $S_z = +\hbar/2$, entonces el segundo analizador también mide $S_z = +\hbar/2$. De forma equivalente, se puede decir todas las partículas se encuentran en el estado $|+\rangle$.

Los analizadores, aunque son iguales, juegan roles diferentes. Se dice que el primer analizador *prepara* el haz en un estado cuántico particular y el segundo lo mide. Así, los detalles del estado cuántico de los átomos que vienen del horno pueden ser ignorados si no son de nuestro interés; nos enfocamos en lo que ocurre en el segundo analizador.

Mediante el cuarto postulado de la mecánica cuántica es fácil predecir los resultados:

$$\mathcal{P}_+ = |\langle +|+\rangle|^2 = 1 \quad (3.5.27)$$

$$\mathcal{P}_- = |\langle -|+\rangle|^2 = 0 \quad (3.5.28)$$

También se pudo analizar al contrario, como bien dice Sakurai: nuestro conocimiento del mundo físico viene de realizar suposiciones de la naturaleza, formular estas suposiciones en postulados, derivar predicciones de los postulados, y probar estas predicciones contra los experimentos [9]:

O sea, a partir de la experimentación pudimos encontrar que:

$$\mathcal{P}_+ = |\langle +|+\rangle|^2 = 1 \quad (3.5.29)$$

$$\mathcal{P}_- = |\langle -|+\rangle|^2 = 0 \quad (3.5.30)$$

Y con ello concluir que $|+\rangle$ y $|-\rangle$ son ortogonales entre sí, de acuerdo a lo definido en Ecs. (3.5.5) y (3.5.6). Lo mismo se puede concluir para los estados correspondientes estando el analizador girado 90° : $|+\rangle_x$ es ortogonal a $|-\rangle_x$ y además $|+\rangle_y$ es ortogonal a $|-\rangle_y$. Estos kets, $|\pm\rangle_x$ y $|\pm\rangle_y$, describen la medición de S_x y S_y , respectivamente, y pertenecen al mismo espacio de Hilbert.

En la parte inferior de la Fig. 3.5 se muestra también el experimento para un sistema de espín 1, pudiéndose usar también esta alternativa si el instructor requiere mayor dificultad.

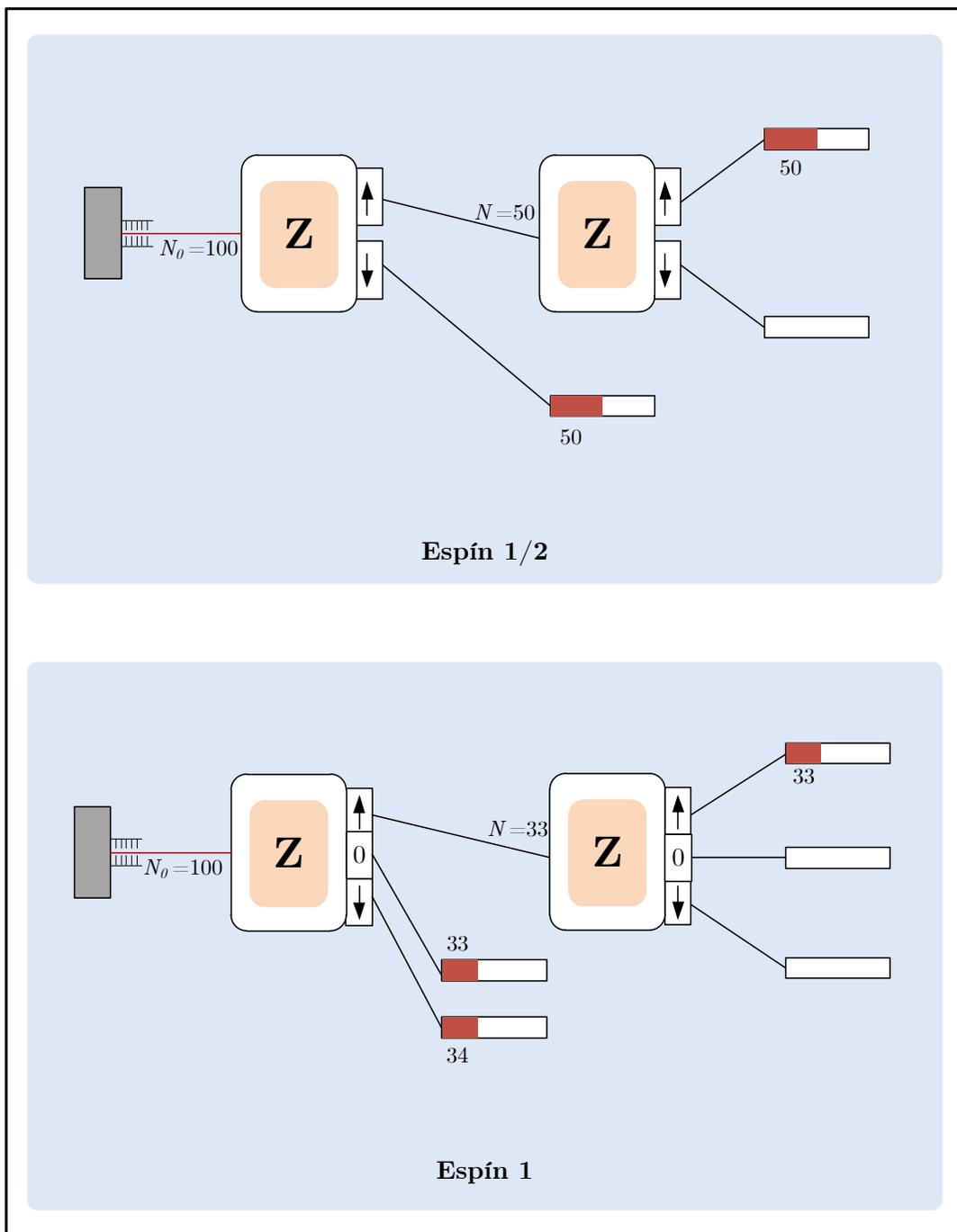


Figura 3.5: Modelo esquemático para Experimento 1: preparación de estados

Experimento 2: superposición

Para el experimento 2 propuesto, vease la Fig. 3.6, el primer analizador prepara al sistema en el estado $|+\rangle$, pero ahora el segundo analizador está girado 90° , de tal manera que se encuentra alineado con el eje x . Bien podría también proponerse alineado con el eje y , caso que es ligeramente más complicado. En el primer caso que se mide ahora la componente de espín a lo largo del eje x . Como se muestra, el resultado es que se obtienen 50% de los átomos entrantes del puerto superior del primer analizador en cada puerto del segundo. Por supuesto, suponemos nuevos estados correspondientes $|+\rangle_x$ y $|-\rangle_x$. Notamos además que solo hay dos valores posibles para la medición, no importa como esté orientado el analizador, es así.

No sabemos realmente por cual puerto cada partícula saldrá. Pareciera que algo hace falta, como lo establece la teoría de *variables locales ocultas*. Es buena oportunidad pues, para hacer mención a los alumnos sobre estas teorías, que fueron refutadas formalmente por John Bell, en cuanto a que no son compatibles con los resultados de la mecánica cuántica [25].

Si se requiere, se puede alternar enfoques deductivo e inductivo. Por ejemplo, en este caso se obtienen experimentalmente las siguientes probabilidades:

$$\mathcal{P}_{+x} = |{}_x\langle +|+\rangle|^2 = 1/2 \quad (3.5.31)$$

$$\mathcal{P}_{-x} = |{}_x\langle -|+\rangle|^2 = 1/2 \quad (3.5.32)$$

Si hacemos lo mismo pero poniendo el segundo analizador en el puerto inferior del primer analizador se obtienen la mismas probabilidades:

$$\mathcal{P}_{+x} = |{}_x\langle +|-\rangle|^2 = 1/2 \quad (3.5.33)$$

$$\mathcal{P}_{-x} = |{}_x\langle -|-\rangle|^2 = 1/2 \quad (3.5.34)$$

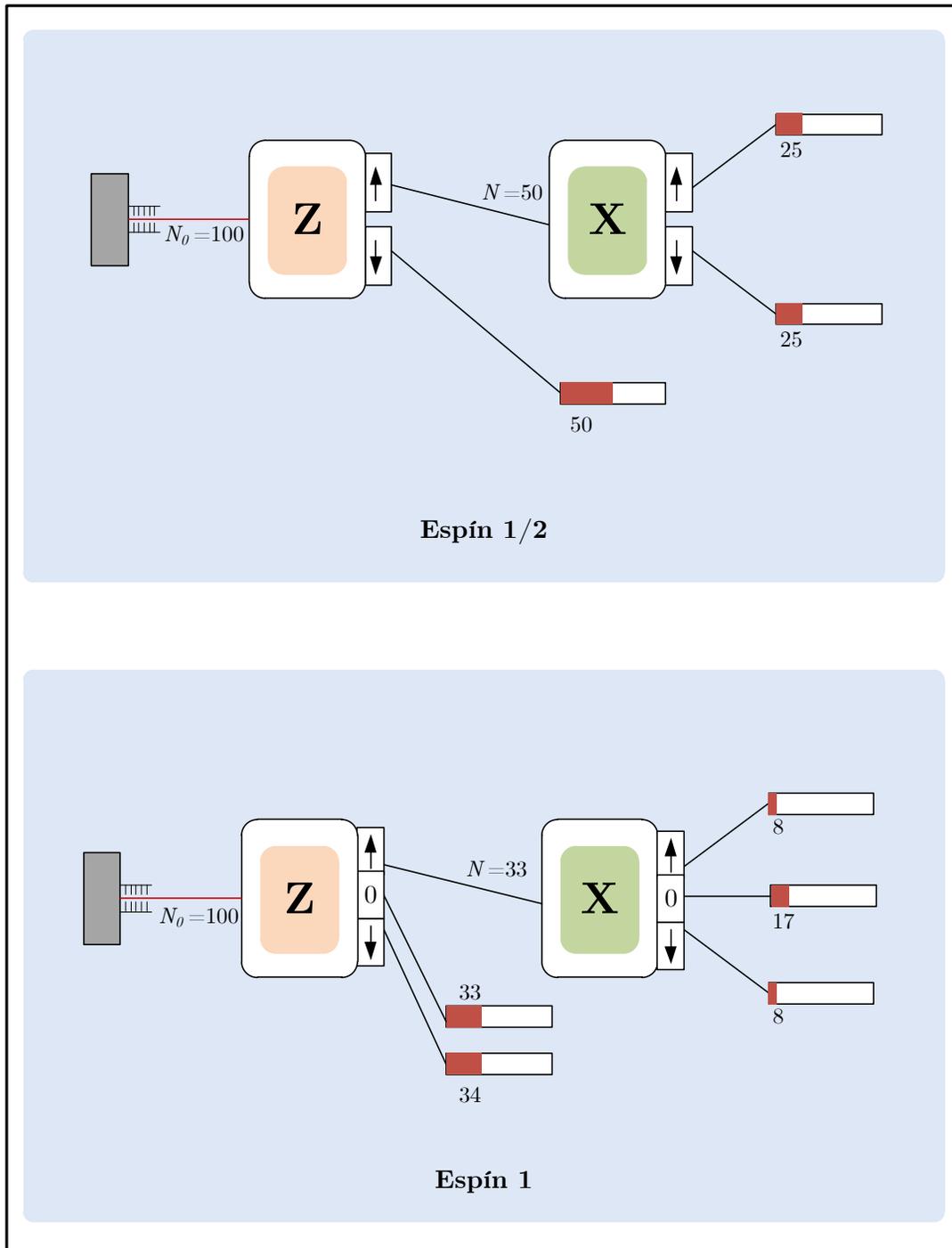


Figura 3.6: Modelo esquemático para Experimento 2: superposición de estados

A partir de estos resultados se pueden obtener los vectores de estado $|+\rangle_x$ y $|-\rangle_x$ en la base de S_z :

$$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle + |-\rangle] \quad (3.5.35)$$

$$|-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle - |-\rangle] \quad (3.5.36)$$

Cosa similar se puede realizar para el caso de tener el analizador orientado en y , $|+\rangle_y$ y $|-\rangle_y$ en la base de S_z , obteniéndose en tal caso:

$$|+\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle + i|-\rangle] \quad (3.5.37)$$

$$|-\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle - i|-\rangle] \quad (3.5.38)$$

Donde se usa también el hecho que son ortonormales (observación que se puede obtener del Experimento 1). Está claro que estos estados tienen componentes imaginarios y se nota aquí la necesidad de que el espacio sea complejo además de normado, como expuesto con anterioridad. Así, los vectores de estado en mecánica cuántica tienen coeficientes complejos, en general. Los resultados de las mediciones, sin embargo, serán siempre reales.

A la luz de lo anterior, resulta imperativo que los alumnos conozcan un poco de números complejos. Una de las posibles implementaciones presentadas en la sección 3.6, con la que se propone el uso del enfoque para alumnos que aún no han cursado alguna asignatura de mecánica cuántica, deberá ser acompañada con la enseñanza de álgebra de números complejos. El libro de David H. McIntyre [23], por ejemplo, presenta un apéndice con lo básico.

Estados de superposición

En virtud de la propiedad de completitud mencionada en sección previa, cualquier estado general se puede expresar como una superposición de los estados base $|+\rangle$ $|-\rangle$:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle)$$

Se puede pensar también en un haz que tiene 50 % de átomos en estado $|+\rangle$ y 50 % de átomos en estado $|-\rangle$; o sea, un estado mixto estadístico. Sin embargo, esto es diferente una *superposición* de estados, también llamada *superposición coherente*.

El experimento puede ayudar para aclarar diferencias entre un estado mixto estadístico con un estado de superposición.

Notación matricial

Se puede introducir a los alumnos a la representación matricial, tan útil para la programación (por ejemplo, para la programación de la aplicación SPINS). Un ket genérico puede escribirse como:

$$|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle \quad (3.5.39)$$

$$= \langle +|\psi\rangle|+\rangle + \langle -|\psi\rangle|-\rangle \quad (3.5.40)$$

Así, para el estado $|+\rangle_x$:

$$|+\rangle_x = \langle +|+\rangle_x|+\rangle + \langle -|+\rangle_x|-\rangle \quad (3.5.41)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle \quad (3.5.42)$$

La base la hemos elegido como la de S_z . Similarmente para el estado $|+\rangle_y$:

$$|+\rangle_y = \langle +|+\rangle_y|+\rangle + \langle -|+\rangle_y|-\rangle \quad (3.5.43)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle \quad (3.5.44)$$

Estaremos entonces de acuerdo que los coeficientes identifican de manera única un estado cuántico (dada cierta base), y podemos simplificar la notación. Un ket se *representa* (se usa el símbolo \doteq para tal fin) por un vector columna:

$$|+\rangle_x \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De manera que los vectores base se ven como:

$$|+\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|-\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La representación matricial para un ket genérico será:

$$|\psi\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle +|\psi\rangle \\ \langle -|\psi\rangle \end{pmatrix}$$

Para la representación matricial de bras, conviene recordar que para un estado cualquiera:

$$|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$$

se tiene el bra correspondiente:

$$\langle\psi| = a^*\langle+| + b^*\langle-|$$

De manera que el producto interno resulta:

$$\langle\psi|\psi\rangle = (a^*\langle+| + b^*\langle-|)(a|+\rangle + b|-\rangle) \quad (3.5.45)$$

$$= |a|^2 + |b|^2 \quad (3.5.46)$$

Por tanto, si el bra se representa como un vector fila:

$$\langle\psi| \doteq (a^* \quad b^*)$$

se obtiene el mismo resultado (3.5.46) al multiplicarlo matricialmente con la representación del ket:

$$\langle\psi|\psi\rangle = (a^* \quad b^*) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (3.5.47)$$

$$= |a|^2 + |b|^2 \quad (3.5.48)$$

En corto, un bra se representa como un vector fila, que es el complejo conjugado y transpuesto del vector columna que representa a su ket correspondiente.

Operadores y medición

Los observables definidos al momento son S_x , S_y y S_z , a estos les asociamos un par de kets correspondientes a las posibles mediciones en dicho observable.

¿Cómo representar los observables matemáticamente? Con operadores. El segundo postulado de la mecánica cuántica lo establece:

Postulado 2: Un observable físico se representa matemáticamente por un operador A que actúa en kets.

Un operador es un objeto matemático que actúa u opera en un ket y lo transforma en otro. Por ejemplo $A|\psi\rangle = |\phi\rangle$. Hay kets especiales que no cambian cuando son operados por un operador particular, excepto por una constante multiplicativa, que se sabe no cambia nada medible sobre ese estado. Un ejemplo sería $A|\psi\rangle = a|\psi\rangle$. A estos kets se les conoce como vectores propios del operador A y a las constantes multiplicativas como valores propios del operador. Los estudiantes de pregrado y posgrado de física a este punto conocen bien del problema de valores y vectores propios en el contexto de la mecánica clásica. El postulado 3 de la mecánica cuántica establece que:

Postulado 3: El único resultado posible de una medición de un observable es uno de sus valores propios a_n correspondiente al operador A .

A esto se le conoce como ecuación de valores propios. En el caso del sistema de espín $1/2$ se tiene:

$$S_z|+\rangle = +\frac{\hbar}{2}|+\rangle \quad (3.5.49)$$

$$S_z|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle \quad (3.5.50)$$

Estas ecuaciones son suficientes para determinar cómo el operador S_z actúa en los kets $|+\rangle$ y $|-\rangle$; sin embargo, es también útil representar operadores de forma matricial. Conocida la representación de los kets como vectores columna, para que las relaciones arriba se cumplan, la representación del operador S_z debe ser una matriz de 2×2 :

$$S_z \doteq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

En este supuesto, las ecuaciones (3.5.49) y (3.5.50) resultan:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = +\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De aquí que:

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = +\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De manera que S_z será:

$$S_z \doteq \begin{pmatrix} \hbar/2 & 0 \\ 0 & -\hbar/2 \end{pmatrix} \quad (3.5.51)$$

$$\doteq \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.5.52)$$

Así, las Ecs. (3.5.49) y (3.5.50) se cumplen con S_z representado como la matriz (3.5.52), debiéndose interpretar ambos lados de cada ecuación como productos matriciales.

Nótese además que la matriz que representa a S_z es diagonal y sus elementos diagonales son sus valores propios. De hecho esos resultados son generales, sin importar el operador:

- Un operador es siempre diagonal en su propia base.
- Los elementos diagonales son los valores propios del operador.
- Los vectores propios son vectores unitarios en su propia base.

Se puede encontrar también el operador S_x conocido lo siguiente:

$$S_x |\pm\rangle_x = \pm \frac{\hbar}{2} |\pm\rangle_x \quad (3.5.53)$$

$$|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle \pm |-\rangle] \quad (3.5.54)$$

De nuevo, suponemos una matriz de 2×2 con elementos por determinar:

$$S_x \doteq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (3.5.55)$$

Sustituyendo en la ecuación de valores propios Ec.(3.5.53):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.5.56)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3.5.57)$$

Lo cual conlleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$a + b = +\frac{\hbar}{2} \quad (3.5.58)$$

$$a - b = -\frac{\hbar}{2} \quad (3.5.59)$$

$$c + d = -\frac{\hbar}{2} \quad (3.5.60)$$

$$c - d = -\frac{\hbar}{2} \quad (3.5.61)$$

a y c se obtienen fácilmente al sumar (3.5.58) con (3.5.59) y (3.5.60) con (3.5.61), respectivamente:

$$a = 0 \quad (3.5.62)$$

$$c = \frac{\hbar}{2} \quad (3.5.63)$$

Al sustituir estos valores en las ecuaciones se obtiene para b y d :

$$b = \frac{\hbar}{2} \quad (3.5.64)$$

$$d = 0 \quad (3.5.65)$$

Así que el operador S_x resulta:

$$S_x \doteq \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5.66)$$

Se puede proceder de la misma manera para S_y , obteniendo:

$$S_y \doteq \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5.67)$$

Operadores: generalización

Siguiendo el caso de un espacio vectorial complejo bidimensional, se puede representar un operador cualquiera de la siguiente manera:

$$A \doteq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Se debe hacer notar que la operación de A en un ket base resulta en:

$$A|+\rangle \doteq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

Si se realiza el producto interno entre el nuevo ket y el bra correspondiente al estado base $|+\rangle$:

$$\langle +|A|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = a$$

Lo cual sirve para aislar uno de los elementos de la matriz. En general, los elementos matriciales tienen la estructura $\langle bra|Operador|ket\rangle$, resultando:

$$A = \begin{pmatrix} \langle +|A|+\rangle & \langle +|A|-\rangle \\ \langle -|A|+\rangle & \langle -|A|-\rangle \end{pmatrix}$$

En general, para un espacio N dimensional:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Los elementos matriciales serán:

$$A_{ij} = \langle i|A|j\rangle$$

Y la base se asume es el estado $|i\rangle$.

Por tanto, un estado en la base de $|i\rangle$ se puede escribir como $|\psi\rangle = \sum c_i|i\rangle$, donde c_i son coeficientes complejos. Entonces el operador actuando en $|\phi\rangle$ dará como resultado:

$$A|\psi\rangle \doteq \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}c_1 + A_{12}c_2 + A_{13}c_3 + \dots \\ A_{21}c_1 + A_{22}c_2 + A_{23}c_3 + \dots \\ A_{31}c_1 + A_{32}c_2 + A_{33}c_3 + \dots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Ahora bien, si escribimos el nuevo ket $|\phi\rangle = A|\psi\rangle$ como $|\psi\rangle = \sum_i b_i|i\rangle$, los coeficientes serán $b_i = \sum_j A_{ij}c_j$.

Diagonalización

Si se piensa ahora que se tiene un operador, por ejemplo S_x , S_y o S_z , o bien un nuevo operador, ¿de qué manera se encuentran las posibles mediciones del observable? O sea, ¿cómo se obtienen sus sus valores propios? Diagonalizando. En otras palabras se debe resolver la ecuación de valores propios:

$$A|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle \quad (3.5.68)$$

Para el caso de S_x , con λ representando los posibles valores propios y $|\lambda\rangle$ los vectores propios correspondientes:

$$S_x|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \quad (3.5.69)$$

Sabemos que esto se cumple si:

$$\det(S_x - \lambda I) = 0 \quad (3.5.70)$$

donde I es la matriz identidad. Recordando que S_x está dada por Ec. (3.5.67), se requiere:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\hbar/2 \\ -\hbar/2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.5.71)$$

El determinante resulta en la siguiente ecuación, conocida como ecuación característica o secular:

$$\lambda^2 - (\hbar/2)^2 = 0 \quad (3.5.72)$$

Por tanto:

$$\boxed{\lambda = \pm \frac{\hbar}{2}} \quad (3.5.73)$$

A partir de estos valores propios se obtienen los vectores propios correspondientes sustituyendo en Ec. (3.5.69)¹. Los estudiantes de pregrado de física de la UNAH no tendrán problemas con ello; de hecho Métodos Matemáticos - FS351 es requisito para Mecánica Cuántica I - FS472.

Operador componente espín en una dirección arbitraria

El operador componente de espín en una dirección arbitraria en coordenadas esféricas (que generaliza los casos S_z , S_y y S_x) puede obtenerse mediante:

$$S_n = \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (3.5.74)$$

$$= S_x \sin \theta \cos \phi + S_y \sin \theta \sin \phi + S_z \cos \theta \quad (3.5.75)$$

Sustituyendo los operadores ya conocidos se obtiene:

$$S_n \doteq \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.5.76)$$

Tal como se procedió con anterioridad, requerimos:

$$\det(S_n - \lambda I) = 0 \quad (3.5.77)$$

Sustituyendo el operador S_n :

$$\begin{vmatrix} \frac{\hbar}{2} \cos \theta - \lambda & \frac{\hbar}{2} \sin \theta e^{-i\phi} \\ \frac{\hbar}{2} \sin \theta e^{i\phi} & -\frac{\hbar}{2} \cos \theta - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.5.78)$$

¹Para una exposición más amplia sobre diagonalización de matrices, véase el libro de G.B. Arfken *Mathematical Methods for Physicists*, Sexta Edición, Elsevier, sección 3.5

La ecuación característica resulta:

$$\lambda^2 - (\hbar/2)^2 \cos^2 \theta - (\hbar/2)^2 \sin^2 \theta = 0 \quad (3.5.79)$$

Resolviendo:

$$\lambda^2 - (\hbar/2)^2 = 0 \quad (3.5.80)$$

$$\lambda^2 = (\hbar/2)^2 \rightarrow \lambda = \pm \hbar/2 \quad (3.5.81)$$

Como esperado.

Los vectores propios resultan:

$$|+\rangle_n = \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |-\rangle \quad (3.5.82)$$

$$|-\rangle_n = \sin \frac{\theta}{2} |+\rangle - \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |-\rangle \quad (3.5.83)$$

De hecho, el estado más general para un sistema de espín 1/2 está dado por la Ec. (3.5.82). Obsérvese esto a partir del ket general propuesto $|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$, con a y b complejos. Ya que el estado debe estar normalizado $|a|^2 + |b|^2 = 1 \rightarrow |b|^2 = 1 - |a|^2$ de manera que una forma alternativa de escribirlo es:

$$|\psi\rangle = |a||+\rangle + \sqrt{1 - |a|^2} e^{i\phi} |-\rangle \quad (3.5.84)$$

Y esto precisamente converge con Ec. (3.5.82) parametrizando $|a| = \cos(\theta/2)$. Se ha usado el hecho de que la fase general de un estado cuántico no afecta la probabilidad, solo interesa la fase relativa entre componentes. De modo que se puede escoger un coeficiente real positivo, como se ha hecho.

Operadores hermitianos

Se ha visto que los valores propios de S_x , S_y o S_z son reales. Se puede afirmar lo mismo para cualquier otro operador que represente variables físicas en mecánica cuántica, tal como el operador de energía, posición y cantidad de movimiento. Todos los operadores que corresponden a observables físicos tienen propiedades especiales: son *hermitianos*.

La definición de operador hermitiano puede hacerse desde el mundo de los kets y bras como sigue.

Un operador A operando en un bra $\langle\psi|$ da como resultado otro bra $\langle\xi|$:

$$\langle\xi| = \langle\psi|A \quad (3.5.85)$$

Éste, sin embargo, no es el bra correspondiente al ket $|\phi\rangle = A|\psi\rangle$. Más bien, el bra correspondiente $\langle\phi|$ se encuentra definiendo un nuevo operador A^\dagger de acuerdo a:

$$\langle\phi| = \langle\psi|A^\dagger \quad (3.5.86)$$

A este nuevo operador A^\dagger se le conoce como hermitiano adjunto del operador A . El hermitiano adjunto A^\dagger se obtiene por transposición y conjugación compleja de la matriz que representa al operador A . Ahora, si el operador A es igual a su hermitiano adjunto A^\dagger , el operador A es hermitiano.

Los matrices hermitianas tienen dos características importantes: 1) tienen valores propios reales 2) sus vectores propios forman una base completa del espacio de Hilbert.

Operadores de proyección

Lo siguiente es vital para los experimentos 3 y 4. Los alumnos aprenden a calcular estados con estos experimentos. Definamos en primer lugar un nuevo operador: el operador de proyección.

Sabemos que un estado general $|\psi\rangle$ en la base de S_z lo podemos escribir como:

$$|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle \quad (3.5.87)$$

$$= (\langle+|\psi\rangle)|+\rangle + (\langle-|\psi\rangle)|-\rangle \quad (3.5.88)$$

Si centramos nuestra atención en el primer término a la derecha de la ecuación, vemos que una forma equivalente de escribirlo es:

$$(\langle+|\psi\rangle)|+\rangle = |+\rangle(\langle+|\psi\rangle) \quad (3.5.89)$$

Ahora, tomando la expresión a la derecha, se puede agrupar el ket y el bra como sigue:

$$|+\rangle(\langle+|\psi\rangle) = (|+\rangle\langle+|)|\psi\rangle \quad (3.5.90)$$

El término $(|+\rangle\langle+|)$ es un producto que tiene un orden opuesto al producto interno $(\langle+|+ \rangle)$. Este producto debe ser un operador, ya que actúa en un ket $(|\psi\rangle)$ para producir otro. Es un nuevo tipo de operador conocido como **producto externo**.

Volviendo al ket genérico $|\psi\rangle$ en la forma de Ec. (3.5.88) encontramos algo interesante:

$$|\psi\rangle = (|+\rangle\langle+|)|\psi\rangle + (|-\rangle\langle-|)|\psi\rangle \quad (3.5.91)$$

$$= (|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|)|\psi\rangle \quad (3.5.92)$$

El término de en medio es otro operador, porque actúa en un ket para producir otro, el mismo ket, en este caso. Se le conoce como operador identidad $\mathbf{1}$. Matricialmente:

$$|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-| \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5.93)$$

A los términos individuales se les denomina operadores de proyección para sistemas de espín 1/2:

$$P_+ = |+\rangle\langle+| \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5.94)$$

$$P_- = |-\rangle\langle-| \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5.95)$$

De manera que:

$$P_+ + P_- = \mathbf{1} \quad (3.5.96)$$

Es importante notar lo siguiente: cuando el operador de proyección actúa en un estado $|\psi\rangle$, produce un nuevo ket que está alineado a lo largo del estado propio y tiene magnitud igual la amplitud para que el estado $|\psi\rangle$ se encuentre en ese estado propio; esto es:

$$P_+|\psi\rangle = |+\rangle\langle+|\psi\rangle = (\langle+|\psi\rangle)|+\rangle \quad (3.5.97)$$

$$P_-|\psi\rangle = |-\rangle\langle-|\psi\rangle = (\langle-|\psi\rangle)|-\rangle \quad (3.5.98)$$

De aquí que el proyector actuando en su correspondiente estado propio (e.g. $P_+ \leftrightarrow |+\rangle$) resulta en el estado propio y que el proyector actuando en un estado ortogonal resulta cero:

$$P_+|+\rangle = |+\rangle\langle+|+\rangle = |+\rangle \quad (3.5.99)$$

$$P_-|+\rangle = |-\rangle\langle-|+\rangle = 0 \quad (3.5.100)$$

Usando nuestros nuevos operadores podemos escribir la probabilidad como:

$$\mathcal{P}_+ = |\langle +|\psi\rangle|^2 \quad (3.5.101)$$

$$= \langle +|\psi\rangle^* \langle +|\psi\rangle \quad (3.5.102)$$

$$= \langle \psi|+\rangle \langle +|\psi\rangle \quad (3.5.103)$$

$$= \langle \psi|P_+|\psi\rangle \quad (3.5.104)$$

A la luz de ello, vemos que la probabilidad de la medición $S_z = \hbar/2$ puede ser calculada como un elemento matricial del operador de proyección, usando el estado $|\psi\rangle$ como entrada y el proyector P_+ correspondiente al resultado.

Del experimento 1 presentado anteriormente se puede percibir que la medición perturba el sistema: si un estado de entrada $|\psi\rangle$ se mide que tiene $S_z = +\hbar/2$, entonces el estado de salida ya no es $|\psi\rangle$, sino que ha cambiado a $|+\rangle$. Esto es lo que hace nuestro operador de proyección con una constante multiplicativa que es la amplitud de probabilidad (e.g. $P_+|\psi\rangle = |+\rangle \langle +|\psi\rangle = (\langle +|\psi\rangle)|+\rangle$). Así que, al dividir el nuevo estado por esa amplitud de probabilidad, la raíz cuadrada de Ec. (3.5.104), describimos el cambio abrupto del estado inicial como:

$$|\psi'\rangle = \frac{P_+|\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi|P_+|\psi\rangle}} = |+\rangle \quad (3.5.105)$$

De forma más general:

$$|\psi'\rangle = \frac{P_n|\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi|P_n|\psi\rangle}} \quad (3.5.106)$$

Así, el quinto postulado de la mecánica cuántica establece:

Postulado 5: Si después de una medición de A que lleva a un resultado a_n , el sistema cuántico se encuentra en un nuevo estado que es la proyección normalizada del estado original en un nuevo ket correspondiente al resultado de la medición.

A este efecto se le conoce como colapso, reducción o proyección del vector de estado cuántico.

Experimento 3: probabilidad total

El modelo para el experimento 3 se muestra en la Fig. 3.7. Sirve para enseñar como calcular una probabilidad total, cuando los átomos atraviesan varios aparatos de Stern-Gerlach.

En alusión a la figura, se puede obtener la probabilidad total como el producto de las probabilidades después de cada analizador, acorde a las reglas de probabilidades. Así, la probabilidad de que un átomo que sale del primer analizador (usando el camino superior entre el segundo y tercer analizador) emerja por el puerto superior del último analizador es:

$$\mathcal{P}_{\text{superior,+}} = |\langle +|+\rangle_x|^2 |\langle +|+\rangle|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Mientras que la probabilidad de que un átomo que sale del primer analizador emerja por el puerto inferior del último analizador es:

$$\mathcal{P}_{\text{superior,-}} = |\langle -|+\rangle_x|^2 |\langle +|+\rangle|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Se pueden realizar cálculos similares si se utiliza el puerto inferior del segundo analizador en lugar del superior para obtener:

$$\mathcal{P}_{\text{inferior,+}} = |\langle +|- \rangle_x|^2 |\langle -|+\rangle|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\mathcal{P}_{\text{inferior,-}} = |\langle -|- \rangle_x|^2 |\langle -|+\rangle|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Además, de este experimento se aprende que aunque en el primer analizador se mide $\hbar/2$ y en el segundo también (ver puertos superiores de la Fig. 3.7), a la salida del tercer analizador se tiene la misma probabilidad de medir $\hbar/2$ y $-\hbar/2$. Al menos a nivel clásico se esperarías tener también $\hbar/2$ a la salida del tercer analizador, pero no sucede así.

Se dice que S_x y S_z son observables incompatibles: no se pueden conocer (medir) los valores de ambos simultáneamente.

Así, con este experimento también se puede introducir la teoría de conmutadores para conocer si dos observables cualquiera son compatibles. Además, el principio de incertidumbre.

Se define el conmutador de dos operadores A y B como:

$$[A, B] = AB - BA \quad (3.5.107)$$

Si los operadores A y B conmutan se cumple que el conmutador es cero:

$$[A, B] = AB - BA = 0 \quad (3.5.108)$$

Caso contrario no conmutan. Es demostrable que si los operadores conmutan tienen vectores propios comunes y podemos medir uno sin borrar lo que se obtuvo para el otro observable previamente, a diferencia de lo que ocurre en este experimento 3. Cuando los operadores no conmutan se dice son incompatibles.

De hecho, para los operadores componente de espín se tienen las siguientes relaciones a partir de Ecs. (3.5.52), (3.5.66) y (3.5.67), mostrando incompatibilidad:

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x, \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y \quad (3.5.109)$$

El principio de incertidumbre establece la conexión entre el conmutador de dos observables y la precisión de las mediciones de estos.

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle| \quad (3.5.110)$$

Donde ΔA y ΔB son las incertidumbres o desviaciones estándar. Por supuesto, son las mínimas, podría haber mayor incertidumbre por errores experimentales, de instrumentación, etc.

Para el caso de la incertidumbre para medir la posición y momento de una partícula, que se suele introducir en mecánica ondulatoria:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (3.5.111)$$

Mientras que para el caso de operadores de espín S_x y S_y , usando Ec. (3.5.109) se obtiene:

$$\Delta S_x \Delta S_y \geq \frac{\hbar}{2} |\langle S_z \rangle| \quad (3.5.112)$$

Volviendo al experimento 3, si el estado inicial es $|+\rangle$ claro está que $\langle S_z \rangle = \hbar/2$ sin incertidumbre alguna ($\Delta S_z = 0$). Por otro lado, para los otros operadores, en vista del resultado anterior:

$$\Delta S_x \Delta S_y \geq \frac{\hbar}{2} |\langle S_z \rangle| = \frac{\hbar^2}{4} \neq 0 \quad (3.5.113)$$

Lo que nos lleva a concluir que no podemos conocer S_z y S_x ó S_z y S_y simultáneamente.

El operador $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$, cuya representación matricial es:

$$S^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5.114)$$

y valor esperado dado por $\langle S^2 \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2$, resulta compatible (conmuta) con los operadores S_x , S_y y S_z . En otras palabras, todos los estados son vectores propios del operador S^2 , pudiendo entonces escribir:

$$S^2 |\psi\rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 |\psi\rangle \quad (3.5.115)$$

Para cualquier estado $|\psi\rangle$ en el sistema de espín 1/2.

Supongamos ahora que los átomos que salen de ambos puertos inferior y superior del segundo analizador se hacen pasar por el tercer analizador. Se llega entonces al experimento 4 mostrado en la Fig. 3.8 (ver sistema para espín 1/2), cuya configuración se conoce como interferómetro. Es posible calcular el estado a la salida del segundo analizador con el postulado 5 de la mecánica cuántica, como se discute a continuación.

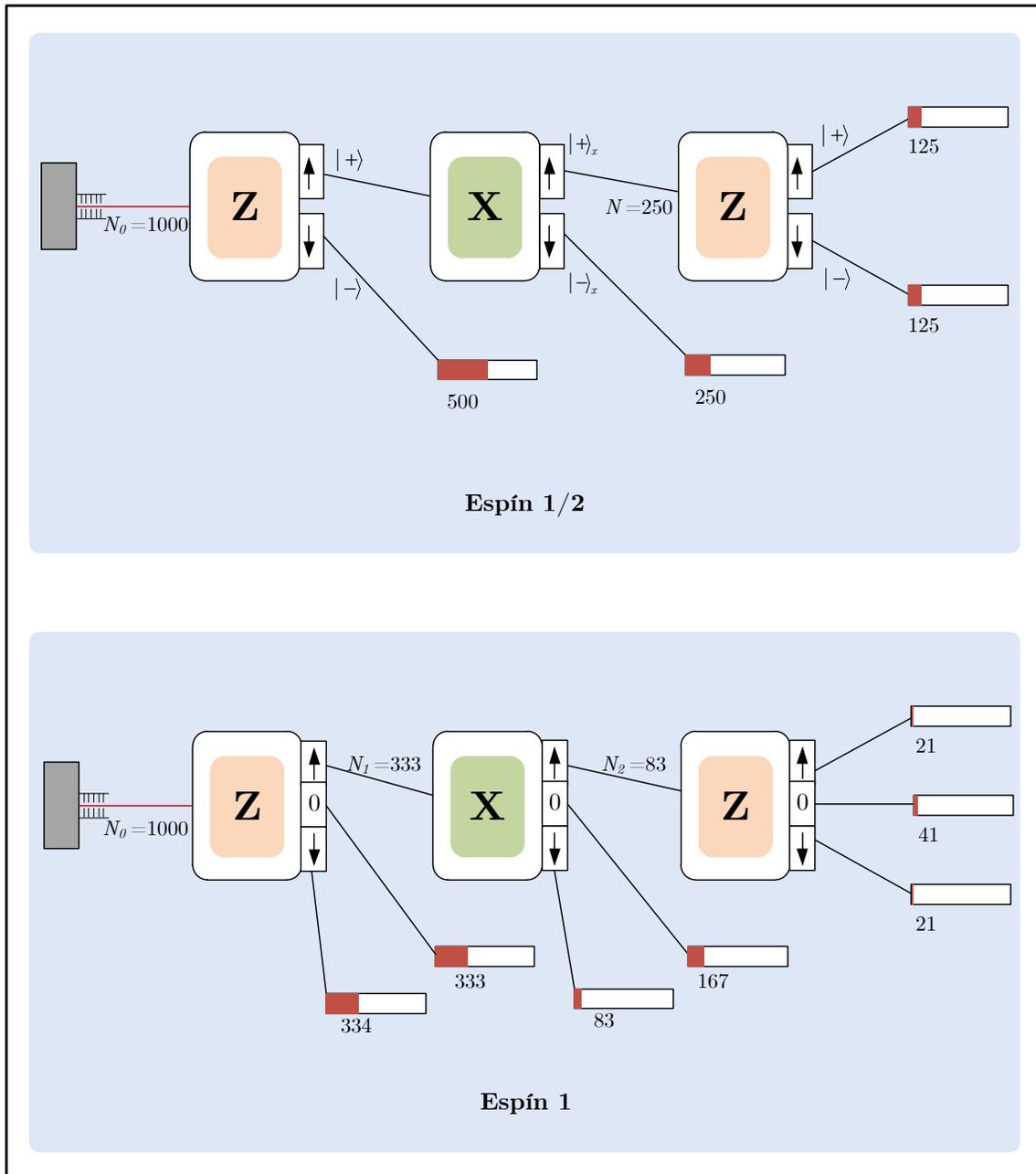


Figura 3.7: Modelo esquemático para Experimento 3: probabilidad total

Experimento 4: interferencia

El modelo para el experimento 4 se muestra en la Fig. 3.8. Lo interesante en este experimento es el estado de superposición después del analizador en x . Para poder encontrarlo y así calcular la probabilidad después del analizador en z debemos hacer uso del postulado 5 de la mecánica cuántica. El estado de los átomos después del segundo analizador es:

$$|\psi_2\rangle = \frac{(P_{+x} + P_{-x})|\psi_1\rangle}{\sqrt{\langle +|(P_{+x} + P_{-x})|+\rangle}} \quad (3.5.116)$$

El estado $|\psi_1\rangle$ es evidentemente $|\psi_1\rangle = |+\rangle$, de aquí que:

$$|\psi_2\rangle = \frac{(P_{+x} + P_{-x})|+\rangle}{\sqrt{\langle +|(P_{+x} + P_{-x})|+\rangle}} \quad (3.5.117)$$

Ya que $|+\rangle_x$ y $|-\rangle_x$ forman una base completa, la suma de los operadores de proyección resulta $\mathbf{1}$, tal como sucede con z : $P_{+x} + P_{-x} = \mathbf{1}$, de acuerdo a la Ec. (3.5.96). Por tanto, el estado $|\psi_2\rangle$ es $|\psi_2\rangle = |+\rangle$. Así que las probabilidades resultan:

$$\mathcal{P}_+ = |\langle +|+\rangle|^2 |\langle +|+\rangle|^2 = 1 \quad (3.5.118)$$

$$\mathcal{P}_- = |\langle -|+\rangle|^2 |\langle +|+\rangle|^2 = 0 \quad (3.5.119)$$

tal como lo muestra el experimento de la Fig. 3.8 (figura superior). Algo similar resulta para el interferómetro del sistema de espín 1 mostrado en la parte baja de la Fig. 3.8.

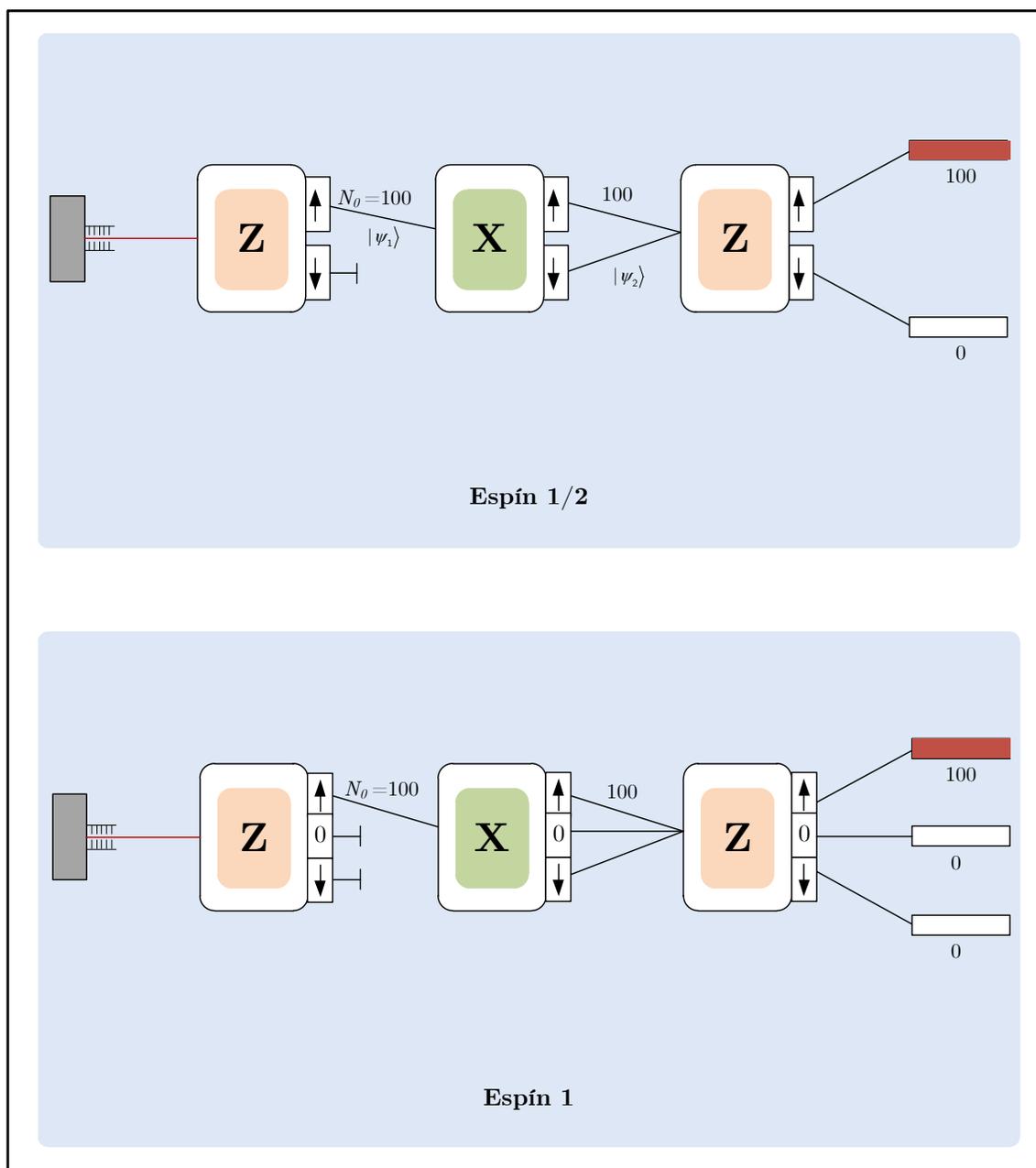


Figura 3.8: Modelo esquemático para Experimento 4: interferencia

Medición

Es importante reconocer que en mecánica cuántica se deben realizar mediciones en estados preparados de forma idéntica, por ejemplo, el haz de partículas saliendo del puerto superior o inferior de la figura Fig. 3.5. De aquí que es importante caracterizar los datos mediante mediante conceptos ya conocidos por los estudiantes, tales como el valor esperado y desviación estándar.

Siempre en el contexto de sistemas de espín 1/2 el valor esperado de una medición es:

$$\langle S_z \rangle = \left(+\frac{\hbar}{2} \right) \mathcal{P}_+ + \left(-\frac{\hbar}{2} \right) \mathcal{P}_- \quad (3.5.120)$$

Donde \mathcal{P}_+ representa la probabilidad de obtener $\hbar/2$ en la medición, y \mathcal{P}_- la probabilidad de obtener $-\hbar/2$.

En la terminología de mecánica cuántica que se ha desarrollado, de acuerdo a (3.5.23) y (3.5.24) y reordenando:

$$\langle S_z \rangle = \left(+\frac{\hbar}{2} \right) |\langle +|\psi \rangle|^2 + \left(-\frac{\hbar}{2} \right) |\langle -|\psi \rangle|^2 \quad (3.5.121)$$

$$= \left(+\frac{\hbar}{2} \right) \langle \psi|+\rangle \langle +|\psi \rangle + \left(-\frac{\hbar}{2} \right) \langle \psi|-\rangle \langle -|\psi \rangle \quad (3.5.122)$$

$$= \langle \psi| \left[\underbrace{+\frac{\hbar}{2}|+\rangle \langle +|\psi \rangle}_{=S_z|+\rangle} + \underbrace{\left(-\frac{\hbar}{2} \right) |-\rangle \langle -|\psi \rangle}_{=S_z|-\rangle} \right] \quad (3.5.123)$$

Donde se ha usado la ecuación de valores propios de S_z para la sustitución en corchetes.

Ahora, haciendo uso de Ec. (3.5.96):

$$S_z = \langle \psi| [S_z|+\rangle \langle +|\psi \rangle + S_z|-\rangle \langle -|\psi \rangle] \quad (3.5.124)$$

$$= \langle \psi| S_z [|+\rangle \langle +| + -\rangle \langle -|] |\psi \rangle \quad (3.5.125)$$

$$= \langle \psi| S_z \underbrace{[|+\rangle \langle +| + -\rangle \langle -|]}_1 |\psi \rangle \quad (3.5.126)$$

$$= \langle \psi| S_z |\psi \rangle \quad (3.5.127)$$

Esta expresión para calcular el valor esperado aplica no solo para el observable S_z y merecer ser encuadrada:

$$\boxed{S_z = \langle \psi| S_z |\psi \rangle} \quad (3.5.128)$$

Es importante recalcar su interpretación: no es el valor esperado en una sola medición, sino el valor medio de un gran número de mediciones. En corto, de acuerdo con (3.5.2) y (3.5.128), el valor esperado para un observable general:

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle = \sum_i a_n P_{a_n} \quad (3.5.129)$$

Donde a_n son los valores propios del operador A .

También, es importante cuantificar desviación de las mediciones respecto al valor esperado. Esto se logra mediante la desviación estándar, también conocida como desviación r.m.s. (root mean square). Se puede calcular de dos maneras:

$$\Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle} \quad (3.5.130)$$

$$= \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2} \quad (3.5.131)$$

En el contexto de espín, será de interés el operador S^2 (cuadrado de la magnitud del vector espín) y su valor esperado. Esto implica que un operador general A actúa dos veces:

$$A^2|\psi\rangle = AA|\psi\rangle = A(A|\psi\rangle) \quad (3.5.132)$$

Su valor esperado es:

$$\langle A^2 \rangle = \langle \psi | A^2 | \psi \rangle \quad (3.5.133)$$

Por su interpretación probabilística, la incertidumbre en mecánica cuántica es inherente. La desviación estándar representa la incertidumbre de los resultados de un experimento. En las figuras presentadas en la sección actual 3.5.2 (ver por ejemplo parte superior de Fig. 3.5), por cuestiones de claridad y simplicidad, no se muestran desviaciones estadísticas, pero en la experimentación real por supuesto existe. Además, los simuladores que se describirán en cap. 4, están programados para mostrar valores con incertidumbres.

Al momento se ha descrito como experimentos de Stern-Gerlach ayudan a mejorar la comprensión de ciertos aspectos de la mecánica cuántica: el formalismo matemático, aspectos de medición y algunos postulados. El experimento de Stern-Gerlach también puede usarse para enseñar sobre la evolución temporal de un sistema mecánico cuántico (el espín, en este caso). La ecuación de Schrödinger determina dicha evolución; el postulado 6 lo establece:

Postulado 6: La evolución temporal de un sistema cuántico está determinado por su hamiltoniano u operador de energía total $H(t)$ a través de la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle$$

H es un operador hermitiano cuyos valores propios son las energías permitidas (E_n) del sistema cuántico en cuestión, y sus valores propios son los valores propios del sistema:

$$H|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle \quad (3.5.134)$$

Todo lo expuesto hasta ahora para S_z (por ejemplo), también aplica para este operador. Incluso, resulta natural pensar que, como el operador aparece en la ecuación de Schrödinger, los autovalores de energía sirvan como base preferida para un estado general:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |E_n\rangle \quad (3.5.135)$$

Sabemos pues que la base de vectores propios son ortonormales y se conoce como base de energía:

$$\langle E_k | E_n \rangle = \delta_{kn} \quad (3.5.136)$$

Un caso importante se da cuando el hamiltoniano es independiente del tiempo, como en el experimento de Stern-Gerlach. De aquí, se espera que al diagonalizar tampoco sus vectores propios $|E_n\rangle$ dependan del tiempo. Así, la dependencia temporal del estado general $|\psi\rangle$ debe estar en los coeficientes de expansión $c_n(t)$. Al sustituir en la ecuación de

Schrödinger:

$$i\hbar \sum_n \frac{d}{dt} \sum_n c_n(t) |E_n\rangle = H \sum_n c_n(t) |E_n\rangle \quad (3.5.137)$$

Usando ahora la ecuación de valores propios Ec. (3.5.134) queda:

$$i\hbar \sum_n \frac{dc_n(t)}{dt} |E_n\rangle = \sum_n c_n(t) E_n |E_n\rangle \quad (3.5.138)$$

Al tomar el producto interno a ambos lados de la ecuación con un ket $|E_k\rangle$ y usando la condición de ortonormalidad (3.5.136) esta ecuación resulta:

$$\frac{dc_k(t)}{dt} = -i \frac{E_k}{\hbar} c_k(t) \quad (3.5.139)$$

Cuya solución es familiar para cualquier alumno que haya tomado un curso de ecuaciones diferenciales:

$$c_k(t) = c_k(0) e^{-iE_k t/\hbar} = c_k e^{-iE_k t/\hbar} \quad (3.5.140)$$

Vemos que lo que cambia para cada coeficiente de energía solo es la parte exponencial. Retornando nuestra atención al estado general Ec. (3.5.135), en un tiempo $t = 0$ se tiene:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n(0) |E_n\rangle \quad (3.5.141)$$

Por tanto, la evolución temporal del vector de estado es:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-iE_n t/\hbar} |E_n\rangle \quad (3.5.142)$$

Es importante notar que E/\hbar es una frecuencia angular, llámese ω . La expresión anterior nos dice que si inicialmente el sistema se encuentra en un estado propio particular (e.g. $|E_1\rangle$), después de un tiempo t se tendrá $e^{-iE_1 t/\hbar} |E_1\rangle$. O sea, el mismo estado original con diferente fase, lo cual sabemos no cambia la medición obtenida. Por tanto, se dice que los estados propios de energía son estados estacionarios en el tiempo.

Si se mide un observable diferente A en un estado de superposición:

$$|\psi(t)\rangle = c_1 e^{-iE_1 t/\hbar} |E_1\rangle + c_2 e^{-iE_2 t/\hbar} |E_2\rangle \quad (3.5.143)$$

Y además se supone no conmutan con H , de tal manera que no tienen estados propios comunes, se puede demostrar que la probabilidad de medir el valor propio a_1 es dependiente

del tiempo, pero esta dependencia corresponde a una diferencia de energías entre los dos estados involucrados en la superposición (e.g. $|E_1\rangle$ y $|E_2\rangle$):

$$\omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \quad (3.5.144)$$

A esta frecuencia se le conoce como frecuencia de Bohr.

Es posible encontrar la evolución temporal del operador espín y sus componentes S_x , S_y y S_z , como se expuso en la sección 2.6.2, en la cual se encontró que el valor esperado del espín realiza precesión con frecuencia de Larmor alrededor del eje z (dirección del campo magnético).

Notamos como en pocas páginas, a través de unos cuantos experimentos de Stern-Gerlach, se han introducido los postulados de la mecánica cuántica. De aquí en adelante resta definir nuevos operadores de espín (e.g. S^2), presentar teoría de conmutadores y principio de incertidumbre para luego realizar la transición a espacios infinitos de Hilbert. Con ello, se presenta la función de onda y operadores de espectros infinitos de autovalores como la posición, velocidad o momento. Se pueden abordar enseguida las aplicaciones comunes expuestas en libros tradicionales: partículas en potenciales diferentes, el átomo de hidrógeno, etc.

La tabla 3.3 resume los postulados generales de la mecánica cuántica y su enunciado particular en el contexto de espín 1/2.

Tabla 3.3: Postulados de la mecánica cuántica

Postulado	Postulado general	Postulado en el contexto de sistemas de espín 1/2
Postulado 1	El estado de un sistema mecánico cuántico, incluyendo toda la información que se puede saber sobre el mismo, está representado matemáticamente por un ket normalizado o vector de estado $ \psi\rangle$	El estado de un sistema mecánico cuántico, incluyendo toda la información que se puede saber sobre el mismo, está representado matemáticamente por un ket normalizado o vector de estado $ \psi\rangle$ (e.g. $ \psi\rangle = a +\rangle + b -\rangle$)
Postulado 2	Un observable físico se representa matemáticamente por un operador A que actúa en kets	Un observable físico (componente de espín) se representa matemáticamente por un operador A (S_z) que actúa en kets ($S_z +\rangle$)
Postulado 3	El único resultado posible en la medición de un observable es uno de los valores propios a_n del operador A correspondiente	El único resultado posible en la medición de un observable (componente de espín) es uno de los valores propios a_n ($\pm\hbar/2$) del operador A (S_z) correspondiente: $S_z +\rangle = \pm\frac{\hbar}{2} +\rangle$
continúa...		

Tabla 3.3 – continuación

Postulado	Postulado general	Postulado en el contexto de sistemas de espín 1/2
Postulado 4	<p>Para espectros discretos de valores propios, la probabilidad de obtener el valor propio a_n en una medición del observable A en el sistema que se encuentra en el estado normalizado $\psi\rangle$ es $\mathcal{P}_{a_n} = \langle a_n \psi\rangle ^2$, donde $a_n\rangle$ es el vector propio normalizado de A correspondiente al valor propio a_n. Para espectros continuos de valores propios, la probabilidad de obtener un valor propio x en una medición del observable A en el sistema que se encuentra en un estado normalizado $\psi\rangle$ es $\mathcal{P}(x) = \langle x \psi\rangle ^2 dx$, siendo $\langle x \psi\rangle ^2$ una función de probabilidad.</p>	<p>La probabilidad de obtener el valor $\pm\hbar/2$ en una medición del observable S_z en el sistema que se encuentra en el estado normalizado $\psi\rangle$ es $\mathcal{P}_{\pm} = \langle \pm \psi\rangle ^2$, donde $\pm\rangle$ es el vector propio normalizado de S_z correspondiente al valor propio $\pm\hbar/2$</p>
continúa...		

Tabla 3.3 – continuación

Postulado	Postulado general	Postulado en el contexto de sistemas de espín 1/2
Postulado 5	Después de una medición de A que conlleva al resultado a_n , el sistema cuántico se encuentra en un nuevo estado tal que es la proyección normalizada del estado original del sistema $ \psi\rangle$ en un nuevo ket correspondiente al resultado de la medición: $ \psi'\rangle = \frac{P_n \psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi P_n \psi\rangle}}$	Después de una medición de S_z que conlleva al resultado $\hbar/2$, el sistema cuántico se encuentra en un nuevo estado tal que es la proyección normalizada del estado original del sistema $ \psi\rangle$ en un nuevo ket correspondiente al resultado de la medición: $ \psi'\rangle = \frac{P_+ \psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi P_+ \psi\rangle}} = +\rangle$
Postulado 6	La evolución temporal de un sistema cuántico está determinado por el hamiltoniano u operador de energía total $H(t)$ a través de la ecuación de Schrödinger: $i\hbar\frac{d}{dt} \psi(t)\rangle = H(t) \psi(t)\rangle$	La evolución temporal de un sistema cuántico está determinado por el hamiltoniano u operador de energía total $H(t)$ a través de la ecuación de Schrödinger: $i\hbar\frac{d}{dt} \psi(t)\rangle = H(t) \psi(t)\rangle$

Generalización a otros sistemas de espín

En la discusión de la presente sección se ha utilizado el sistema de espín 1/2, ya que fue el sistema usado en el experimento original de Stern-Gerlach; además, aprovechando su simplicidad matemática y conceptual para estudiar postulados generales. Sin embargo, por supuesto, podrían usarse otros sistemas, tal como el sistema de espín 1 que se muestran en las figura 3.4, 3.5, 3.6, 3.7 y 3.8. El resultado será siempre un número discreto de haces. Por ejemplo, para el sistema de espín 1 tendríamos $s = 1$ y con ello $2s + 1 = 2(1) + 1 = 3$ haces. Esto indica que tres valores propios son posibles, a saber: $\hbar, 0\hbar, -1\hbar$. De aquí se obtiene la representación matricial de S_z por ejemplo, siendo estos valores propios sus

elementos diagonales. Se asocian las tres ecuaciones de valores propios y los tres vectores propios asociados. De ahí que se puede también implementar el enfoque con sistemas de espín 1 (o cualquier otro), con una dificultad matemática mayor, pero siempre dando a conocer los mismos conceptos.

Como se expuso en cap. 2, para un sistema de espín en general, una medición de la componente de espín en una dirección determinada conllevará al resultado de $-s\hbar$ como mínimo, y $s\hbar$ como máximo, en múltiplos enteros de \hbar . A los valores posibles de la componente de espín en la dirección en z se les denota con m al factor que multiplica a \hbar . Con ello, para cualquier sistema de espín las ecuaciones de valores propios se serán:

$$S_z|sm\rangle = m\hbar|sm\rangle \quad (3.5.145)$$

$$S^2|sm\rangle = s(s+1)\hbar^2|sm\rangle \quad (3.5.146)$$

Por ejemplo, para el sistema de espín $1/2$ $s = \frac{1}{2}$ y $m = \pm\frac{1}{2}$ de manera que se obtienen las siguientes expresiones:

$$S_z|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{\hbar}{2}|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \quad (3.5.147)$$

$$S_z|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \quad (3.5.148)$$

Que son las Ecs. (3.5.49) y (3.5.50), respectivamente. Se identifica además que la notación que se ha venido usando para los vectores base ($|+\rangle$ y $|-\rangle$) equivale a:

$$|+\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \quad (3.5.149)$$

$$|-\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \quad (3.5.150)$$

La transición a la función de onda

Se ha discutido al momento la manera en que el sistema de espín $1/2$ puede utilizarse para ilustrar los postulados de la mecánica cuántica. La simplicidad del sistema yace en el número de valores propios (2) que presenta el observable espín. En otras palabras, la dimensionalidad del espacio vectorial es finito para este sistema. Sin embargo, existen otros observables como la posición y momento que exhiben espectros continuos de valores

propios. De aquí que, aunque los postulados de la tabla 3.3 sean generales, la matemática utilizada cambia. De hecho, para el último caso, el espacio vectorial de Hilbert es infinito. La idea de la presente sección es mostrar al lector formas de realizar la transición a la matemática de observables de valores propios continuos y al concepto de función de onda.

Es importante volver a mencionar que la literatura tradicional en la enseñanza de la mecánica cuántica presenta primero la función de onda y su dinámica mediante la resolución de la ecuación de Schrödinger (esto se conoce como mecánica ondulatoria). Cuando la función de onda representa al estado cuántico abstracto que hemos denotado como $|\psi\rangle$ en secciones previas, se le conoce a la representación como *representación de posición*. Así, también pueden existir otras representaciones, como la *representación de momento*. Con la función de onda se pueden obtener valores esperados de variables dinámicas de interés como la posición y momento de la partícula. He de advertir que la intención no es describir el espacio vectorial complejo de manera formal, lo cual no resulta sencillo, sino más bien brindar orientaciones pedagógicas que generalicen la matemática usada en el sistema de espín 1/2.

Los postulados se han presentado como generales, de aquí que sin importar la dimensionalidad del espacio donde yacen los kets, deben prevalecer. La idea será ir discutiendo los postulados uno a uno en el contexto del nuevo espacio vectorial infinito. Remitirse a la tabla 3.3.

Nótese en primer lugar que no hay mucho más que comentar en relación al **postulado 1**, el cual establece que un ket normalizado representa al estado de un sistema mecánica cuántica. Quizá merezca la pena mencionar el hecho que se hace referencia al estado *en un tiempo determinado t* y que yace en el espacio de Hilbert.

En cuanto al **postulado 2**, *un observable físico se representa matemáticamente por un operador que actúa en kets*, ha de hacerse notar que los operadores que se describen en la presente sección tienen espectros infinitos de valores propios; mientras que S_z , por ejemplo, tiene dos valores propios. Es importante mencionar que el operador que representa al observable físico es hermitiano.

El **postulado 3** establece que al medir un observable, el resultado debe ser un valor

propio a_n del operador A . Por ejemplo, el operador componente de espín S_z solo tiene dos valores propios, $\hbar/2$ y $-\hbar/2$. Ahora, para el caso de la posición x , por ejemplo, también es así, solo que los valores propios posibles son infinitos, según la experimentación.

El **postulado 4** merece especial énfasis, ya que si ahora el observable A tiene un espectro continuo de valores propios, la cantidad $|a_n\langle\psi|$ ya no puede ser interpretada como una probabilidad como en el sistema discreto de espín $1/2$, sino más bien como una densidad de probabilidad. Esto se verá a continuación en el contexto de la función de onda.

Desde el enfoque de espín $1/2$, un estado $|\psi\rangle$ en la representación S_z se escribe:

$$|\psi\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle +|\psi\rangle \\ \langle -|\psi\rangle \end{pmatrix} \quad (3.5.151)$$

Donde $\langle +|\psi\rangle$ y $\langle -|\psi\rangle$ son proyecciones del vector de estado $|\psi\rangle$ sobre los estados propios $|+\rangle$ y $|-\rangle$.

Centramos la atención ahora en operadores que exhiben valores propios infinitos. De especial interés en mecánica cuántica son los operadores posición x y p_x . La importancia de la posición y momento se reconoce desde la mecánica clásica, donde la energía mecánica E es:

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + V(x) \quad (3.5.152)$$

Siendo $V(x)$ es la función de energía potencial.

Bajo ciertas condiciones la función hamiltoniana del formalismo hamiltoniano coincide con esta energía mecánica. Siguiendo este enfoque, en mecánica cuántica el operador hamiltoniano \hat{H} debe depender de los *operadores* posición y momento:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + V(\hat{x}) \quad (3.5.153)$$

Todos $(\hat{H}, \hat{x}$ y $\hat{p}_x)$, por supuesto, deben ser operadores hermitianos.

Así, la relevancia de los operadores \hat{x} y \hat{p}_x se advierte porque la evolución temporal de un sistema mecánico cuántico depende del operador hamiltoniano, como establecido en el postulado 6.

Ahora, aceptándose que los observables x y p_x no están cuantizados (un estudiante también lo intuye), sino que tienen una infinita cantidad de valores al medirlos, los

operadores correspondientes tienen un espectro continuo de valores propios. Por tanto, si intentamos representar esto de forma similar al sistema de espín 1/2 se obtendría:

$$|\psi\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle x_1|\psi\rangle \\ \langle x_2|\psi\rangle \\ \langle x_3|\psi\rangle \\ \langle x_4|\psi\rangle \\ \langle x_5|\psi\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (3.5.154)$$

Donde los elementos $\langle x_i|\psi\rangle$ representan los valores propios del operador \hat{x} . Ya que se tiene una infinita cantidad de elementos, esta notación no es conveniente, de tal forma que se pasa a una notación diferente:

$$\langle x_i|\psi\rangle \rightarrow \langle x|\psi\rangle \quad (3.5.155)$$

Notese que $\langle x|\psi\rangle$ es una función continua, de manera que una forma más común de escribirla es $\psi(x)$.

Así, el estado cuántico abstracto general $|\psi\rangle$ se representa mediante esta nueva función espacial que se denomina función de onda:

$$|\psi\rangle \doteq \psi(x) \quad (3.5.156)$$

A esta representación también se le conoce como representación de posición.

Retornando nuestra atención al postulado 4, es importante recordar que para el sistema de espín 1/2, los términos $\langle \pm|\psi\rangle$ representan amplitudes de probabilidad. En otras palabras, al medir la proyección del espín en z se calculan las probabilidades mediante:

$$\mathcal{P}_{\pm} = |\langle \pm|\psi\rangle|^2 \quad (3.5.157)$$

Por analogía, se podría pensar que en términos de la función de onda se obtiene una función de probabilidad:

$$\mathcal{P}(x) = |\psi(x)|^2 \quad (3.5.158)$$

Sin embargo, realmente es una *densidad* de probabilidad, como mencionado en (3.5.25). Apréciese este hecho de la siguiente manera. La condición de normalización que en el contexto de sistemas (discretos) de espín 1/2 dicta:

$$\sum_{\pm} \mathcal{P}_{\pm} = |\langle +|\psi\rangle|^2 + |\langle -|\psi\rangle|^2 = 1 \quad (3.5.159)$$

$$= \sum_{\pm} |\langle \pm|\psi\rangle|^2 = 1 \quad (3.5.160)$$

Si la posición *tuviese* valores propios discretos:

$$\sum_n \mathcal{P}_{x_i} = \sum_n |\langle x_i|\psi\rangle|^2 = 1 \quad (3.5.161)$$

Pero ya que se tiene infinita cantidad de valores propios se debe cambiar a una integral en el espacio. Así:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1 \quad (3.5.162)$$

De donde se interpreta $\mathcal{P}(x)$ es una densidad de probabilidad (probabilidad por unidad de longitud en este caso) y $\mathcal{P}_x dx$ es la probabilidad de detectar a la partícula en la posición x en una región entre x y $x + dx$. Por tanto, al postulado 4 presentado en la tabla 3.3, habrá que agregarle que si el espectro de valores propios es continuo, la probabilidad de obtener un valor propio del observable es $d\mathcal{P}(x) = |\psi(x)|^2 dx$. Además, de la Ec. (3.5.162) se nota que la probabilidad de que una partícula se mida en el intervalo $a < x < b$ será:

$$P_{ab} = \int_a^b \mathcal{P}(x)dx \quad (3.5.163)$$

$$= \int_a^b |\psi(x)|^2 dx \quad (3.5.164)$$

En relación al **postulado 5**, notamos que en el denominador tenemos el valor esperado $\langle \psi|P_n|\psi\rangle$ del operador proyección P_n :

$$|\psi'\rangle = \frac{P_n|\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi|P_n|\psi\rangle}} \quad (3.5.165)$$

Esto invita a reflexionar sobre el cálculo de valores esperados de observables de espectros continuos. Es evidente ya no se puede trabajar con los bras representados como

vectores fila, los kets como vectores columna o los valores esperados como elementos matriciales.

Primeramente, recordemos la condición de normalización para un estado genérico, Ec. (3.5.16):

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad (3.5.166)$$

Por otro lado, la condición de normalización para la función de onda (3.5.162) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x) dx = 1 \quad (3.5.167)$$

Al comparar la Ec. (3.5.166) con el lado derecho de Ec. (3.5.167), se postula que para “traducir” fórmulas de bra-kets a fórmulas que involucren funciones de onda se deben seguir las siguientes reglas:

$$|\psi\rangle \rightarrow \psi(x) \quad (3.5.168)$$

$$\langle \psi | \rightarrow \psi^*(x) \quad (3.5.169)$$

$$\langle | \rangle \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx \quad (3.5.170)$$

Por ejemplo, un producto interno o amplitud de probabilidad se verá así.

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x)\psi(x) dx \quad (3.5.171)$$

Con ello, la probabilidad de que el estado $\psi(x)$ se mida en el observable correspondiente al vector propio $\phi(x)$ es:

$$\mathcal{P} = |\langle \phi | \psi \rangle|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\psi(x) dx \right|^2 \quad (3.5.172)$$

Finalmente, para calcular valores esperados, recordamos la expresión Ec. (3.5.129) y agrupamos de la siguiente manera:

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \quad (3.5.173)$$

$$= \langle \psi | \left\{ \hat{A} | \psi \right\} \rangle \quad (3.5.174)$$

Notamos que tenemos un producto interno. Con las reglas descritas con anterioridad:

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \quad (3.5.175)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) A(x) \psi(x) dx \quad (3.5.176)$$

Donde el operador \hat{A} se ha sustituido por su representación de posición.

Por último, el **postulado 6** para la evolución temporal, i.e. la ecuación de Schrödinger, dicta:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle \quad (3.5.177)$$

Teniendo $|\psi\rangle$ en la representación de posición como $\psi(x)$, necesitamos ahora en esta representación al hamiltoniano H . Como $H = \hat{H}$ depende de \hat{x} y \hat{p}_x :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + V(\hat{x}) \quad (3.5.178)$$

requerimos estos operadores en representación de posición. La demostración se puede encontrar en libros de texto avanzados², obteniéndose:

$$\hat{x} = x \quad (3.5.179)$$

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx} \quad (3.5.180)$$

Por tanto, la ecuación de Schrödinger en términos de la función de onda resulta:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + V\psi(x, t) \quad (3.5.181)$$

Donde se usan ahora derivadas parciales ya que ψ es una función de la posición x y del tiempo t .

Algunos autores de libros tradicionales comienzan su exposición de la mecánica cuántica invitando a encontrar la función de onda a partir de esta ecuación diferencial para diferentes potenciales, así como en mecánica newtoniana se resuelve la Segunda Ley de Newton para determinar variables dinámicas de interés como la posición y velocidad.

²Ver por ejemplo J.J. Sakurai *Modern Quantum Mechanics*, 3ra edición, sección 1.7

Como ejercicio final, ahora que conocemos los operadores posición y momento en la representación de posición, se puede usar la Ec. (3.5.176) calcular sus valores esperados. Para el caso del operador posición, su valor esperado es:

$$\langle \hat{x} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \quad (3.5.182)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) x \psi(x) dx \quad (3.5.183)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx \quad (3.5.184)$$

Mientras que para el momento lineal:

$$\langle \hat{p} \rangle = \langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle \quad (3.5.185)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right) \psi(x) dx \quad (3.5.186)$$

Por supuesto, estas expresiones se podrían simplificar más conocida la función de onda.

3.5.3. Discusión crítica del enfoque Spin-First

En la sección anterior se describió una manera de introducir los conceptos y postulados de la mecánica cuántica a través de experimentos de Stern-Gerlach (mentales o simulados) para luego realizar la transición a la mecánica ondulatoria: el llamado enfoque Spin-First.

Tradicionalmente, según discutido en sección 3.2, la enseñanza se da al contrario: primero se aborda la mecánica ondulatoria y los sistemas de espín 1/2 se estudian de forma breve en el contexto de Momento Angular. A este enfoque se le podría denominar Position-First.

Con esto en mente, se pretende en este apartado mencionar algunas posibles desventajas del enfoque a ser consideradas por instructores.

Abstracción conceptual

Es esperable que el concepto de espín no sea sencillo de entender para el estudiante principiante de mecánica cuántica. Se acepta hoy día que no tiene contraparte clásica, pero es conveniente dar una mirada previa al concepto clásico de momento angular alrededor

del propio eje de un objeto de dimensión finita. De hecho, como se expuso en cap. 2, este modelo fue el que inicialmente sugirió Kronig para el electrón, pero que luego fue desestimado, ya que la velocidad requerida para conseguir un momento angular de espín $\hbar/2$ resulta ser $60c$. Así, el modelo mental que la palabra sugiere (*espín*, o *giro* en español), ya que se adopta de conceptos clásicos, es necesario para intuir en algún grado el nuevo tipo de momento angular, adicional al orbital. Sin embargo, el espín del electrón no está asociado a un *giro* del mismo (se reconoce como partícula puntual) ni a su movimiento en el espacio.

Además, en el enfoque Spin-First, se da como un hecho que el observable S_z tiene dos valores propios $\pm\hbar/2$: en el contexto de la espectroscopía, este valor ($\hbar/2$) fue propuesto por Kronig años después del experimento de Stern-Gerlach. O sea, exclusivamente del experimento no se puede deducir el valor $\hbar/2$. Es más, teóricamente, el valor del espín del electrón se puede deducir a partir de la ecuación relativista de Dirac, no con mecánica cuántica no relativista. En la práctica, por cierto, lo que se mide es el momento magnético, y se calcula el espín de acuerdo a las relaciones expuestas en cap. 2.

David J. Griffiths bien indica que el espín es un número fijo para cada partícula (e.g. $s = 1/2$ para el electrón), en contraste con el número cuántico angular orbital l , el cual es variable para un sistema particular y cambiará si éste se perturba. Este hecho, que el número cuántico de espín sea invariante para cada partícula hace a la teoría relativamente sencilla, tal como se ha podido percibir de la sección precedente. Todavía más, para sistemas de espín $1/2$, comenta, en lugar de tener un espacio de Hilbert infinito se tiene un espacio vectorial en dos dimensiones. En vez de trabajar con funciones especiales y ecuaciones diferenciales, se trabaja con matrices de 2×2 y vectores de dos componentes.

De esta manera, Griffiths fundamenta el uso que otros autores hacen del enfoque, ya que la matemática del sistema de espín $1/2$ es la más simple posible para sistemas mecánico cuánticos. Ahora bien, por otro lado y sin mayor argumentación, indica que **el precio de la simplicidad matemática es la abstracción conceptual, y que no prefiere esa forma de proceder**. Es posible Griffiths se refiera al hecho de que los alumnos tienen que adentrarse a ideas totalmente nuevas a partir de los resultados de experimentos de Stern-

Gerlach y el concepto de espín, y no desde los observables más conocidos como posición, momento y energía.

Aún con ello, Griffiths recomienda que siempre que uno tenga problemas con la comprensión conceptual de la mecánica cuántica, conviene repasar el sistema de espín 1/2: da por sentado es el sistema más simple y claro para pensar en las paradojas de la mecánica cuántica.

Sakurai y Townsend confían que el “tratamiento de shock” (enfoque Spin-First), mediante el cual se expone al estudiante a las nuevas ideas de la mecánica cuántica desde un principio, sea gratificante: podría ayudar a que los alumnos de forma temprana adquieran ese pensamiento “mecánico cuántico”. Sin embargo, el consenso de ambos autores es que lo óptimo sería estudiarlo después de alguna experiencia con mecánica ondulatoria; caso contrario, podría ser más bien contraproducente.

Como punto adicional a considerar, a excepción de David H. McIntyre, los libros de texto con enfoque Spin-First, proponen los experimentos de Stern-Gerlach como experimentos mentales (Gedankenexperiment). En otras palabras, tales experimentos mentales y sus resultados deben ser asimilados, para luego ser aceptados por el estudiante como una realidad. O sea, habrá un esfuerzo cognitivo mayor por el simple hecho de imaginarse el experimento y dar por sentado lo escrito como algo cierto.

La falta de experimentación real puede ser en algún grado reemplazada por simuladores computacionales, como en el caso del libro de McIntyre, en lugar de presentar únicamente experimentos mentales. La carencia de este auxilio visual e interactivo supone un mayor nivel de abstracción que puede no ser conveniente para el estudiante.

Spin-First vs. Position First

Por otro lado, en un enfoque tradicional, comúnmente se sigue en un inicio la misma línea de pensamiento de la *dinámica* de sistemas de mecánica clásica; por ejemplo: se introducen los operadores de posición (e.g. \hat{x}), momento lineal, hamiltoniano y la ecuación de Schrödinger como la ecuación de interés a resolver para obtener la función de onda. En otras palabras, las variables físicas son ya familiares a los estudiantes, a diferencia

del espín. Además, no es necesario hablar en principio de que estos observables tienen un espectro continuo de valores propios; se intuye por su experiencia. En este sentido parece más natural y sencillo pasar de esto a casos de observables que exhiben una finita cantidad de valores propios, como el espín. Adicionalmente, la interpretación probabilística en el contexto de la función de onda $|\psi(x)|^2 dx$ es la probabilidad de detectar a la partícula en la posición x en una región entre x y $x + dx$ es más sencilla de intuir pues los alumnos están acostumbrados a trabajar en el espacio euclídeo en física clásica.

Por el contrario, en el contexto de espín $1/2$ podrían darse confusiones con el espacio, tales como i) el espín tiene que ver con el giro de la partícula, ii) la precesión de Larmor sucede en el espacio; además, la interpretación probabilística $|\langle \pm | \psi \rangle|^2$ es la probabilidad de obtener $\pm \hbar/2$ en una medición del observable $S_z \dots$ conlleva el riesgo de pensar que los observables en mecánica cuántica están todos cuantizados.

Parece claro también que alumnos que hayan estudiado mecánica ondulatoria previo a un tratamiento de espín como expuesto en sección 3.5.2, lograrán visualizar que la teoría cuántica va más allá de la mecánica ondulatoria, a través de postulados que aplican no solo a la función de onda. Además, pueden realizar conexiones entre la teoría general presentada en el contexto de espín $1/2$ y la mecánica ondulatoria revisada (un segundo estudio), según se expuso en el último apartado de sección 3.5.2. Estas conexiones no serán posibles si el enfoque Spin-First se utiliza en alumnos que no tienen experiencia con mecánica ondulatoria. El pasar a la representación de posición, tal como se presentó en el apartado “La transición a la función de onda” de la sección anterior, sin argumentos matemáticos sólidos podría generar inconformidad por falta de rigor matemático pero, por otro lado, la transición hacia observables de espectros continuos desde discretos supone un cambio vasto que puede no ser conveniente para estudiantes principiantes.

Siempre relacionado con la matemática, el estudiante típico de mecánica cuántica trae consigo herramientas suficientes para resolver las ecuaciones diferenciales que surgen en el contexto de la representación de posición o mecánica ondulatoria: la ecuación de valores propios para la energía de un sistema (también llamada ecuación de Schrödinger

independiente del tiempo), se convierte en una ecuación diferencial:

$$\hat{H}|E_i\rangle = E_i|E_i\rangle \rightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right) \psi_E(x) = E\psi_E(x) \quad (3.5.187)$$

Donde se ha reemplazado \hat{H} en su representación de posición y $\psi_E(x)$ denota las funciones de onda que representan los vectores propios de energía. En otras palabras, la transición de la mecánica clásica a la mecánica ondulatoria conveniente: los alumnos seguirán resolviendo ecuaciones diferenciales.

Por último, al margen se proponga un tratamiento temprano de espín 1/2 ó espín 1, siempre se llegará al punto de estudiar momento angular en general, de donde se puede deducir la teoría para momento angular de espín, pero lo contrario no es cierto: no se puede entender la teoría general de momento angular habiendo solo estudiado sistemas discretos de espín 1/2.

Como conclusión, el enfoque de Spin-First podría tener un impacto positivo si se usa posterior a una experiencia con mecánica ondulatoria. Teóricamente, de acuerdo a lo discutido, no parece haber ventaja alguna si se usa Spin-First en relación a Position-First en una primera experiencia en mecánica cuántica. En la sección 3.6 se comenta más al respecto en el contexto de la UNAH.

3.5.4. El impacto de experimentos de Stern-Gerlach para reforzar problemas conceptuales

Habiendo presentado en detalle como mediante experimentos de Stern-Gerlach se puede enseñar la mecánica cuántica axiomática en la interpretación probabilística de Copenhague, surge la pregunta si este enfoque conlleva a resultados satisfactorios en su aplicación en universidades. La presente sección cita algunas investigaciones relacionadas con implementaciones de Spin-First, dificultades encontradas y el impacto que el enfoque ofrece en cuando al mejoramiento de la comprensión de la mecánica cuántica.

En primer lugar, a la luz de la investigación realizada por Singh en 2001 [15], los alumnos de seis universidades estadounidenses tuvieron dificultades con: el formalismo

básico de la mecánica cuántica, medición y preparación de estados, evolución temporal. Recordemos que esto sucedió con una enseñanza tradicional. Una intervención como la descrita en sección anterior, usando el enfoque Spin-First, podría ayudar reforzar estos problemas conceptuales en el contexto de experimentos de Stern-Gerlach.

En 2010, G. Zhu y C. Singh [28] realizaron una investigación en la que demostraron que el experimento de Stern-Gerlach puede jugar un papel importante en la enseñanza del formalismo de la mecánica cuántica. Como se describió en la sección anterior, comentan que en un espacio de Hilbert finito aprenden a:

- Preparar estados cuánticos a partir de arbitrarios
- Medición cuántica
- Evolución temporal de la función de onda
- Distinción entre espacio físico donde se realiza experimento y espacio de Hilbert donde yacen los estados cuánticos.
- Ventajas de elegir una base conveniente para predecir experimentos

Además, los autores presentan las dificultades encontradas por los alumnos y proponen un tutorial para mejorar su aprendizaje. Entre las dificultades encontradas están:

- Dificultades al distinguir entre el espacio físico euclídeo y el espacio de Hilbert
- Precesión de Larmor del espín en el espacio físico
- Preparación de estados
- Distinción entre estados de superposición y mixtos

Estos insumos se consideran en la intervención educativa descrita en el capítulo siguiente.

Por otro lado, Homeyra R. Sadaghiani [29] investigó el aprendizaje de los estudiantes usando dos diferentes enfoques, o paradigmas. En uno de los enfoques, los estudiantes

fueron introducidos a los postulados de la mecánica cuántica en bases discretas de espín $1/2$ (enfoque Spin-First), como descrito en sección anterior, antes de introducir la ecuación de Schrödinger. En el segundo paradigma, bases continuas de funciones de onda de probabilidad de posición (Position-First) se usaron, un enfoque más tradicional. Se comparó el rendimiento para dos secciones de estudiantes de primer año en Cal Poly Pomona. Basados en los resultados, los estudiantes a quienes se les enseñó con SF tuvieron una nota promedio de $53 \pm 3\%$ mientras que los de PF $34 \pm 5\%$ en una prueba especializada llamada QMCA (Quantum Mechanics Concept Assessment).

3.6. Propuestas de implementaciones usando Spin-First en la UNAH

El objetivo de esta sección es recomendar diferentes esquemas de implementaciones para las cuales se aplique el enfoque de Spin-First en el marco curricular actual de la UNAH a nivel de posgrado y pregrado. La Figs. 3.1 y 3.2 muestran las asignaturas relacionadas con física cuántica a nivel de pregrado y posgrado, respectivamente, acorde al diseño curricular vigente.

En cuanto al pregrado, tal como lo hace la Universidad de Oregon (OSU), se puede introducir en la asignatura Física Moderna-FS371 los primeros 3 capítulos del libro de texto de McIntyre con un enfoque novedoso en el que los estudiantes vean los aspectos fundamentales de la mecánica cuántica axiomática y temas relacionados con medición. Este tratamiento no es común, y aún se encuentra en investigación. De hecho, de acuerdo con la discusión en sección 3.5.3, este enfoque no parece traer mayor ventaja en comparación con un enfoque tradicional.

Por otro lado, como se ha expuesto, los autores de libros que centran su enseñanza temprana en sistemas espín $1/2$ o espín 1 , sugieren que lo ideal es presentar este *tratamiento de shock* después de una enseñanza introductoria de la mecánica ondulatoria; en el caso del pregrado en la UNAH, esto sería posterior a la asignatura Mecánica cuántica I - FS472.

Se advierte que un segundo curso de mecánica ondulatoria, como ocurre en pregrado UNAH, se corre el riesgo de disminuir el entusiasmo en los estudiantes. Es algo que se podría informalmente percibir como *más de lo mismo*, en cuanto al uso del mismo enfoque: mecánica ondulatoria. Es entonces cuando el enfoque Spin-First puede ser más efectivo: a inicios de la asignatura *Mecánica cuántica II - FS373*. Precisamente, el primer tema propuesto en el sílabo de dicha asignatura es el de Espín. Podría el tema impartirse en un inicio, no como tradicionalmente, sino con el enfoque descrito en esta tesis y luego se da el paso a la mecánica ondulatoria y tratamiento general de Momento Angular. Las conexiones que se pueden realizar al pasar de sistemas discretos a la función de onda puede fortalecer la comprensión general de la mecánica cuántica, acorde a lo discutido en sección 3.5.3. Otra alternativa sería incorporar la implementación de Spin-First de forma paralela a la clase de Mecánica Cuántica II - FS373, a manera de laboratorio virtual, lo cual es algo que común hoy día, a cargo de un instructor de laboratorio.

En cuanto al posgrado, se puede implementar el enfoque Spin-First desde un principio, ya que se asume los estudiantes traen una base conceptual de física moderna y mecánica ondulatoria. De cualquier manera, la Maestría brinda un curso propedeúico de física moderna (e.g. dualidad onda-partícula, etc). El curso propuesto para implementar el enfoque Spin-First es Física Cuántica - MFS614. Se puede presentar primero la mecánica ondulatoria, y enseguida una implementación de espín innovadora para que los estudiantes adquieran un panorama amplio de la mecánica cuántica; así también los estudiantes realizan las conexiones con la mecánica ondulatoria guiados por instructor, como se ha dicho. De hecho, la intervención educativa descrita en el capítulo siguiente se hizo de esta manera (la experiencia previa de mecánica ondulatoria la brindó el MIT a través de un curso en modalidad e-learning). Otra alternativa es brindar Física Cuántica - MFS614 de forma tradicional y luego presentar el enfoque Spin-First en el curso optativo Tópicos de Mecánica Cuántica - MFS702. Es más, este curso tiene como contenido programático la formulación axiomática de la mecánica cuántica; así que parece propio.

Existe también un espacio oportuno para que los estudiantes manipulen, cambien o generen su propio código en base al software libre SPINS, escrito en JAVA. Esto se puede

dar en el contexto de la asignatura Tópicos avanzados de computación - MFS611, cuyos objetivos engloban:

- Capacitar a los estudiantes en el uso de la Tecnología de Computación para iniciar proyectos de investigación a bajo costo.
- Introducir al estudiante en el conocimiento de las técnicas avanzadas y procurar una visión global en simulación de sistemas.

Algo importante que mencionar es que a los estudiantes de ese curso (Tópicos avanzados de computación - MFS611) se les puede proponer portar SPINS de JAVA a Python, considerando las ventajas y popularidad que va adquiriendo este último, y ante problemas de instalación y ejecución del primero (bien conocidos por todos).

Capítulo 4

Intervención educativa en un curso de posgrado usando experimentos de Stern-Gerlach

4.1. Introducción

En el capítulo 2 se describió el experimento de Stern-Gerlach y se ofreció un tratamiento teórico usando diversos modelos: física clásica, semiclásica y física moderna. En el cap. 3 se expuso la relevancia de los experimentos de Stern-Gerlach en la educación de la física cuántica y el impacto que pueden tener en el mejoramiento de la comprensión de la misma. Además, se realizaron recomendaciones para implementaciones Spin-First en el nivel de pregrado y posgrado de física en la UNAH.

En el presente capítulo se describe una intervención educativa en el curso de posgrado Física Cuántica - MFS614 usando el enfoque Spin-First. En el diseño pedagógico se incorporaron herramientas constructivistas para aprendizaje activo de los estudiantes. Los resultados obtenidos son positivos, y sugieren realizar más investigación para la integración de nuevos enfoques de aprendizaje en favor de los alumnos.

Se revisa en primer lugar la importancia de la investigación en el ámbito de la edu-

cación de la física y la relación estrecha existente con aspectos cognitivos del estudiante. Además, se justifica la importancia de la innovación y el uso de teorías constructivistas, en congruencia con el plan de reforma de la UNAH [40]. Enseguida se presentan los detalles de la intervención educativa: diseño, descripción, recolección y análisis de datos obtenidos, y conclusiones.

4.2. Importancia de la investigación en la educación de la física

En Estados Unidos, aproximadamente 85 instituciones realizan investigación en educación de la física, también conocido como PER por sus siglas en inglés (Physics Education Research). PER se puede definir como el estudio sistemático de la manera en que las personas aprenden de física y, a partir de ello, aumentar la calidad de la educación brindada. Se utilizan herramientas y métodos que la ciencia moderna brinda. De forma práctica, una de las cosas que trata de responder es si las intervenciones o los cursos brindados en las universidades son exitosos. Fue hasta finales del siglo XX (1980s) que PER se estableció como un campo de investigación en Estados Unidos. Desde entonces, el número de profesionales en física realizando este tipo de investigaciones ha incrementado de forma sostenida.

Una de las maneras de lograr medir la eficacia del aprendizaje de los estudiantes, es a través del diseño de evaluaciones diagnósticas y encuestas. Comúnmente, tal como ocurre también en la UNAH, los profesores de las asignaturas ofrecidas se enfocan primordialmente en el desarrollo de preguntas o evaluaciones para medir el aprendizaje de los estudiantes. Lo mismo se puede hacer en el contexto de la investigación de la educación de la física, pero usando evaluaciones diagnósticas especializadas en su lugar para medir como aprenden o qué tan efectivo está siendo la enseñanza. Esto conlleva diseño riguroso, prueba y validación. Estos procesos merecen la pena, sin embargo, pues facilita comparaciones objetivas entre los estudiantes y métodos de instrucción. Tales pruebas o evaluaciones vienen a ser

como detectores que deben calibrarse bien para asegurar que el investigador entienda lo que se está midiendo [37]

Hoy día, muchas universidades reconocidas a nivel mundial realizan investigación en la educación de la física: Harvard, Cornell, la Universidad de Colorado en Boulder, o una que fue citada en capítulos previos: la Universidad del Estado de Oregon (OSU). Inclusive, la misma AAPT (American Association of Physics Teachers) tiene una fuente de recursos para la educación de la física y astronomía llamada comPADRE, y parte de ésta PER-Central, una colección de recursos para investigadores en la educación de la física a nivel universitario. Además, comPADRE cuenta con PhysPort, un portal de recursos para la enseñanza-aprendizaje *basados en investigación* exclusivamente. En corto, la investigación para la educación de la física (PER) es un tema de actualidad.

En Honduras, aún no existen entidades dedicadas a la investigación en la educación de la física. Tal es el caso de la Escuela de Física de la Universidad Nacional Autónoma de Honduras en Ciudad Universitaria. Operan, sin embargo, algunos institutos internos como la Dirección de Innovación Educativa (DIE), la cual tiene por finalidad promover una cultura de innovación “que asegure la prestación de servicios educativos con calidad y pertinencia” [36]. La DIE invita constantemente a los profesores de las unidades académicas a realizar innovación en sus aulas de clase y medir su impacto. Con este tipo de investigación, se renuevan materiales de instrucción y se puede mejorar la enseñanza y aprendizaje en la universidad. Conviene un proceso permanente de mejora, innovación e investigación en la enseñanza, entre otras razones, ya que La Escuela de Física sirve clases de servicio a otras carreras.

Retomando el ejemplo de universidades norteamericanas, y a manera de evidenciar la importancia concedida a la investigación de la educación de la física, la Universidad de Cornell (parte del prestigioso grupo de la Ivy League) tiene investigaciones en las siguientes áreas [37]:

- Física de aceleradores
- Astrofísica, relatividad general y cosmología

- Física biológica
- Materia condensada experimental
- Materia condensada teórica
- Física de partículas elementales
- **Investigación en educación de la física**

Es evidente que PER (Physics Education Research) es uno de los rubros de investigación de la Universidad de Cornell; no es para menos, un mejor entendimiento en la materia conlleva a realizar investigación más temprana y de mejor calidad en diferentes áreas de investigación de la física como tal (e.g. materia condensada, física de partículas), siendo la mecánica cuántica una rama fundamental para cualquier rubro de investigación. Todavía más, PER tiene el potencial de beneficiar a estudiantes y a la sociedad en general, capacitando con éxito profesionales que la economía de los países necesitan [30].

Ahora bien, ¿cuál es la realidad actual en cuanto a adoptar enfoques de enseñanza basados en la investigación (un fruto de PER) a pesar de los esfuerzos arriba descritos?. Fraser *et al* encontraron que aunque los profesores de las facultades de física son expertos en investigación basada en evidencia, a menudo confían en experiencia anecdótica para guiar sus prácticas de enseñanza; o sea, se basan en su propia experiencia del pasado primordialmente, más que en conocimiento sistemático. Todavía más drástico es el caso de profesores de la UNAH, donde la mayoría se dedican a labores exclusivamente de docencia, no de investigación.

Los autores [30] expresan que a pesar de que las estrategias de instrucción basadas en la investigación han mostrado efectividad y han sido diseminadas por investigadores PER e innovadores a lo largo de casi dos décadas, su adopción es aún baja. En parte, se debe a inquietudes del profesorado sobre su aplicabilidad. Entre los temas que les preocupan están:

1. ¿Se puede orientar nuestra docencia con rigor científico?

2. ¿Qué de malo tienen las cátedras convencionales?
3. ¿Un enfoque en la comprensión conceptual no limitaría las habilidades de los estudiantes para resolver problemas?.
4. ¿Tienen los estudiantes tiempo e inclinación hacia a instrucción basada en investigación?
5. ¿Cómo encontrará el profesorado el tiempo para adoptar y mantener la pedagogía basada en la investigación?

Para responder a estas inquietudes, los autores se basan en estudios específicos y meta análisis (datos de varias fuentes) y concluyen lo siguiente, respectivamente:

1. El rigor científico en la evaluación y mejoramiento de la física es necesario. PER genera las conclusiones más generalizables a través de meta análisis de experimentos confiables.
2. PER ha demostrado que la *ganancia* de aprendizaje es mayor cuando se usan enfoques de aprendizaje interactivo, en relación a enfoques tradicionales. Las estrategias basadas en investigación han demostrado mayor éxito que enfoques tradicionales para mejorar el entendimiento conceptual de los estudiantes, compromiso y retención de conocimientos.
3. En relación a la mejora citada en ítem anterior, las ganancias de aprendizaje no inhiben habilidades de los estudiantes; más bien pueden mejorar sus habilidades para resolución de problemas.
4. En cuanto a la inversión de tiempo, una asignación de tiempo cuidadosa es crucial para implementaciones exitosas basadas en investigación. PER ayuda a maximizar el tiempo. Como ejemplo, un profesor puede pasar horas preparando notas de clase que solo servirán para ser copiadas por los alumnos, en lugar de preparar una experiencia de aprendizaje duradera.

En base a lo descrito arriba se puede ir cerrando la brecha entre las recomendaciones arrojadas por investigación en la educación de la física y la práctica.

Entre otras conclusiones importantes están:

- PER tiene potencial para beneficiar a estudiantes
- En el cambio de paradigma actual en que el profesor no es el principal diseminador de información, es de interés que los profesores adopten estrategias basadas en investigación y proveer las mejores experiencias a sus estudiantes.
- A pesar de los beneficios e importancia de aplicar pedagogías basadas en investigación en las aulas, muchos profesores no hacen uso de los recursos disponibles por las barreras expuestas con anterioridad. A la luz de la evidencia existente, se pueden contrarrestar estas inquietudes.

El estudio fue realizado en base a respuestas obtenidas de la literatura y también de encuestas a profesores que asistían a conferencias y coloquios realizados por el grupo de trabajo de Fraser, Timan, Mazur, entre otros. No se requiere mayor investigación, más que la experiencia del autor de esta tesis, para saber que en el contexto de la UNAH, se tienen inquietudes similares percibidos arriba por Fraser et al.

No obstante las barreras existentes aún hoy día en el ámbito nacional e internacional, es notable mencionar que en Honduras hay instituciones que promueven la innovación (como la DIE) e incluso espacios de aprendizaje en el tema; tal es el caso de la Maestría en Física de la UNAH, que ha tenido a bien incluir en su plan de estudios la asignatura Docencia en la Enseñanza y Aprendizaje de la Física - MFS604, a través de la cual los alumnos de posgrado conocen de herramientas de educación basadas en la investigación.

4.3. Investigación en la educación de la física y aspectos cognitivos

Physics Education Research (PER) usa la teoría de ciencia cognitiva como una fuente importante para interpretar el aprendizaje de estudiantes. Los principios cognitivos son también útiles para el desarrollo de estrategias de instrucción: enfoques pedagógicos, tutoriales, videos educativos, etc. Se pueden citar algunas teorías cognitivas para el desarrollo de técnicas instruccionales, por ejemplo: “Desajuste óptimo” de Piaget [41], “Zona de desarrollo próximo” de Vygotsky [42], “Preparación para el aprendizaje futuro” [43], entre otras, que no estarán sujetas a descripción extensiva en esta tesis pero que han servido y se citarán luego más adelante en el contexto de la intervención educativa realizada y descrita más adelante.

Conviene un repaso de algunos de los conceptos relacionados con aspectos cognitivos relevantes para el enfoque Spin-First:

Memoria: es la habilidad para retener información. Se puede clasificar en dos: memoria a corto plazo y a largo plazo [?, ?]. La memoria a corto plazo procesa la información por un periodo corto (alrededor de 18 segundos) con práctica repetitiva y ensayo. Por otro lado, la memoria a largo plazo es donde se almacena información que dura días o la vida entera.

Investigación posterior muestra que la memoria a corto plazo se puede incrementar dividiendo en pedazos la información, en grupos significativos. Eso podría explicar por qué, según se verá más adelante, un estudio de los postulados de la mecánica cuántica vienen bien a los estudiantes para mejorar su comprensión sobre la materia.

Metacognición y epistemología: es conocimiento del aprendizaje, o *saber del saber* [47]. Por ejemplo, un estudiante que ha empezado a discernir que tiene más dificultades aprendiendo un concepto que otro, el desarrollo de habilidades como la reflexión o conciencia de sí mismo en el proceso de resolución de problemas.

Para el Enfoque Spin First es necesario el desarrollo de competencias de razonamiento conceptual y metacognición para que logren un conocimiento estructurado. Además, ad-

quieren estas habilidades al usar el programa SPINS: les ayudan a estar consiente cuando erran y continúan probando hasta dar con la respuesta adecuada y concluir.

La epistemología es la teoría del conocimiento que intenta dar sentido al logro intelectual humano. Una vez logran manejar los postulados de la mecánica cuántica, entenderán que este es válido no solo para sistemas de espín $1/2$ o 1 , sino para cualquier sistema mecánico cuántico, abonando a su conocimiento estructurado. Las herramientas de aprendizaje activo como SPINS les ayuda a lograr esto. Además, el entender las limitaciones y novedades de las diferentes teorías de la física a lo largo de la historia abona.

Desajuste óptimo: se debe considerar que el conflicto cognitivo en el sujeto tiene que responder a la idea de *desajuste óptimo*. ¿Qué significa esta idea de desajuste óptimo? En palabras sencillas se puede apreciar de esta manera: si el objeto de conocimiento que se le presenta al estudiante está demasiado alejado de sus posibilidades de comprensión, no se producirá ningún tipo de desequilibrio en sus esquemas de asimilación y no habrá aprendizaje. Por otra parte, también puede suceder que el desajuste no sea tal, y que el objeto presentado quede totalmente asimilado en los esquemas ya disponibles por el estudiante. En tal sentido, este no encontrará razones valederas para modificar sus esquemas de conocimiento. Por lo tanto, en esta situación tampoco se producirá el aprendizaje. Se requiere pues, un desajuste óptimo.

Desde la intervención didáctica presentada más adelante, se discutirán actividades que parecen no tienen tal desajuste óptimo, como los laboratorios virtuales presentados: les parecieron demasiado complicados para abordarlos solo. Necesitaron de ayuda del instructor.

Zona de desarrollo próximo La zona de desarrollo próximo es un concepto creado por Vigotsky que se refiere a la distancia que existe entre el desarrollo psíquico actual del sujeto y su desarrollo potencial. Por esta razón es un concepto de suma importancia para la educación en todos los niveles de enseñanza. Por ejemplo, en la intervención educativa presentada, muchos alumnos no tenían el conocimiento de mecánica cuántica, sus carreras no contemplaban esas clases, por ello era importante homologar en algún grado conocimientos: he ahí la importancia de los cursos propedéuticos propuestos en la maestría, que

se discutirá luego. Además, resultó de importancia el módulo 1 para el curso de MFS614, como se discutirá en breve, para presentar conceptos de mecánica ondulatoria, sobre todo a aquellos estudiantes que no habían tomado un curso de mecánica cuántica.

Finalmente, se hace mención de la bien conocida estrategia de instrucción llamada “**Instrucción entre pares**” de Eric Mazur [44], cuyo objetivo fundamental es proveer una estrategia en la que estudiantes exploten la interacción durante las clases y se enfoques en los conceptos subyacentes. Esta estrategia hace uso del aprendizaje activo, en lugar de que los estudiantes estén pasivamente escuchando una lección.

4.3.1. Investigación en educación e innovación en la UNAH

En el contexto local de la UNAH, las intervenciones innovadoras como la que se describirá a continuación, deben ser parte del nuevo rol del docente. Según el Modelo Educativo de la UNAH [45]:

- Facilitar del aprendizaje, colaborador, tutor, guía
- Constructor de su práctica pedagógica
- Ceder su protagonismo al estudiante
- Enseñar al estudiante a aprender a aprender

O sea, el docente debe ser un investigador en su práctica pedagógica. En cuanto a las metodologías a utilizar, el Modelo contempla:

- Se trata de propiciar estrategias para la construcción de aprendizajes individuales y sociales significativos.
- Uso de metodologías activas que propician el diálogo y la reflexión
- Se realiza un intercambio conceptual y metodológico en el cual, tanto los estudiantes como los docentes aprenden.

- Hace énfasis en el aprendizaje.

El Modelo Educativo enfatiza en la innovación en el proceso de enseñanza-aprendizaje para la formación de calidad y pertinente. He de agregar que no establece basado en qué, pero no según arriba expuesto lo mejor es en base a actividades que tengan base científica. Se debe implementar:

- Desarrollo de habilidades de pensamiento (análisis, síntesis, comunicación efectiva, observaciones)
- Estudio de casos
- Uso de las TIC

Como mencionado con anterioridad, el profesorado de física tiene dos fuentes importantes en la UNAH para apoyarse en fortalecer lo anterior: el curso de posgrado de la UNAH “Enseñanza aprendizaje de la Física” y la Dirección de Innovación Educativa. En esencia, los avances en la investigación de la enseñanza de la física han salido de éstas.

Por último, La Perspectiva Pedagógica del Modelo Educativo de la UNAH se construyó tomando como base la Teoría constructivista, la Teoría crítica y la Teoría humanista.

Al momento, pues, sabemos que la teoría cuántica requiere innovación, y en la UNAH también es notable esta deficiencia. Además, el Modelo exige que se vaya cambiando los enfoques tradicionales a enfoques más innovadores. Finalmente, no solo se trata de proponer, sino de medir, cuantificar el impacto. El siguiente es un estudio exploratorio relacionado con el uso de un enfoque pedagógico innovador (Spin-First) fortalecido con técnicas de aprendizaje activo, herramientas basadas en investigación y uso de tecnologías de la información.

Con relación al aprendizaje activo, en mecánica clásica es bien sabido que el aprendizaje activo mejora el entendimiento de la materia, se puede afirmar lo mismo en la enseñanza de la mecánica cuántica, extensión de la primera, y con mayor razón por lo abstracto de la materia. Es deseable que los estudiantes pongan manos a la obra, lo que se conoce como *hands-on approach*.

4.4. Motivación

La incorporación del enfoque de Spin-First en algunos libros de mecánica cuántica como los listados en Tabla 3.2 sugieren que la enseñanza de la mecánica cuántica está cambiando, aunque lentamente, como expuesto en sección 4.2. Además, como se ha podido apreciar en esta tesis, los conceptos que la disciplina requiere van más allá de la intuición de los estudiantes nuevos a la física cuántica; intuición basada en el mundo macroscópico. Adicional, la matemática involucrada es amplia: espacios vectoriales, teoría de grupos, álgebra lineal, ecuaciones diferenciales, análisis de Fourier, entre muchos otros tópicos especiales. Por esto y más es que la mecánica cuántica es una disciplina difícil de aprender [13] y es necesario fortalecer o cambiar el modelo tradicional de enseñanza-aprendizaje en la UNAH. La falta de comprensión de los conceptos fundamentales de la materia en el ámbito global y local mediante enseñanza tradicional se hizo evidente en la sección 3.4 de esta tesis.

Diversos estudios en el ámbito de la investigación de la educación de la física apuntan hacia enfoques en los que el estudiante esté involucrado de manera activa en el aprendizaje, no solo escuchando de forma pasiva de quien se supone debe saber: el profesor. Se ha demostrado que con ello adquiere una mejor comprensión de los conceptos de la física [32]. En ese sentido, herramientas computacionales se pueden utilizar de diversas maneras para que el estudiante se compenetre con la materia y aprenda no solo activa sino de forma interactiva: cátedras apoyadas con visualizaciones en computadora, tutoriales interactivos, tutoriales en documento o video, laboratorios virtuales, entre muchas otras formas [33].

Así, para el curso de Física Cuántica (MFS614) de la Maestría en Física en Ciudad Universitaria se implementó en modalidad b-learning un módulo que involucra al estudiante en su aprendizaje haciendo uso de herramientas computacionales de vanguardia y el enfoque pedagógico innovador descrito en sección 3.5.1, en el que se usan experimentos de Stern-Gerlach para la enseñanza de la mecánica cuántica moderna. La hipótesis central de este trabajo es que el enfoque y material educativo descrito a continuación mejora la experiencia y entendimiento de la mecánica cuántica de los alumnos.

4.4.1. La importancia de innovar en la enseñanza de la mecánica cuántica

Sin la teoría cuántica, desarrollada a lo largo del último siglo, no habría electrónica como la conocemos hoy en día, los teléfonos celulares y tabletas no serían portátiles. Los lasers y sus diferentes aplicaciones -tal como la transferencia de datos mediante fibra óptica- no estarían disponibles. La comprensión del Universo estaría muy limitada, ya que las teorías que hoy en día son promesa para explicar todo se basan en la mecánica cuántica. Asimismo, la ciencia natural que conocemos como Química ha tenido grandes avances dado el entendimiento a nivel subatómico que brinda la mecánica cuántica. El Modelo Estándar, quizá la compilación intelectual más importante del siglo pasado, sienta sus bases en la mecánica cuántica. La mecánica cuántica satisface la curiosidad innata por entender el universo que nos rodea y ha permitido desarrollar tecnología para la comodidad del ser humano. Y el futuro es prometedor: la espintrónica, computadoras muchísimo más rápidas, imagenología para aplicaciones médicas, seguridad de la información, etc., son solo algunas aplicaciones en desarrollo que utilizan fundamentos de mecánica cuántica. Algunas universidades del mundo, tal como la Universidad de Colorado en Boulder, están transformando el diseño de sus cursos para lograr un mejor impacto en el aprendizaje de la mecánica cuántica [35]. Otras, además, contienen líneas de investigación en la enseñanza de la física en general, incluyendo mecánica cuántica [37]. Para las ingenierías -particularmente aquellas que estudian lo relacionado con química, electricidad y magnetismo, electrónica y computadoras-, es conveniente el aprendizaje de la mecánica cuántica. Por supuesto, es una necesidad para quienes estudian el campo de la Física. Actualmente en la UNAH, y de hecho en todo Honduras, el único departamento que sirve asignaturas de mecánica cuántica es la Escuela de Física en la UNAH, Ciudad Universitaria. Por tanto, la Escuela está en la obligación de ofrecer una mejora continua en sus asignaturas para la formación de mejores profesionales y contribución al desarrollo del país. Sirva esta tesis como una pequeña contribución a tales metas.

4.5. Desarrollo de la intervención educativa

4.5.1. Diseño general

Para comenzar a describir el proceso innovador del módulo 2 de la asignatura de postgrado Física Cuántica - MFS614, es importante referir que el contenido programático del curso de Física Cuántica (MFS614) de la Maestría de Física que ofrece la UNAH, el cual se diseñó con tres módulos, cuya temática se resume en la tabla 4.1. Considerar además la temática propuesta en el plan de estudios de la maestría en la Fig. 3.2.

Tabla 4.1: Estructura del curso Física Cuántica - MFS614

Módulo 1 (MIT edX 8.05.1x)	módulo 2 (Open edX DIE)	módulo 3
Mecánica Ondulatoria (Funciones de onda y ec. de Schrödinger)	Experimentos de Stern-Gerlach para sistemas de Espín 1/2 y Espín 1	Momento Angular
Espín 1/2		El átomo de hidrógeno
Álgebra lineal		
Bra-kets y Principio de Incertidumbre		

La dinámica de la asignatura MFS614 durante el primer periodo académico 2016 fue la siguiente: el primer módulo, a cargo del profesor Dr. Armando Euceda, se desarrolló con el apoyo del MOOC impartido por el Massachusetts Institute of Technology a través en la plataforma edX: parte de un curso de tradicional pero en modalidad virtual ofrecido por el MIT. Este curso se describe en la siguiente sección.

El módulo 2 en el cual se aplicó la innovación tema de este artículo, estuvo a cargo del profesor Jonnathan Andre López, autor de la presente tesis, y se desarrolló en modalidad mixta o b-learning. Finalmente, el tercer módulo estuvo a cargo del profesor Armando Euceda, sobre dinámica cuántica y aplicaciones.

El módulo 2 para MFS614 se diseñó y desarrolló en un aula virtual en la plataforma Open edX y el simulador SPINS para experimentos de Stern-Gerlach, aplicación programada originalmente por Schroeder y Moore para Macintosh [26] y portado a Java por David McIntyre [33], como descrito anteriormente.

En contraste a los cursos de mecánica cuántica tradicionales, la estructuración del módulo 2 titulado “Experimentos de Stern-Gerlach”, consistió de varios elementos innovadores: desde el entorno físico hasta las herramientas computacionales, siendo el principal instrumento el aula virtual en la plataforma Open edX instalada en el campus virtual de la UNAH por el equipo técnico de la Dirección de Innovación Educativa (DIE). Esta aula virtual contiene los demás elementos de apoyo pedagógico y temático para los estudiantes: recursos didácticos, visualizaciones computacionales, la aplicación SPINS, tareas, tutoriales en video, laboratorios virtuales y la evaluación final.

La propuesta innovadora en modalidad b-learning, desde luego incluyó momentos presenciales y trabajo educativo en el aula virtual. El módulo 2 se impartió durante el mes de abril de 2016, los días viernes y sábado, con un total de 20 horas presenciales y 10 horas de trabajo individual en línea, aproximadamente. Ambos ambientes demandan condiciones pedagógicas y tecnológicas que contribuyan a innovar el proceso de aprendizaje del módulo 2 de la asignatura Física Cuántica.

Como se observa en la tabla 4.1, la implementación fue una basada en el enfoque de experimentos de Stern-Gerlach (Spin-First) con alguna experiencia en mecánica ondulatoria, dada por del módulo 1 del curso 8.05.1x. En cuanto al Grupo A, ellos además tenían la experiencia de sus cursos tradicionales Mecánica Cuántica U y II del pregrado en Física.

Antes de describir por completo los módulos 1 y 2, pertinentes a esta tesis, es importante conocer un poco del grupo: su experiencia con la mecánica cuántica y condiciones de estudio.

4.5.2. Generalidades de los estudiantes

La Fig 4.1 muestra que los estudiantes provenían de dos universidades: seis (6) de la UPNFM y ocho (8) de la UNAH. Ninguno de los estudiantes de la UPFN había tomando un curso de cuántica antes. Por otro lado, dos (2) estudiantes de la UNAH no habían tomado un curso de cuántica: una Lic. en Matemáticas, y un ingeniero Eléctrico. En total, como lo muestra la Fig. 4.2c, seis (6) estudiantes habían tomado un curso de cuántica, pero ocho (8) nunca habían llevado alguno.

De aquí en adelante el Grupo A denotará alumnos que habían llevado mecánica cuántica, mientras que el Grupo B denota a quienes no habían llevado algún curso de cuántica.

Aunque el Grupo B no había llevado mecánica cuántica *per se*, sí habían cursado un propedéutico con lo cual se niveló la siguiente temática:

- Desarrollo de competencias tecnológicas
- Mecánica clásica intermedia
- Electromagnetismo
- Física moderna

En el curso propedéutico de Física Moderna se cubren tópicos como: el efecto fotoeléctrico, el experimento de doble rendija, la estructura atómica, ondas electromagnéticas, relatividad especial, el decaimiento beta.

Los estudiantes del Grupo A, además, recibieron cursos de Mecánica Cuántica I y II en su pregrado de acuerdo a lo descrito en la Fig. 3.1 del capítulo 3. Sin embargo, ninguno de ellos había conocido el enfoque presentado en el módulo.

En relación a las condiciones de estudio de los estudiantes, además de cursar la maestría en física, todos trabajaban paralelamente. Doce (12) de ellos lo hacían a tiempo completo (jornada de 6 horas o más); mientras que dos (2) de ellos laboraban a medio tiempo. Es importante destacar que todos los estudiantes consideraban que su trabajo afectaba notablemente su estudio. La Fig. 4.2 resume gráficamente lo expuesto.

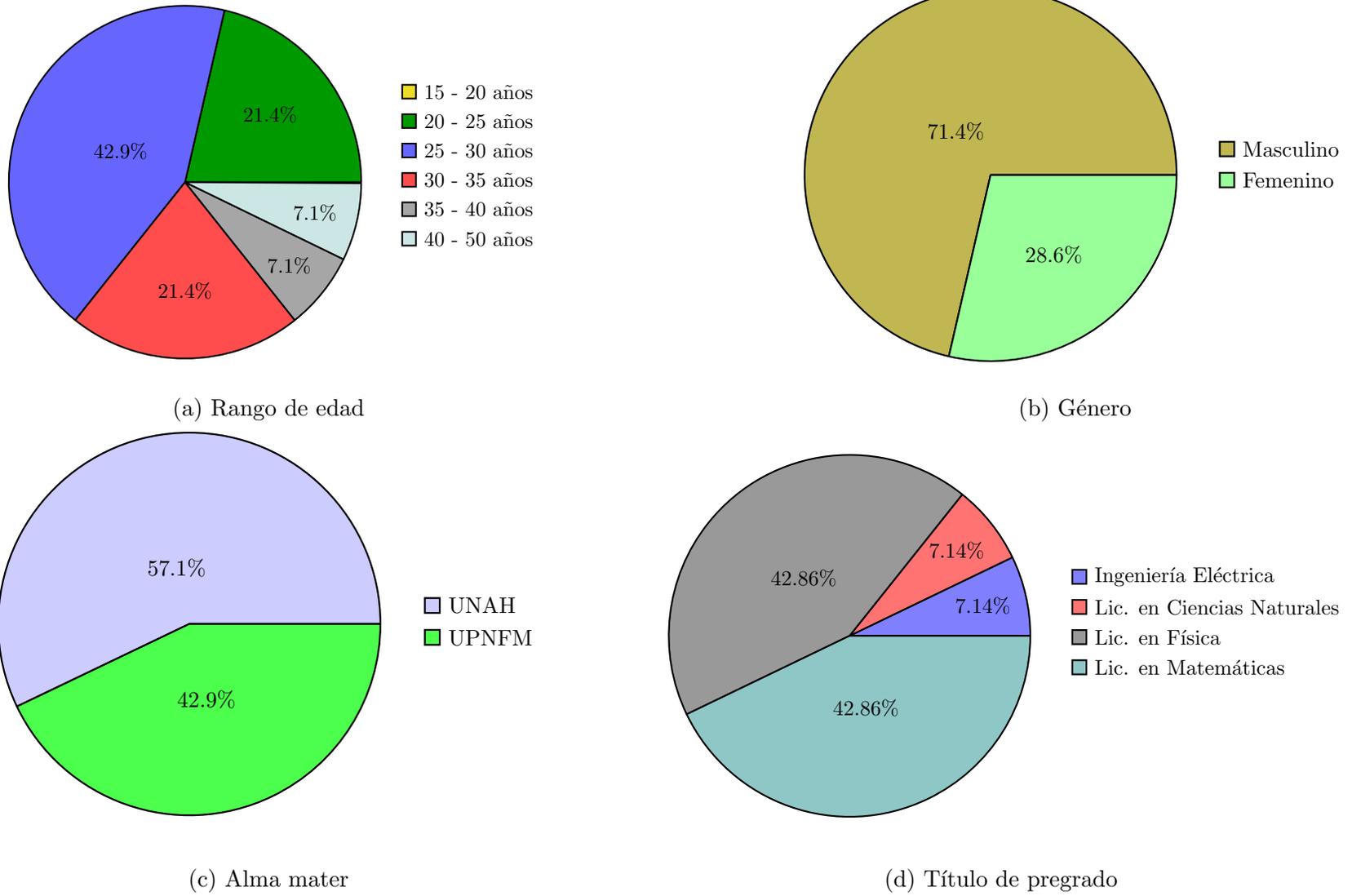


Figura 4.1: Datos generales de los alumnos del curso MFS614

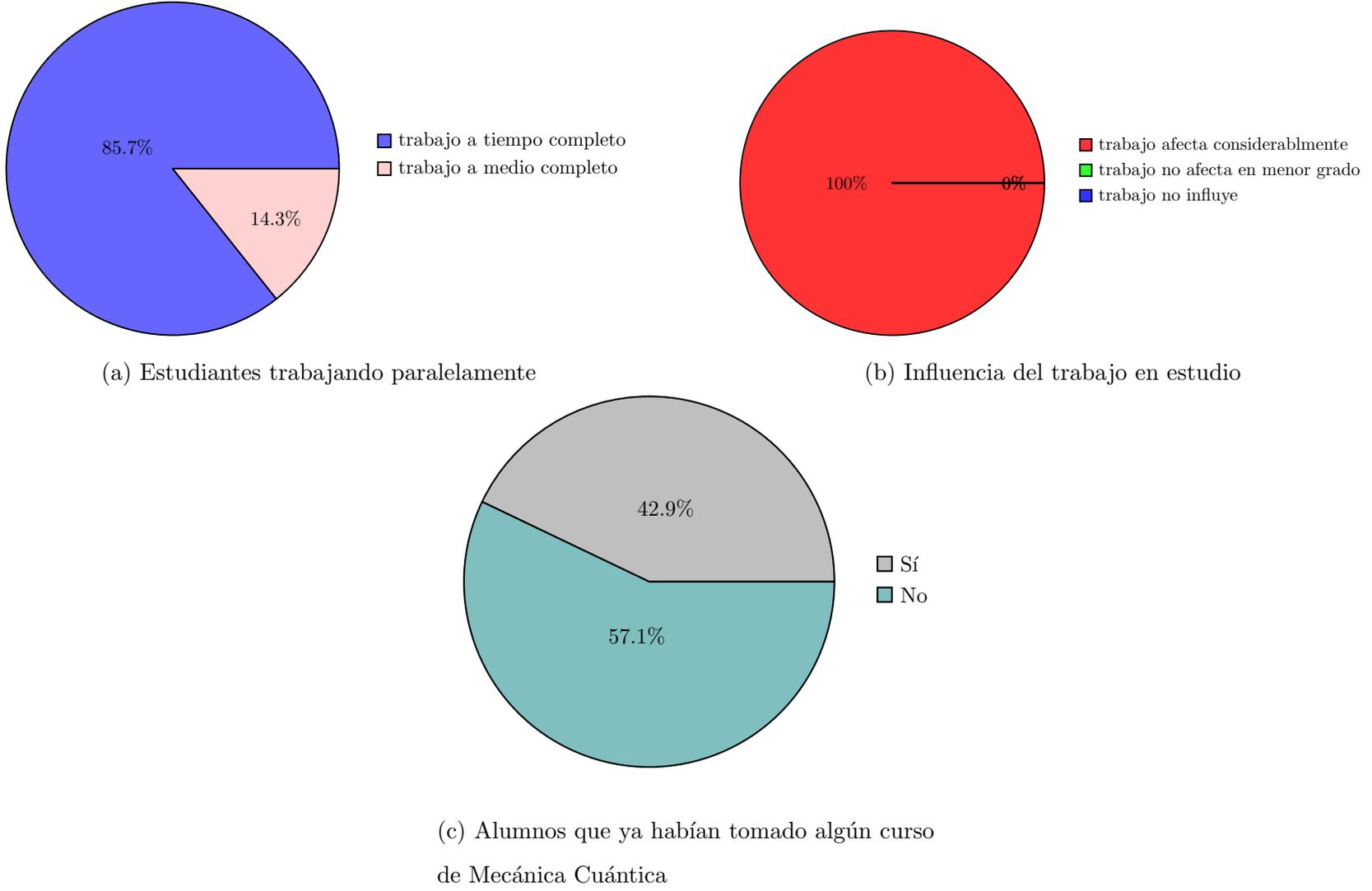


Figura 4.2: Condiciones de estudio de los estudiantes

4.5.3. El módulo 8.05.1x

Curriculamente, el Massachusetts Institute of Technology enseña mecánica cuántica a sus estudiantes mediante tres cursos:

- Física Cuántica I (8.04)
- Física Cuántica II (8.05)
- Física Cuántica III (8.06)

El número 8 identifica a los cursos de física. En el curso 8.04 se abordan las bases experimentales de la física cuántica: el efecto fotoeléctrico, dispersión de Compton, fotones, el experimento de Franck-Hertz, el átomo de Bohr, difracción de electrones, ondas de de Broglie, dualidad onda partícula de la materia y luz. Además, se introduce la mecánica ondulatoria: la ecuación de Schrödinger, funciones de onda, paquetes de onda, amplitudes de probabilidad, estados estacionarios, el principio de incertidumbre de Heisenberg. Soluciones a la ecuación de Schrödinger en una dimensión y tres dimensiones.

En los cursos 8.05 y 8.06 cubren física cuántica con aplicaciones de física moderna. Se presente el formalismo general de la mecánica cuántica: estados, operadores, notación de Dirac, representaciones, teoría de medición. El oscilador armónico: álgebra de operadores, estados. Mecánica cuántica en tres dimensiones: potenciales centrales y la ecuación radial, estados ligados y dispersión, análisis cualitativo de funciones de onda. Momento angular: operadores, álgebra de conmutadores, valores y vectores propios, armónicos esféricos. Espín: dispositivos Stern-Gerlach y medición, resonancia nuclear magnética, espín y estadística. Adición de momento angular: series y coeficientes de Clebsch-Gordan, sistemas de espín, formas alotrópicas del hidrógeno.

8.06 es continuación del curso 8.05: Teoría de perturbaciones, aproximación Born-Oppenheimer, aplicaciones a la teoría atómica y molecular. La estructura de átomos de uno y dos electrones: órbita de espín, correcciones relativistas, estructura fina, aproximación variacional, empantallamiento (screening), efecto Zeeman y Stark. Partículas cargadas

en un campo magnético: niveles de Landau, efecto Hall. Dispersión: principios generales, ondas parciales, repaso de aproximaciones de baja energía, resonancia, aproximación de Born. Teoría de perturbaciones dependiente del tiempo. Investigación y redacción de artículo relacionado con 8.05 y 8.06.

Conviene también hacer notar, para fines comparativos con la realidad en la UNAH, que los siguientes cursos son requisitos revios a 8.04:

- Física I (8.01): Mecánica clásica
- Física II (8.02): Electrostática, electromagnetismo
- Física III (8.03): Mecánica vibracional y ondas

El curso 8.051, Física Cuántica II, consiste en una mezcla de instrucción en línea y en persona (b-learning). En cuanto a modalidad en línea, en edX, MIT ofrece versión totalmente gratuita del curso 8.05:

- 8.05.1x Mastering Quantum Mechanics Part 1: Wave Mechanics
- 8.05.2x Mastering Quantum Mechanics Part 2: Quantum Dynamics
- 8.05.3x Mastering Quantum Mechanics Part 3: Entanglement and Angular Momentum

El curso 8.05.1x se ofrece totalmente en línea (e-learning) a través del MOOC edX, y consta de:

1. Repaso de mecánica ondulatoria
2. Principio variacional
3. Operadores de espín y estados de espín 1/2
4. Elementos del álgebra lineal
5. Operadores hermitianos

6. Notación de Dirac

Así que, a grandes rasgos, eso es lo que los estudiantes aprendieron en el módulo 1. Importante hacer notar que estudiaron un poco de mecánica ondulatoria y también sistemas de espín $1/2$, pero no realizaron conexiones sólidas de una teoría con la otra (espacios infinitos vs. finitos). Además, los sistemas de espín $1/2$ se abordan como experimentos mentales, tal como lo hacen los autores de los libros descritos en la tabla 3.2, a excepción de McIntyre que utiliza el software SPINS para complementar la enseñanza. En otras palabras, se puede afirmar que los estudiantes abordaron sistemas de espín $1/2$ de forma teórica, aunque no tradicional. El abordaje tradicional del experimento de Stern-Gerlach y sistemas de espín $1/2$ se da en el contexto de Momento Angular, como expuesto en sección 3.2.

Concluyendo, la implementación se podría considerar Spin-First con conceptos previos de mecánica ondulatoria brindados en el módulo 1, lo cuál es lo recomendado por los autores del enfoque en base a su experiencia.

4.5.4. Herramientas computacionales utilizadas

Aprovechando la amplia gama de herramientas computacionales e interactivas para la creación de entornos de aprendizaje virtuales, en la implementación del módulo 2 de la asignatura de Física Cuántica se decidió el uso de las siguientes herramientas de cómputo: la plataforma Open edX y la aplicación SPINS, descrita a continuación.

La plataforma edX es una plataforma para la educación en línea, y una de las principales proveedoras de MOOC (Massive Open Online Course), surge en 2012 como iniciativa de la universidad de Harvard y el MIT. Para finales de 2021 edX fue comprada por la compañía 2U, Inc.

Para instituciones educativas que desean montar cursos en línea utilizando esta plataforma, edX pone a disposición la versión Open edX. En la UNAH esta plataforma de código abierto fue instalada como un campus abierto adicional al campus virtual institucional y se trabajó como proyecto piloto la asignatura de Física General FS-100 totalmente

en línea, para estudiantes de las carreras de la Facultad de ingeniería. Lamentablemente la plataforma fue dada de baja y actualmente no está funcionando, quedando únicamente la plataforma Moodle.

La plataforma (software) Open edX posee diversas herramientas para potenciar actividades de aprendizaje en las área de STEM, es decir los campos de las ciencias, matemáticas, ingenierías y tecnología. Permite codificación en XML, HTML5, Python y Perl, entre otras, haciéndola muy versátil para un instructor o docente con alto grado de formación en informática y programación, perfil que comúnmente poseen los profesores de Física, Matemáticas e Ingenierías.

Esta plataforma abierta (Open edX) fue la elegida por las razones expuestas y fue el entorno con la cual el estudiante interactuó fuera y dentro del salón de clase. Es importante mencionar que el curso de Física Cuántica - FS614 fue el primer curso de posgrado en Honduras que está disponible en Open edX.

El aula virtual para el módulo 2 de Física Cuántica - MFS 614 contiene además elementos tecno-pedagógicos utilizados: desarrollo de la temática en HTML5 mediante documentos y videos, tutoriales escritos en Latex y en video utilizando el software ShowMe siguiendo el modelo de Khan Academy.

La comunicación remota con los alumnos en el aula virtual se realizó principalmente mediante video-mensaje elaborado con Camtasia Studio. El software utilizado para el desarrollo de la temática, esto es, el aprendizaje de los axiomas fundamentales de la mecánica cuántica mediante experimentos de Stern-Gerlach, fue el programa SPINS.

4.5.5. El simulador SPINS

El uso de computadoras es bien conocido en la actualidad y se pueden usar de diferentes maneras. Por ejemplo, para demostraciones en clase, simulaciones, tutoriales basados en computadoras, experimentos virtuales, etc. Además, los estudiantes pueden interactuar activamente en su aprendizaje a través de un simulador. Investigación en la enseñanza de la física en EEUU ha demostrado que esto es crítico para los estudiantes. [34]

La Universidad Estatal de Oregon (OSU), en Estados Unidos, renovó en 2008 su diseño curricular para cursos de pregrado, y mecánica cuántica no fue la excepción. Entre las diferentes innovaciones realizadas en los cursos de Física Cuántica cabe destacar la incorporación de la aplicación SPINS.

Esta aplicación permite realizar experimentos de Stern-Gerlach para el entendimiento de los axiomas fundamentales de la mecánica cuántica, tal como se describió en la sección 3.5. Además, concede al estudiante confirmar sus resultados teóricos mediante experimentación.

La aplicación SPINS consiste en una interfaz gráfica que simula los experimentos de Stern-Gerlach. La interfaz permite al usuario crear diversas configuraciones experimentales relacionadas con medición y dinámica cuántica. SPINS es una de las herramientas computacionales en mecánica cuántica más recomendadas y catalogada por expertos como “excelente”.

Es importante mencionar que la Escuela de Física en UNAH no cuenta con laboratorios reales para la materia. Hay que acudir en ocasiones a la opción de simuladores. El software SPINS pretende eso y, además, reemplaza los experimentos mentales para el enfoque Spin-First por simulaciones de experimentos de Stern-Gerlach.

Existen varias versiones de la aplicación SPINS, a saber:

- La desarrollada por Schoeder, para MAC [26]
- SPINS, recién descrita, de la Universidad Estatal de Oregon(OSU), escrita en JAVA (multi-plataforma) [33]
- OSP (Open Source Physics) SPINS de comPADRE, parte de la AAPT [38]
- Existe también una versión de phET, de la Universidad de Colorado en Boulder [39]

El software de Schroeder funciona solo para MAC, lo cual supone una evidente desventaja. La aplicación de phET dejó de funcionar, está obsoleto (ya no funciona *flash* en navegadores de internet modernos, migración a HTML5 pendiente). El paquete de OSP

presenta tutoriales; sin embargo, solo cubre partículas de espín $1/2$. La versión “stand-alone” de OSP es más robusta que la original de McIntyre y es la mejor opción cuando se combina con un diseño instruccional adecuado. La aplicación está escrita en JAVA.

Java es un lenguaje multiplataforma: sus aplicaciones corren en cualquier sistema operativo y para el 2016 funcionada en en 89 % de las computadoras del mundo y más de 3 billones de dispositivos móviles. En otras palabras, los estudiantes pueden sin problemas correr la aplicación en sus laptops o teléfonos móviles que casi siempre cargan consigo.

¿Que hace el software SPINS? Simula mediciones de Stern-Gerlach para partículas de espín $1/2$ y 1 . El usuario puede diseñar y correr experimentos que involucren mediciones sucesivas de espín, ilustrando conceptos de observables, interferencia, y evolución en el tiempo. Lo pueden usar desde estudiantes que no son de ciencias naturales, hasta estudiantes de física, pregrado y posgrado. En otras palabras, hace el enfoque Spin-First interactivo.

La Fig. 4.3 muestra la interfase principal de la aplicación, con representación esquemática muy similar a la presentada en las figuras 3.4 a 3.8, parecido a lo originalmente concebido por Schroeder. Esta aplicación hace más obvia la naturaleza estadística de la mecánica cuántica, más intuitiva.

Ranking de SPINS

¿Como percibe la comunidad académica internacional el software SPINS?

Un artículo titulado Report and Recommendations on Multimedia Materials for Teaching and Learning Quantum Physics [27] describe una colaboración de físicos, afiliados a MPTL y MERLOT, quienes realizaron una encuesta y analizaron materiales multimedia para el aprendizaje de la física cuántica y mecánica cuántica. Un total de 250 aplicaciones se consideraron y ocho fueron recomendadas por los revisores.

Estos recursos multimedia fueron adquiridos de ComPADRE, MERLOT/Quantum, Didattica y Multimedia Physiks, búsquedas generales y literatura tradicional. Los software más recomendados fueron los siguientes:

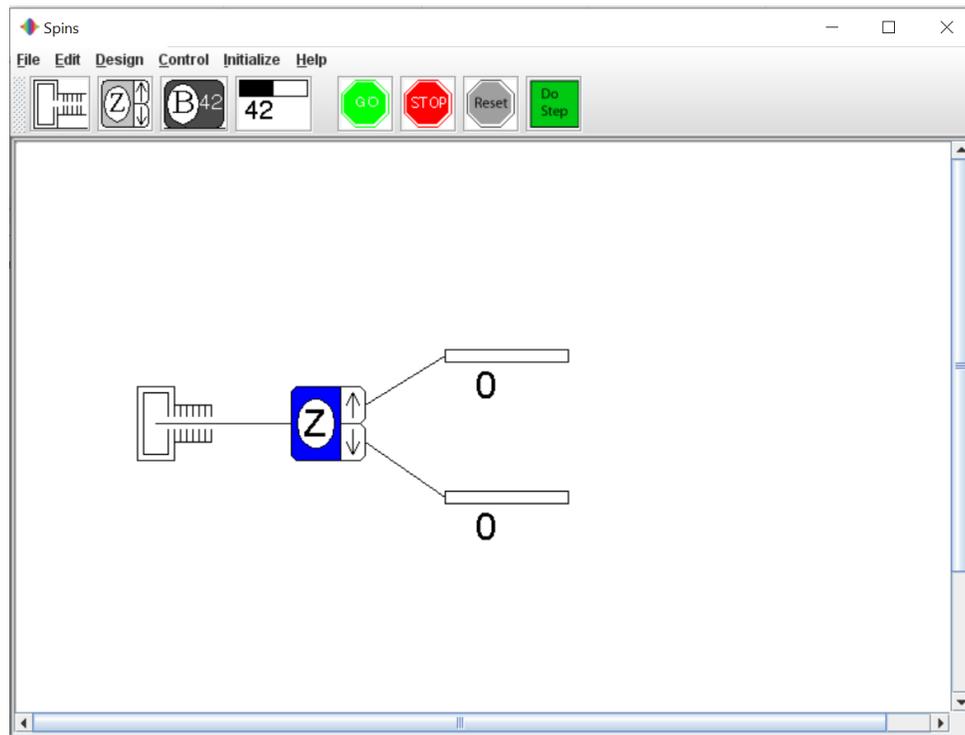


Figura 4.3: Interfase principal del simulador SPINS

- QUVIS
- phET
- Physlet Quantum Physics
- Quantum Lab
- Spins Physics

Éstos se describen brevemente a continuación:

Quvis es un Proyecto desarrollado por Universidad de St. Andrews, en Escocia, Reino Unido, que tiene una extensa colección de aplicaciones y tutoriales en Flash y HTML5 son simulaciones interactivas. Experimento de variables ocultas (hidden variables) son algunas.

phET es un proyecto de la Universidad de Colorado en Boulder. Es una colección de simulaciones sencillas. Incluso adecuadas para utilizarse en secundaria. Muchas vienen con recomendaciones para instructores. Disponibles en diferentes idiomas

Physlet Quantum Physics, de AAPT ComPADRE que tiene recursos para la educación en física y astronomía. Es un texto suplementario en línea, interactivo. El texto cubre lo que generalmente se estudia en curso común de Mecánica Cuántica. Actividades exploratorias.

Quantum Lab es un proyecto de Friedrich-Alexander-Universität en Erlangen-Nürnberg de Alemania. Experimentos interactivos con imágenes reales. Enfocado en óptica cuántica. Aplicaciones avanzadas como criptografía.

SPINS. Solución completa de la Universidad Estatal de Oregon (OSU). Enfoque de ESpin-First, tienen además actividades en clase, una wiki, laboratorios virtuales. Fue el simulador en Java de Stern-Gerlach Implementado en el módulo 2 del curso de MFS614.

4.5.6. Ambiente Físico

Los ambientes físicos pueden jugar un papel importante en el aprendizaje de los estudiantes e incluso en sus calificaciones finales. En base a análisis estadístico, (Suleman, 2014) mostró que los estudiantes se sienten más motivados, interesados y atentos; además, muestran una mejor retentiva a la hora de aprender. El espacio físico utilizado fue el aula de la Maestría de Física que consiste en un ambiente físico con las siguientes características (ver Fig. 4.4 espacio físico amplio con capacidad para unas 60 personas, con mobiliario educativo y equipo educacional y de cómputo que demandan los espacios educativos del siglo XXI: televisores (4), proyector de alta definición, mesas circulares (4), varias pizarras, computadoras con conexión a Internet disponibles para los estudiantes y acceso a Internet inalámbrico. Sin este ambiente físico, sería difícil involucrar al estudiante en el aprendizaje activo o practicar *peer instruction*, concepto conocido como *active-engagement*. Las mesas circulares fomentan la discusión en grupos y permiten a los estudiantes disponer de sus computadores portátiles. Este entorno es propicio ya que “promueve la interacción y sentido de comunidad que permite el aprendizaje formal e informal.” (Cornell, 2002)



Figura 4.4: Aula de la Maestría en Física utilizada para la asignatura de Física Cuántica

4.5.7. Diseño pedagógico

El enfoque pedagógico utilizado para la enseñanza de la mecánica cuántica en el módulo 2 difiere notablemente de la enseñanza tradicional de la materia a nivel mundial y local. El experimento llevado a cabo en 1,922 por Otto Stern y Walther Gerlach demostró que el momento angular intrínseco del electrón toma valores cuantizados, como se ha visto. Experimentos de este tipo sumergen al estudiante a los nuevos aspectos de la mecánica cuántica, en relación a la física clásica. Dos razones fundamentales resumen la justificación del uso de experimentos de Stern-Gerlach [23], expuestas con anterioridad pero copiados aquí por conveniencia:

- Demuestra cómo la mecánica cuántica moderna funciona ilustrando sus postulados fundamentales.
- Demuestra cómo se trabaja de manera práctica en la mecánica cuántica a través de notación de Dirac y formalismo matricial.

Algunas universidades han adoptado este enfoque de manera parcial, como el MIT,

y otras presentan este enfoque como primer paso de estudio en mecánica cuántica; tal es el caso de la Universidad Estatal de Oregon (OSU). El enfoque por sí solo supone un recurso invaluable en el aprendizaje, pero queda perfectamente complementado con el software SPINS discutido previamente. Con éste, los alumnos ponen “manos a la obra” e interactúan dentro y fuera del aula. Además, el instructor puede realizar demostraciones diversas en clase utilizando la aplicación. El libro de texto principal utilizado fue el de McIntyre, cuyo enfoque está descrito en la tabla 3.2.

Los momentos presenciales en aula de clase se orientaron a la exposición teórica de conceptos fundamentales mediante ayudas visuales y computacionales; discusión y aclaración de conceptos difíciles de comprender reportados por Zhu y Singh [18] y, en menor grado dado el limitado tiempo, a actividades de aprendizaje activo que involucraba al estudiante. Estas últimas quedaban para el alumno en su tiempo fuera del aula de clase. Cada una de las cátedras y actividades, en salón o en aula virtual, tenía propósitos u objetivos definidos.

La Fig. 4.5 muestra algunas capturas de pantalla del aula virtual montada en edX donde se aprecia la metodología de Spin-First.

SISTEMAS DE ESPÍN 1/2

El experimento de Stern-Gerlach

Experimentos 1 y 2

Laboratorio 1: Medición en Mecánica Cuántica
Laboratorios

Experimentos 3 y 4

Laboratorio 2: Mediciones en Sistema de Espín 1/2
Laboratorios

TAREA (PARTE 1) - Capítulo 1
McIntyre
Tareas due May 01, 2016 at 06:00 UTC

TAREA (PARTE 2) - Capítulo 2
McIntyre
Tareas due May 01, 2016 at 06:00 UTC

EXAMEN FINAL
Examen final due May 20, 2016 at 16:00 UTC

PROBLEMA 3: CÁLCULO DE PROBABILIDADES (2/2 points)

Considere los siguientes estados cuánticos:

$$|\psi_1\rangle = \frac{4}{5}|+\rangle - i\frac{3}{5}|-\rangle$$

$$|\psi_2\rangle = -\frac{4}{5}|+\rangle + i\frac{3}{5}|-\rangle$$

¿Para el estado $|\psi_1\rangle$, cuales son las probabilidades de obtener $\pm \frac{\hbar}{2}$ en la componente de espín a lo largo de los ejes x y y ?

$\mathcal{P}_{1,+x} = 16/25, \mathcal{P}_{1,-x} = 9/25 \quad \mathcal{P}_{1,+y} = 1/50, \mathcal{P}_{1,-y} = 49/50$

Experimentos 1 y 2

Laboratorio 1: Medición en Mecánica Cuántica
Laboratorios

Experimentos 3 y 4

Laboratorio 2: Mediciones en Sistema de Espín 1/2
Laboratorios

TAREA (PARTE 1) - Capítulo 1
McIntyre
Tareas due May 01, 2016 at 06:00 UTC

TAREA (PARTE 2) - Capítulo 2
McIntyre
Tareas due May 01, 2016 at 06:00 UTC

EXAMEN FINAL
Examen final due May 20, 2016 at 16:00 UTC

SISTEMAS DE ESPÍN 1

PROBLEMA 5: HISTOGRAMAS (1 point possible)

Considere un sistema cuántico en el cual se mide la energía E y existen cuatro resultados posibles para las mediciones: 2 eV, 4 eV, 7 eV y 9 eV. El sistema se prepara en el estado:

$$\frac{1}{\sqrt{39}} \{3|2\text{ eV}\rangle - i|4\text{ eV}\rangle + 2e^{i\pi/7}|7\text{ eV}\rangle + 5|9\text{ eV}\rangle\}$$

¿Cuál es el histograma de probabilidades correcto?

Energía (eV)	Probabilidad
2 eV	0.65
4 eV	0.05
7 eV	0.10
9 eV	0.20

Energía (eV)	Probabilidad
2 eV	0.65
4 eV	0.10
7 eV	0.05
9 eV	0.20

Figura 4.5: Capturas del aula virtual montada en edX

4.5.8. Trabajo en el aula virtual

En el aula virtual se presentaron los temas del módulo en HTML5, documentos, videos, tareas en su mayoría ejercicios o preguntas conceptuales, que fueron cuidadosamente preparadas para cubrir las ideas esenciales y lograr que los estudiantes practicaran el formalismo. Open edX permite múltiples opciones para el diseño de las tareas y admite escritura directa en LaTeX, lo cual hace que las tareas sean visualmente atractivas para el estudiante.

En la mayor parte de los casos los alumnos pueden comprobar sus respuestas mediante la experimentación, vía SPINS, lo cual hace que el estudiante se sienta confiado y lo motiva a seguir practicando y explorando. Adicionalmente, dos laboratorios virtuales fueron propuestos con pequeños tutoriales previos en LaTeX y en video para que el alumno logrará una mejor comprensión de lo requerido.

4.6. Resultados obtenidos

A continuación se presentan los resultados de una encuesta de 26 preguntas elaborada para conocer la percepción de los estudiantes en cuanto al enfoque adoptado (Spin-First), herramientas tecnológicas utilizadas, libro de texto innovador elegido, laboratorios virtuales sugeridos, preferencia de modalidad (virtual, semipresencial), preferencias de módulos, entre otras. Estos resultados se utilizan para evaluar de forma cualitativa la intervención y llevar a cabo más investigación para responder cuantitativamente si el enfoque en realidad genera una mejor comprensión conceptual de la mecánica cuántica. El apéndice B muestra el informe completo generado por la herramienta colaborativa en la nube Google Forms.

4.6.1. Percepción de las herramientas tecnológicas

Sobre el LMS Open edX

En relación a la plataforma Open edX y del software SPINS para la simulación de experimentos de Stern-Gerlach usados en el módulo 2, las impresiones de los estudiantes

se puede resumir de la siguiente manera:

El 86 % de los estudiantes consideró que la plataforma Open edX es una buena plataforma para modalidad b-learning como se ofreció el módulo 2, mientras que 57 % coincidieron que también lo es para la modalidad e-learning como cursaron el módulo 1. Notar que el LMS (Learning Management System) usado fue Open edX para ambos módulos.

El 7 % de los participantes (uno de ellos) opina que hay mucho por mejorar. La realidad es que Open edX, en relación a Moodle (por ejemplo), es un sistema mucho más nuevo y no tiene la misma trayectoria.

Sobre el software SPINS

En relación al software SPINS, 13 de 14 estudiantes opinaron que esta aplicación tiene claridad en lo que pretende simular, pero para el 43 % de ellos no es lo suficientemente interactivo y requiere mejorar su interfaz gráfica. Sin embargo, el 100 % coincidió en que logra su cometido: servir como apoyo a la teoría presentada.

Algunas de las recomendaciones de mejoras recibidas por parte de los estudiantes están:

- Opción para borrar contadores y analizadores.
- Botones que se utilizan con frecuencia.
- La presentación.
- No permite comparar dos sistemas distintos al mismo tiempo... se puede pero por separado.
- Compatibilidad con Android.
- Mejorar su ambiente gráfico.

Estos insumos pueden usarse para realizar mejoras al software (ya que es open-source) en el curso optativo de la maestría Tópicos Avanzados de Computación - MFS703.

4.6.2. Sobre el libro innovador de D. McIntyre

El libro de David McIntyre fue elegido como libro principal para el módulo (ver tabla 3.2). La mayor parte de los estudiantes (13/14) consideraron claridad en la teoría expuesta; 11/14, consideraron ejemplos muy bien explicados y 6/14 amplia cantidad de ejercicios.

Algunas recomendaciones recibidas son: incluir respuestas, traducción del libro al español.

El idioma parece ser un problema, ya que el libro usado está disponible solo en inglés: para el 50 % supone algún problema, a 28.6 % les genera bastantes problemas y esto es indistinto para el 21 %.

4.6.3. Percepción de los laboratorios presentados

La mayor parte de los estudiantes (13/14) considera los laboratorios presentados (3) tuvieron un buen nivel acorde a la teoría presentada, pero no están lo suficientemente claros. 13/14 estudiantes opinaron que sirven como soporte a la teoría presentada, que es lo que se requiere principalmente. A continuación algunas sugerencias de los alumnos:

- TIPS del instructor son importantes. Apoyo con el idioma.
- Mejor claridad y hints.

En cuanto a la sugerencia del idioma, el autor de la tesis ofrece una versión traducida de la aplicación y de los laboratorios originales de OSU.

4.6.4. Sobre la modalidad

100 % de los alumnos prefirieron la modalidad del módulo 2: modalidad semipresencial. Se realizaban actividades colaborativas en clase, pero también trabajos, recursos y apoyo en línea con Open edX (b-learning). Quedaron cortos en cantidad de temas en la clase MFS614, comentaron.

4.6.5. Comparación con módulo 2: 8.05.1x del MIT

Según descrito con anterioridad, ambos módulos 1 y 2 del curso MS614 presentaron sistemas de espín $1/2$ para mejorar la comprensión de la mecánica cuántica; sin embargo, el módulo 1 utilizó experimentos mentales (gedankenexperiment), mientras que el módulo 2 fue potenciado con experimentos con simulador SPINS y laboratorios. A la pregunta siguiente:

En el curso del MIT se abordó el tema de Sistemas de Espín $1/2$ en la Semana 2. ¿Considera que el enfoque usado en este módulo con software SPINS fue mejor, peor, o similar? ¿Por qué?

Las respuestas de los estudiantes fueron:

“Fue mucho mejor, ya que se me facilitó más la comprensión de estos sistemas a través del software.”

“Similar, muy bueno”

“Fue mejor, fue un aprendizaje mas práctico, con ejemplos mas específicos”

“Similar, pero sirvió para afianzar los conocimientos”

“Son enfoques diferentes, ya que en MIT se dedicaron a la solución de problemas y se dejó por un lado la parte experimental.”

“El software ayudó bastante al entendimiento, ya que muestra los resultados de Experimento S-G.”

“Este enfoque fue mejor ya que existió ayuda visual del experimento que lleva al desarrollo de la teoría.”

“Fue mejor, me gustó mucho y me facilitó encontrar la probabilidad”

“Fue mejor, más claro”

“Fue mucho mejor, ya que con el software nos permitía entender los conceptos de forma práctica.”

“Mejor, facilita mayor la comprensión de la teoría.”

“Sí fue mejor, por la simulación y forma de abordar.”

“Fue mejor, el por que se verifica la parte teorica.”

“Similar pero con metodologías muy diferentes.”

4.6.6. **Apreciación de la intervención educativa**

Las respuestas siguientes deben ser consideradas de importancia mayor en cuanto a la percepción del estudiante con su aprendizaje; o sea, la valoración de la metacognición y epistemología propia. A la pregunta siguiente:

¿Considera que el módulo 2 del curso de MFS614: Sistemas de Espín 1/2 orientado de forma práctica, ayudó al fortalecimiento de su conocimiento de la Mecánica Cuántica? ¿Por qué?,

Sus respuestas fueron las siguientes:

“Por supuesto que sí, ya que a través de los experimentos con el simulador pudo entenderse mejor la parte teórica que habíamos visto en clase.”

“No solo fortaleció, si no que aclaro muchas de las cosas que no se comprendían de forma clara en el curso de edX.”

“Por medio de la experimentación se pudo entender la aleatoriedad de la mecánica cuántica.”

“Sí, porque con ello visualizamos de mejor manera los principios de la Mecánica Cuántica.”

“Sí, el tema tratado fue de mucha utilidad, porque en el pregrado se estudia ligeramente.”

“Claro, porque el uso de Bra y ket no suele ser claro y lo de la probabilidad excelente.”

“A veces sí, me despejó algunas dudas pero me introdujo otras que tengo sin resolver.”

“Claro que sí, entendimos mejor el capítulo 1 y 2 del libro David H. McIntyre.”

“Sí, porque sirve de complemento indispensable para el desarrollo del módulo.”

“Se complementa los resultados teóricos con los resultados experimentales.”

“Sí, porque que en el curso anterior algunos conceptos no estaban claros.”

“Sí, ayudó a mejorar el entendimiento de la Mecánica Cuántica.”

“Esclarece la parte teórica.”

“Sí, aprendí otro enfoque.”

Así, la totalidad de los estudiantes consideró que el módulo 2 fortaleció sus conocimientos en Mecánica Cuántica, principalmente porque involucra experimentación. Según su percepción, el instructor también fue un factor importante para el éxito de su aprendizaje. Además, el 80 % consideró que este enfoque fue superior que el meramente teórico del MIT, mientras que un 20 % opina fue similar, salvo que en el MIT no hubo parte experimental. El 100 % de los alumnos indicó que prefiere la modalidad semi-presencial (b-learning) con recursos y apoyo en línea mediante Open edX.

4.6.7. Evaluación de los aprendizajes

Se realizó una evaluación especial final en el aula virtual de Open edX, para conocer la viabilidad de la metodología y herramientas utilizadas para lograr el aprendizaje de los alumnos, preparada en base a conceptos usualmente difíciles de comprender (ver Apéndice C).

La evaluación tomó como base dificultades percibidas a lo largo del módulo y las reportadas por la Universidad de Pittsburgh [18]. El examen consistió en diez preguntas conceptuales rigurosas, cuidadosamente elaboradas, y tres problemas complejos. Cada ítem persigue objetivos específicos definidos a manera de cubrir todo el contenido propuesto. Los estudiantes podían hacer uso de SPINS para verificar sus soluciones, cuando aplicaba. La evaluación de muestra en el apéndice D.

Los resultados son alentadores: el promedio obtenido fue del 96 % en contraste con el 75 % para el curso módulo 1 del MIT. Sus procedimientos (lápiz y papel) muestran que sus notas no fueron casualidad, sino que realmente aprendieron lo esperado a través de las innovaciones incorporadas en el módulo 2.

4.7. Análisis de resultados

Los resultados obtenidos descritos en secciones anteriores, sugieren que el aprendizaje de la mecánica cuántica mejora con el enfoque de Spin-First potenciado con experimentación virtual y otros elementos innovadores. Esta metodología debe ser considerada para su incorporación a nivel de pregrado, ya sea como primer acercamiento a la mecánica cuántica, posterior al estudio de la mecánica ondulatoria, o bien como complemento experimental a los cursos actuales mediante la inclusión de laboratorios virtuales, según se sugiere en la sección 3.6.

Las preferencias de los estudiantes se inclinan hacia aprendizaje b-learning con experimentación virtual en comparación con enfoques meramente teóricos en modalidad e-learning. La interacción en clase, entre los propios estudiantes e instructor, fue posible gracias al de la maestría, aula equipada con mobiliario necesario para presentar multimedia, acorde al modelo de “aula del siglo XXI”.

Open edX resulta una plataforma afin para el 86 % para uso b-learning. Su simplicidad es un factor predominante pero podría quedarse corta (al momento) para uso de e-learning. En relación a los videos educativos subidos al aula de Open edX, resultaron ser muy pocos (2) para los estudiantes.

El software SPINS para la simulación de experimentos de Stern-Gerlach es una herramienta valiosa para complementar el enfoque de Spin-First; sin embargo, existen oportunidades de mejora en aspectos relacionados con su interfaz gráfica e interacción que pueden ser abordadas en el curso optativo de la maestría Tópicos Avanzados de Computación - MFS703.

En cuanto a los recursos pedagógicos innovadores como el libro de David McIntyre, cuyo enfoque fue descrito en la tabla 3.2, los alumnos consideran la teoría está bien desarrollada, pero requiere mayor cantidad de ejercicios propuestos y ejemplos. Los laboratorios presentados para complementar la teoría probabilística y comprensión del enfoque Spin-First parecen estar más allá del *desajuste óptimo* y necesitan mayor apoyo del instructor que el esperado; por ello, la gran mayoría de los alumnos mencionaron que requieren más

ayuda, tips o hints, como los brindados oportunamente por el instructor.

La evaluación final aplicada a los estudiantes mostró una sólida comprensión de los alumnos hacia los conceptos fundamentales y formalismo de los temas de la Física Cuántica abordados en el módulo 2. Es importante hacer notar que los estudiantes podían ellos mismos confirmar sus respuestas con experimentación para muchas de las preguntas, reduciendo así el estrés común al cual están sujetos en exámenes tradicionales.

Esta experiencia de innovación educativa estimula a que se sigan realizando intervenciones pedagógicas innovadoras con sus respectivas valoraciones del impacto en los aprendizajes, tanto a nivel de pregrado como posgrado, para las diferentes asignaturas que sirve la Escuela de Física.

Es importante continuar con investigaciones en el ámbito de la educación de la física y en particular, se debe contrastar resultados obtenidos contra un módulo o curso tradicional.

Este estudio exploratorio sugiere que los estudiantes pueden llegar a comprender mejor la mecánica cuántica con diseños instruccionales como el propuesto, y no queda duda del nivel de satisfacción elevado en su experiencia de aprendizaje.

Capítulo 5

Conclusiones finales

5.1. Conclusiones finales y consideraciones futuras

5.1.1. Revisión teórica del experimento

En esta tesis se realizó una completa revisión del experimento de Stern-Gerlach desde los enfoques de la física clásica, semiclásica de la época del experimento y de la física moderna. Analizarlo con varios modelos permite al lector, instructores o estudiantes, tener una idea clara de las limitaciones y nuevos alcances de las diferentes teorías desarrolladas a lo largo de la historia de la física. Se evidencia existe suficiente material pedagógico para guiar a los alumnos la carrera de Física de la UNAH en la transición de la física clásica hacia la mecánica cuántica basado en el diseño curricular actual, con miras a la mecánica cuántica relativista y cromodinámica cuántica, usando en el enfoque conocido como Spin-First. Se ofrece material didáctico que se puede usar libremente en la UNAH para tal fin.

5.1.2. Comprensión de la mecánica cuántica y el enfoque Spin-First

Investigaciones de las últimas tres décadas documentan problemas en la comprensión conceptual de la mecánica cuántica en el ámbito nacional e internacional, a nivel pregrado y posgrado, lo cual justifica el desarrollo de nuevas herramientas y enfoques basados en investigación y su aplicación en asignaturas relacionadas, a pesar de las barreras actuales por parte de profesorado universitario. El tratamiento Spin-First es uno de tales enfoques, descrito en el capítulo 3 de este documento, el cual está basado en literatura desarrollada por Feynman, Sakurai, Cohen, Townsend y McIntyre. En la discusión del enfoque presento además material didáctico suficiente para su uso y entendimiento por parte de instructores y estudiantes.

Escasa literatura existe en la actualidad sobre investigaciones en la educación de la física cuántica usando el enfoque Spin-First, haciendo notable la necesidad de investigaciones educativas usando esta metodología. El estudio exploratorio realizado a través de la intervención presentada en el capítulo 4 de esta tesis pretende servir como punta de lanza para futuras investigaciones usando configuraciones experimentales que arrojen resultados más cuantitativos y generalizables. Los resultados obtenidos, sin embargo, son prometedores y pueden servir como referencia en la toma de decisiones para un diseño instruccional efectivo. Se realizan propuestas para uso del enfoque a nivel pregrado y posgrado en la UNAH, discutiendo las ventajas y desventajas de cada una. La percepción general de los autores es que la mayor eficacia del enfoque se logra después de presentar la mecánica ondulatoria en algún grado.

5.1.3. Intervención educativa usando el Enfoque Spin First con elementos innovadores

Se diseñó un módulo en el curso de Física Cuántica de Posgrado MFS614 con elementos innovadores y basados en investigación. Innovadores en cuanto al enfoque temático y pedagógico utilizado, así como en el uso de herramientas computacionales como Open

edX y el software SPINS. Uno de los objetivos principales del diseño, el de conseguir que el estudiante se involucrará activamente en su aprendizaje, se logró. Esto se confirma en sus retroalimentaciones de encuesta y evaluación especial.

Los resultados obtenidos sugieren que el aprendizaje de la mecánica cuántica mejora con el enfoque incorporado en base a Spin-First. Estos elementos deben ser considerados para su incorporación a nivel de pregrado, ya sea como primer acercamiento a la mecánica cuántica, posterior al estudio de la mecánica ondulatoria, o bien como complemento experimental a los cursos actuales mediante la inclusión de laboratorios virtuales, según se sugiere en la sección 3.6.

Además, el enfoque puede afianzar la comprensión de la mecánica cuántica a nivel de posgrado, ya que según la revisión de estudios previos, los graduados de física también tienen conceptos errados del formalismo de la mecánica cuántica. Una posible explicación para ello es la carga cognitiva elevada en sus cursos tradicionales de mecánica cuántica, imposibilitando así un aprendizaje general de los conceptos fundamentales de la materia.

Se sugiere también portar el software SPINS a lenguajes más convenientes, ágiles y multiplataforma como Python, y realizar mejoras en la interfaz del programa. Esto puede proponerse en el curso “Tópicos Avanzados de Computación - MFS703” de la maestría en física de la UNAH .

Se concluye de la intervención educativa a través de la encuesta de opinión que las preferencias de los estudiantes se inclinan hacia aprendizaje b-learning (semi-presencial) con experimentación virtual en lugar de enfoques meramente teóricos, como el ofrecido por el curso 8.05.1x del MIT. El LMS Open-edX es una buena alternativa para montar cursos en b-learning dada su simplicidad y claridad gráfica. Un espacio físico que siga el modelo del “aula del siglo XXI” es necesario para lograr que métodos como *instrucción entre pares* y, en general, técnicas aprendizaje activo, se apliquen y funcionen apropiadamente.

De la evaluación final aplicada a los estudiantes en base a investigación, los estudiantes mostraron una sólida comprensión en los conceptos fundamentales y formalismo de los temas abordados de la física cuántica (sistemas de espín 1 y 1/2, postulados, formalismo matemático, interpretación probabilística, operadores y medición, superposición e interfe-

rencia, principio de incertidumbre). Esto, a su vez, sienta las bases para una transición hacia la mecánica ondulatoria, con la cual podrán realizar las conexiones necesarias para comprender que el formalismo aprendido aplica también para espacios infinitos de Hilbert.

Esta experiencia de innovación educativa estimula a que se sigan realizando intervenciones pedagógicas innovadoras con sus respectivas valoraciones del impacto en los aprendizajes, tanto a nivel de pregrado como posgrado, para las diferentes asignaturas que sirve la Escuela de Física. Un diseño experimental que involucre un grupo de control (enfoque tradicional) vs. un grupo instruido con un enfoque innovador es deseado a continuación para medir cuantitativamente el impacto a través de evaluaciones o instrumentos especiales. El estudio exploratorio, sin embargo, sugiere que los estudiantes pueden llegar a comprender mejor la mecánica cuántica con diseños instruccionales como el propuesto, y no queda duda el nivel de satisfacción en su experiencia de aprendizaje fue elevado.

Bibliografía

- [1] U. Merari Turcios. *Explorando la comprensión conceptual de la Mecánica Cuántica en estudiantes de pregrado de la carrera de Física de la UNAH* [Tesis de maestría]. Universidad Nacional Autónoma de Honduras, 2015.
- [2] B. Friedrich, D. Herschbach. *Stern and Gerlach: How a Bad Cigar Helped Reorient Atomic Physics*. Physics Today, 2003.
- [3] Departamento de Física, UNAH-CU. *Plan de Estudios 1993*. Libro de Registro de Planes de Estudio de la Secretaría General, 1993.
- [4] Comité Académico. *Plan de Estudios del Programa de Postgrado de Física en el Grado de Maestría*, 2003.
- [5] S. Bandyopadhyay, M. Cahay. *Introduction to Spintronics*. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2008.
- [6] G. Smith (Julio 25, 2022). *Electron spin g-factor*. Physics Stack Exchange. <https://physics.stackexchange.com/q/503163>
- [7] J. Schwinger. *On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron*. Physical Review Journals, 1948.
- [8] D.J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. Prentice Hall, 1ed edition, 161-164, 1994
- [9] J.J. Sakurai, Jim Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Pearson, 2ed edition, 2011.

-
- [10] I. D. Johnston, K. Crawford, P. R. Fletcher. *Student difficulties in learning quantum mechanics*. International Journal of Science Education, 1998.
- [11] A. G. Roldán. *Reseña Histórica del Departamento de Física de la UNAH*. Revista de la Escuela de Física, 2019.
- [12] R. Feynman. *The Character of Physical Law, chapter 6*. British Broadcasting Corp., 1965.
- [13] D. Styer. *Common misconceptions regarding quantum mechanics*. American Journal of Physics, 31-34, 1996.
- [14] G. Ireson. *The quantum understanding of pre-university physics students*. Physics Education, Volume 35, Number 1
- [15] C. Singh. *Student understanding of quantum mechanics*. American Journal of Physics: Volume 69, Issue 8, Pages 885-895, 2001
- [16] S. Caliskan, G. S. Selcuk and M. Erol. *Student Understanding of Some Quantum Physical Concepts*. Buca Education Faculty, Department of Physics Education, 2009
- [17] N. Didis, A. Eryilmaz and S. Erkok. *Student Understanding of Some Quantum Physical Concepts*. Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 2010
- [18] G. Zhu and C. Singh. *Surveying students' understanding of quantum mechanics in one spatial dimension*. American Journal of Physics, 2012
- [19] D.J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. Prentice Hall, 1ed edition, 1994
- [20] R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. L. Sands. *The Feynman lectures on Physics, Vol. III*. Addison-Wesley Pub. Co., 1963
- [21] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloe. *Quantum mechanics, Vol. I*. New York: Wiley, 1991

- [22] J.S. Townsend. *A Modern Approach to Quantum Mechanics*. New York: Wiley, 2000
- [23] D.H. McIntyre. *Quantum Mechanics: A Paradigms Approach*. Pearson, 2012
- [24] D.H. McIntyre. *Quantum Mechanics: A Paradigms Approach*. Pearson, pp. 1–96,107–184, 2012
- [25] F. Laloe. *Do we really understand quantum mechanics? Strange correlations, paradoxes, and theorems*. Am. J. Phys. 69, pp. 655–701, 2001
- [26] D.V. Schroeder. T.A. Moote. *A computer-simulated Stern-Gerlach laboratory*. American Association of Physics Teachers, 1993
- [27] B. Mason, E. Debowska, T. Arpornthip, R. Girwidz, T. Greczyło, A. Kohnle, T. Melder, M. Michelini and J. Silva. *Report and Recommendations on Multimedia Materials for Teaching and Learning Quantum Physics*. American Association of Physics Teachers, 2014
- [28] G. Zhu and C. Singh. *Improving students' understanding of quantum mechanics via the Stern–Gerlach experiment*. American Journal of Physics, 2010
- [29] H. R. Sadaghiani. *Spin First vs. Position First instructional approaches to teaching introductory quantum mechanics*. PERC Proceedings, American Association of Physics Teachers, 2016
- [30] J. M. Fraser, A. L. Timan, K. Miller, J. E. Dowd, Lm Tucker and E. Mazur. *Teaching and physics education research: bridging the gap*. Key Issues Review, 2014
- [31] J. Sweller. *Cognitive load during problem solving: Effects on learning*. Elsevier, Volume 12, Issue 2, 1988
- [32] J. Falk. *Students' depictions of quantum mechanics: a contemporary review and some implications..* Dissertation for the degree of Licentiate of Philosophy in Physics within the specialization Physics Education Research, 2007

- [33] David H. McIntyre, Janet Tate, and Corinne A. Manogue. *Integrating computational activities into the upper-level Paradigms in Physics curriculum at Oregon State University*. American Journal of Physics, 2008
- [34] R. R. Hake. *Interactive-engagement versus traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data for introductory physics courses*. American Journal of Physics, 1998
- [35] S. Pollock. (Julio 03, 2022) *Quantum I: course materials* Quantum I: course materials — Science Education Initiative — University of Colorado Boulder. <https://www.colorado.edu/sei/departments/physics/activities/courses/quantum-i-course-materials>
- [36] Universidad Nacional Autónoma de Honduras (Julio 15, 2022). *Dirección de Innovación Educativa*. <https://die.unah.edu.hn/sobre-nosotros/>
- [37] Cornell Department of Physics. (Julio 03, 2022). *Physics Education Research*. Physics Education Research — Department of Physics. <https://physics.cornell.edu/research/physics-education-research>
- [38] AAPT. (Julio 03, 2022). *Spins Package*. ComPADRE.org. <https://www.compadre.org/OSP/items/detail.cfm?ID=7329>
- [39] PhET. (Julio 03, 2022). *Stern-Gerlach Experiment*. PhET. <https://phet.colorado.edu/en/simulations/stern-gerlach>
- [40] Comisión de transición. *Plan general para la reforma integral de la universidad 2005*. Universidad Nacional Autónoma de Honduras, 2005
- [41] J. Piaget. Development and learning. R. Ripple and V. Rockcastle, (eds.), *Piaget Rediscovered*. New York: Cornell University Press, 1964
- [42] E. Raymond. *Cognitive Characteristics*. Needham Heights, MA: Allyn & Bacon, A Pearson Education Company, 2000

-
- [43] J. Bransford, D. Schwartz. Rethinking transfer: A simple proposal with multiple implications. A. Iran-Nejad and P. Pearson, (eds.), *Review of Research in Education*. Washington, D.C.: American Educational Research Association, 1999
- [44] E. Mazur. *Peer Instruction: A User's Manual*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997
- [45] Comisión de transición. *El modelo educativo de la UNAH*. Serie de publicaciones de la reforma universitaria No. 3, 2009
- [46] H. Simon. *How big is a memory chunk*. *Science*, 183(4124), 482-488, 1974
- [47] J. Metcalfe, Shimamura. *Metacognition: knowing about knowing*. Cambridge, MA: MIT Press, 1974

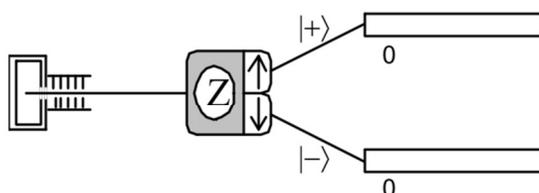
Apéndice A

Laboratorios virtuales propuestos usando SPINS

Medición Cuántica y Espín¹

SPINS Lab 1

1. Mide la proyección S_z del espín a lo largo del eje z. Este es el experimento que está listo para correr cuando se inicia el programa, como se muestra a continuación. Cada átomo se mide con su espín hacia arriba o su espín hacia abajo, indicado por las flechas y los símbolos $|+\rangle$ o $|-\rangle$ en la siguiente figura (vamos a explicar los símbolos en más detalle más adelante). Las proyecciones de espín medidos para estos casos son $S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$. Ejecutar el experimento seleccionando Do 1 (ctrl-1) en el menú de control, que envía un átomo a través del aparato. Haga esto varias veces para que pueda ver la inherente aleatoriedad en el proceso de medición. Pruebe a ejecutar el experimento continuamente (Go) y usando de los otros números fijos (10, 100, 1000, 10000).



2. De los experimentos anteriores y de lo que hemos dicho en clase, tendrás que conjeturar que la probabilidad para una medición de *espín-up* es $P = 1/2$, con la probabilidad para el *espín-down* siendo igual a $(1 - P) = 1/2$. ¿Cómo podemos estar seguros de esto? Haremos una serie de experimentos y examinaremos las estadísticas de los datos (véase el apéndice para obtener información acerca de las estadísticas). Reinicia el contadores y ejecuta el experimento 100 veces (Ctrl-3). En la tabla de datos anota el número de *espín-up* registrados por el detector de inicio. Repite esto 10 veces para llenar la tabla (el instructor ya ha hecho el caso de 10 átomos). Ahora utiliza estos números en tu calculadora y encuentra el promedio de x , \bar{x} , y la desviación estándar s de tus datos, y la desviación estándar de la media σ_m . A continuación, calcula la estimación experimental de la probabilidad P , su incertidumbre σ_p , y la incertidumbre relativa $\frac{\sigma_p}{P}$. Hazlo nuevamente para los casos de 1000 y 10.000 átomos.

- a. ¿Estás convencido de que $P = 1/2$? ¿Qué tan seguro estás?

Muy seguro, esa es la tendencia a medida se incrementa el número de átomos, aunque siempre existe cierta incertidumbre pero cada vez menor.

¹ Fuente: <http://physics.oregonstate.edu/portfolioswiki/texts:quantumbook:start>. Traducción libre con fines educativos de A. Euceda.

- b. ¿Cómo van a cambiar tus resultados si utilizas un número mayor para N?

Incrementar el número de mediciones se traduce en estar más seguros de los resultados como lo sugiere la ecuación $\sigma_m = \frac{s}{\sqrt{N}}$

- c. Para cualquiera de tus conjuntos de datos (correspondiente a un valor de M), lleva a cabo los cálculos estadísticos a mano y de forma explícita haz que aparezcan en tu reporte de laboratorio.

Lo haré para $M = 100$:

\bar{x}

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{1}{10} (47 + 47 + 48 + 53 + 54 + 42 + 48 + 56 + 44 + 49) = \boxed{48.8}$$

s

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{N}{N-1} \bar{x}^2}$$

Donde:

$$\sum_{i=1}^N x_i^2 = 47^2 + 47^2 + 48^2 + 53^2 + 54^2 + 42^2 + 48^2 + 56^2 + 44^2 + 49^2 = 23998$$

Sustituyendo en la expresión para s con $N = 10$ y $\bar{x} = 48.8$:

$$s = \sqrt{\frac{1}{10-1} (23998) - \frac{10}{10-1} (48.8)^2} = \boxed{4.39}$$

σ_m

$$\sigma_m = \frac{s}{\sqrt{N}} = \frac{4.39}{\sqrt{10}} = \boxed{1.39}$$

P

$$P = \frac{\bar{x}}{M} = \frac{48.8}{100} = \boxed{0.488}$$

σ_P

$$\sigma_P = \frac{\sigma_m}{M} = \frac{1.39}{100} = \boxed{0.0139}$$

$\frac{\sigma_P}{P}$

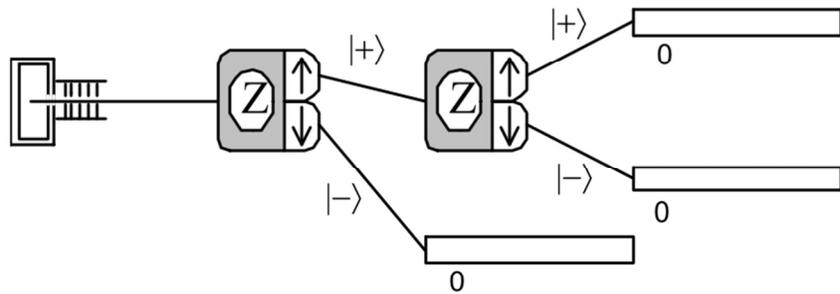
$$\frac{\sigma_P}{P} = \frac{0.0139}{0.488} = \boxed{0.028}$$

De forma similar para $M = 1000$ y $M = 10000$.

Resumiendo:

No. De átomos (N)	10	100	1000	10000
Data (N=10)	7	47	503	5032
	5	47	501	4992
	5	48	476	4955
	8	53	492	5019
	5	54	516	4988
	4	42	516	4939
	8	48	496	5065
	2	56	497	5012
	7	44	538	5026
	8	49	511	5076
\bar{x}	5.90	48.8	504.6	5010.4
s	2.02	4.39	16.8	43.56
σ_m	0.64	1.39	5.31	13.78
P	0.590	0.488	0.5046	0.501
σ_P	0.064	0.0139	0.00531	0.001378
$\frac{\sigma_P}{P}$	0.11	0.028	0.011	0.0028

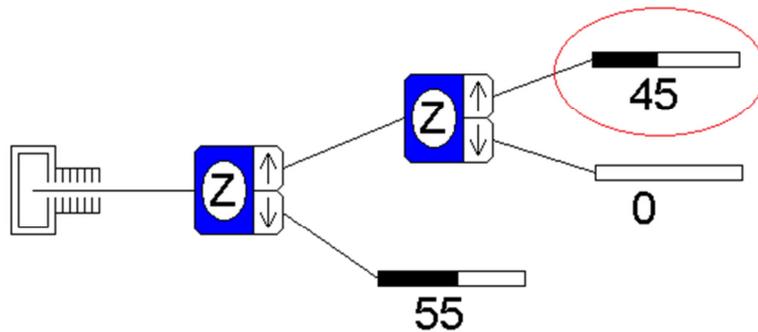
- Ahora configura un experimento para medir la proyección del espín a lo largo del eje z dos veces en sucesión como se muestra a continuación en la figura. Necesitas un analizador extra y otro contador (Como ayuda vea las notas del SPINS). Ejecuta el experimento y observa los resultados.



Enfoca tu atención en el segundo analizador. El *estado de la entrada* (input state) se denota $|+\rangle$ y hay dos posibles *estados de salida* $|+\rangle$ y $|-\rangle$.

- a. ¿Cuál es la probabilidad de que un átomo que entra al *segundo analizador* (estado $|in\rangle = |+\rangle$) salga por el puerto del espín up del *segundo analizador*?

La probabilidad de que esto suceda es 100%, por ejemplo para $M = 100$:



Matemáticamente:

$$P_+ = |\langle + | + \rangle|^2 = 1$$

Esta probabilidad se denota en general como $P(out) = |\langle out | in \rangle|^2$, y en este caso específico $P(+)= |\langle out | in \rangle|^2 = |\langle + | - \rangle|^2$. Aquí estamos calculando el producto interno ("proyección") de los *estados de entrada y salida*, y luego encontramos el *módulo al cuadrado* de la misma.

- b. ¿Cuál es la probabilidad que tiene este átomo de salir del puerto de espín hacia abajo (spin down) (estado $|-\rangle$)?

La probabilidad de que esto suceda es 0, tal como lo muestra la figura anterior. Esto es:

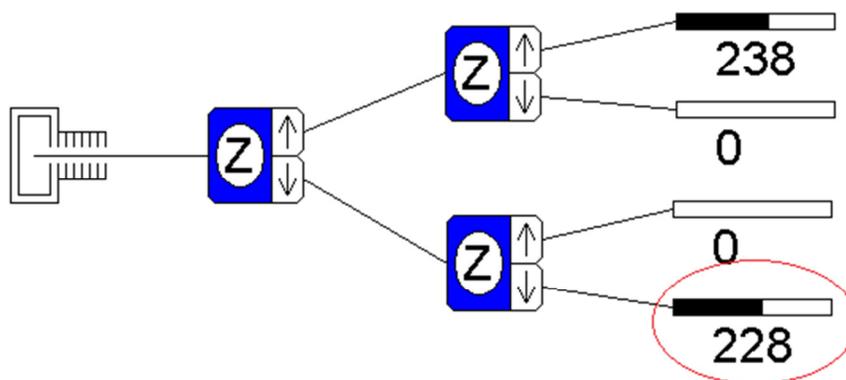
$$P_- = |\langle - | + \rangle|^2 = 0$$

c. ¿Qué conclusiones puedes extraer de las mediciones realizadas en este experimento?

Si la entrada es *spin up*, $|+\rangle$, la única posibilidad es encontrarlo en el puerto *spin up* del segundo analizador. Similarmente si la entrada fuese el estado *spin down*, $|-\rangle$, habría un 100% de probabilidad de encontrarlo en el puerto *spin down* del segundo analizador.

d. ¿Cómo se puede poner a prueba tus conclusiones? Pruébalo y explica tus resultados, y muestra cómo apoyan tu conclusión.

Puedo probar lo anterior poniendo otro analizador abajo que tenga como entrada el estado $|-\rangle$ y verificando que la única posibilidad es encontrar los átomos en el puerto *spin down* de ese analizador:



e. ¿Qué conclusiones puedes sacar acerca de la ortogonalidad de los estados $|+\rangle$ y $|-\rangle$?, ¿Es esto lo que se espera?

Según estos resultados los estados $|+\rangle$ y $|-\rangle$ son ortogonales, $\langle + | - \rangle = \langle - | + \rangle = 0$, y están normalizados, $\langle + | + \rangle = \langle - | - \rangle = 1$.

De la teoría, esto es lo esperado.

4. Utilizando el mismo aparato que el anterior (nº 3), cambiar las direcciones de orientación de los analizadores. Puedes elegir las direcciones X, Y o Z, que están orientadas a lo largo de los ejes XYZ-usuales de un sistema de coordenadas cartesianas (ignorar la cuarta \hat{n} dirección por ahora). Cuando una dirección distinta de Z se elige, utilizamos un subíndice para distinguir los estados de salida (por ejemplo, $|-\rangle_y$). Si nos permitimos usar también el puerto de espín hacia abajo del primer analizador como entrada para el segundo analizador (no hacia arriba y hacia abajo al mismo tiempo), entonces hay seis estados posibles de entrada y seis posibles estados de salida para el segundo analizador, que se enumeran en la tabla siguiente. Tu tarea consiste en medir las probabilidades $P_{out} = |\langle out | in \rangle|^2$ correspondientes a estos estados de entrada y de salida.

Recuerda que esta es la probabilidad de que un átomo que sale del primer analizador también pase a través del segundo analizador hacia el detector apropiado, y no la probabilidad total para el trayecto desde el horno al detector. El experimento llevado a cabo en el punto 3 anterior (con ambos analizadores a lo largo del eje z) dio el resultado $|\langle +|+\rangle|^2 = 1$, que ya se ha introducido en la tabla. Ahora debes hacer todas las demás combinaciones posibles y rellena el resto de la mesa.

Esto fue lo obtenido a partir del simulador, acorde a la teoría:

$ \langle out in\rangle ^2$	$ +\rangle$	$ -\rangle$	$ +\rangle_x$	$ -\rangle_x$	$ +\rangle_y$	$ -\rangle_y$
$\langle + $	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\langle - $	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
${}_x\langle + $	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
${}_x\langle - $	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
${}_y\langle + $	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
${}_y\langle - $	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1

Medición Cuántica y Espín¹

SPINS Lab 2

1. Inicia la aplicación SPINS y escoge del menú `Initialize` la opción `Unknown #1`. Esto causa que los átomos dejen el horno en un estado cuántico definido, el cual llamaremos $|\psi_1\rangle$. Ahora mida las seis probabilidades $|\langle\phi|\psi_1\rangle|^2$, donde $|\phi\rangle$ corresponde al espín hacia arriba o abajo a lo largo de los tres ejes. Llenar la tabla para $|\psi_1\rangle$ en la hoja de trabajo. Utiliza los resultados para encontrar $|\psi_1\rangle$, usando el siguiente procedimiento (aunque parecerá obvio cuál es el estado para los primeros casos, sigue el procedimiento como práctica para los casos subsiguientes de mayor dificultad):

- i. Suponga que deseamos escribir el vector de estado en términos de la base $|\pm\rangle$, esto es $|\psi_1\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$, donde a y b son coeficientes complejos. Debemos entonces utilizar los datos para encontrar los valores de a y b .
- ii. Usa las probabilidades medidas de espín hacia arriba y abajo a lo largo del eje z primeramente. Esto te permitirá determinar las magnitudes a y b . Debido a que la fase general del vector de estado no tiene significado físico, seguimos la convención de que el coeficiente de $|+\rangle$ (i.e. a) se escoge como real y positivo. Si escribimos $b = |b|e^{i\phi}$, entonces habrás determinado todo excepto la fase ϕ .
- iii. Usa las probabilidades medidas de espín hacia arriba y hacia abajo a lo largo del eje x para proveer información sobre la fase de b . En algunos casos, esto no será ambiguo, en otros no.
- iv. Si se requiere, utiliza las probabilidades para espín hacia arriba y hacia abajo a lo largo del eje y .
- v. Confirma tus resultados ingresando los coeficientes que calculaste en la tabla de `User State` y corriendo el experimento.

¹ Fuente: <http://physics.oregonstate.edu/portfolioswiki/texts:quantumbook:start>. Traducción libre con fines

Repite este ejercicio para Unknown #2 ($|\psi_2\rangle$), Unknown #3 ($|\psi_3\rangle$), y Unknown #4 ($|\psi_4\rangle$). Diseña un experimento para verificar tus resultados. (Hint: Recuerda que el vector de estado general de espín-1/2 puede escribirse como $|+\rangle_n = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}|-\rangle$). (Nota que este es el Problema 1.17 del libro de texto).

Tips

Como ejemplo, trabajaré con el Unknown #2 ($|\psi_2\rangle$), siguiendo la metodología descrita arriba:

Las probabilidades medidas son:

$$P_+ = \frac{1}{2} \quad P_{+x} = \frac{1}{2} \quad P_{+y} = 0$$

$$P_- = \frac{1}{2} \quad P_{-x} = \frac{1}{2} \quad P_{-y} = 1$$

Deseamos conocer el estado en la base $|\pm\rangle$:

$$|\psi_2\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$$

Recuerden que a y b son complejos, podríamos suponer que en general tiene la forma:

$$\begin{aligned} a &= |a|e^{i\alpha} \\ b &= |b|e^{i\beta} \end{aligned}$$

Pero en realidad es innecesario trabajar con dos fases, una para cada complejo, ya que la fase general de un estado no cambia la probabilidad de obtener los resultados en mediciones. Esto lo recalqué en Problema #3 la tarea, además hice referencia al Problema 1.3 del Libro de McIntyre. Vale la pena recordar abordar nuevamente el ejercicio:

Inicio Problema 1.3#####

Consideremos un estado $|\psi\rangle$, con coeficientes a y b dados arriba. La probabilidad de medir a_n en estado $|\psi\rangle$ es:

$$P_{a_n} = |\langle a_n | \psi \rangle|^2$$

Ahora, si multiplicamos el estado por una fase $e^{i\delta}$ (magnitud 1), esto es $e^{i\delta}|\psi\rangle$, la nueva probabilidad será la misma:

$$\begin{aligned} P_{a_n, N} &= |\langle a_n | e^{i\delta} \psi \rangle|^2 \\ &= |e^{i\delta} \langle a_n | \psi \rangle|^2 \\ &= |\langle a_n | \psi \rangle|^2 \end{aligned}$$

De tal forma confirmamos que un cambio en la fase general del vector de estado no cambia físicamente nada.

Fin Problema 1.3#####

Volviendo a nuestro problema, y aprovechando el resultado anterior, puedo entonces multiplicar $|\psi_2\rangle$ por $e^{-i\alpha}$ sin alterar nada y reducir el número de incógnitas de 4 (a, b, α y β) a 3 ($a, b, y \phi$), como sigue:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |a|e^{i\alpha}|+\rangle + |b|e^{i\beta}|-\rangle \\ |\psi\rangle &= e^{-i\alpha} [e^{i\alpha}|+\rangle + |b|e^{i\beta}|-\rangle] \\ |\psi\rangle &= |a||+\rangle + |b|e^{i(\beta-\alpha)}|-\rangle \end{aligned}$$

O bien:

$$\boxed{|\psi\rangle = |a||+\rangle + |b|e^{i\phi}|-\rangle}$$

Haciendo uso de Postulado #4 de la MC, e igualando a los resultados experimentales obtenemos las normas de a y b :

$$\begin{aligned} P_+ &= |\langle + | \psi_2 \rangle|^2 = |\langle + | \{a|+\rangle + b|-\rangle\}|^2 = |a|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ P_- &= |\langle - | \psi_2 \rangle|^2 = |\langle - | \{a|+\rangle + b|-\rangle\}|^2 = |b|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \end{aligned}$$

Sin embargo, como notamos, las mediciones en z no son suficientes para determinar todas las incógnitas, necesitamos considerar ahora las mediciones en x para intentar encontrar la fase ϕ :

$$\begin{aligned} P_{+x} &= |{}_x\langle + | \psi_2 \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \langle + | + \rangle + \langle + | - \rangle \right\} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ a|+\rangle + e^{i\phi} b|-\rangle \right\} \right|^2 = \left| \frac{1}{2} \left\{ 1 + e^{i\phi} \right\} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left\{ 1 + e^{i\phi} \right\} \left\{ 1 + e^{-i\phi} \right\} = \frac{1}{4} \left\{ 1 + 1 + e^{i\phi} + e^{-i\phi} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \phi \right\} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Así que:

$$\cos \phi = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \text{ o } \frac{3\pi}{2}$$

Ahora, cuando el autor menciona “ambigüedad” se refiere a esto: tenemos dos posibles fases, ¿cuál de los dos fases es la correcta? Para ello tenemos que utilizar los resultados en la dirección en y. Similarmente:

$$\begin{aligned} P_{+y} &= \left| \langle + | \psi_2 \rangle \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \langle + | - i \langle - | \right\} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ | + \rangle + e^{i\phi} | - \rangle \right\} \right|^2 = \left| \frac{1}{2} \left\{ 1 - ie^{i\phi} \right\} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left\{ 1 - ie^{i\phi} \right\} \left\{ 1 + ie^{-i\phi} \right\} = \frac{1}{4} \left\{ 1 + 1 - ie^{i\phi} + ie^{-i\phi} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sin \phi \right\} = 0 \end{aligned}$$

O sea:

$$\sin \phi = -1 \Rightarrow \phi = \frac{3\pi}{2}$$

Por tanto, la fase de b **debe** ser $\phi = \frac{3\pi}{2}$

Finalmente, el estado Unknown #2 es:

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(| + \rangle + e^{i\frac{3\pi}{2}} | - \rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(| + \rangle - i | - \rangle \right) = | - \rangle_y$$

Las probabilidades teóricas son:

$$\begin{aligned} P_+ &= \left| \langle + | \psi_2 \rangle \right|^2 = \left| \langle + | \frac{1}{\sqrt{2}} \left(| + \rangle - i | - \rangle \right) \right|^2 = \frac{1}{2} \\ P_- &= \left| \langle - | \psi_2 \rangle \right|^2 = \left| \langle - | \frac{1}{\sqrt{2}} \left(| + \rangle - i | - \rangle \right) \right|^2 = \frac{1}{2} \\ P_{+x} &= \left| \langle + | \psi_2 \rangle \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle + | + \langle - | \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(| + \rangle - i | - \rangle \right) \right|^2 = \frac{1}{2} \\ P_{-x} &= \left| \langle - | \psi_2 \rangle \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle + | - \langle - | \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(| + \rangle - i | - \rangle \right) \right|^2 = \frac{1}{2} \\ P_{+y} &= \left| \langle + | \psi_2 \rangle \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle + | - i \langle - | \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(| + \rangle - i | - \rangle \right) \right|^2 = 0 \\ P_{-y} &= \left| \langle - | \psi_2 \rangle \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle + | + i \langle - | \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(| + \rangle - i | - \rangle \right) \right|^2 = 1 \end{aligned}$$

Las cuales coinciden con lo obtenido experimentalmente. Hacer exactamente lo mismo para los demás estados. Note que puede confirmar sus resultados experimentalmente con la opción User State, corriendo el experimento y observando si las probabilidades obtenidas son las mismas.

Para que confirmen sus respuestas, les facilito las probabilidades y estados que obtuve:

Unknown #1

$$P_+ = 1 \quad P_{+x} = \frac{1}{2} \quad P_{+y} = \frac{1}{2}$$

$$P_- = 0 \quad P_{-x} = \frac{1}{2} \quad P_{-y} = \frac{1}{2}$$

$$|\psi_1\rangle = |+\rangle$$

Unknown #3

$$P_+ = \frac{1}{2} \quad P_{+x} = \frac{1}{4} \quad P_{+y} = 0.067$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle + e^{i\frac{4\pi}{3}} |-\rangle \right) = |+\rangle_{\hat{n}(\theta=\frac{\pi}{2}, \phi=\frac{4\pi}{3})}$$

Noten que se la última forma la he puesto acorde a los estados generales para espín $1/2$, los cuales pueden escribirse como (reparar sección 2.2.1):

$$|+\rangle_n = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}|-\rangle$$

$$|-\rangle_n = \sin\frac{\theta}{2}|+\rangle - \cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi}|-\rangle$$

El objetivo de ponerlo de esta última forma es que confirmes tus respuestas con un analizador en dirección arbitraria, cambiando los ángulos.

Unknown #4

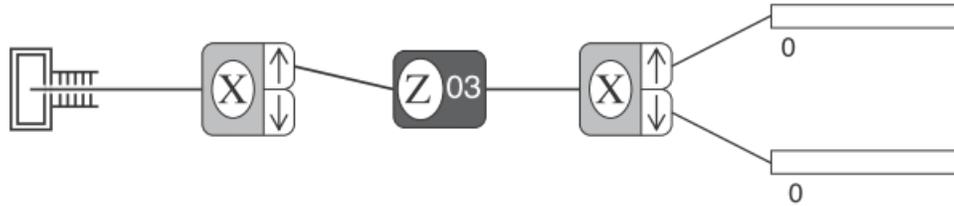
$$P_+ = \frac{1}{4} \quad P_{+x} = \frac{7}{8} \quad P_{+y} = 0.283$$

$$P_- = \frac{3}{4} \quad P_{-x} = \frac{1}{8} \quad P_{-y} = 0.717$$

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{2}|+\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{11\pi}{6}}|-\rangle = \cos\frac{\pi}{3}|+\rangle + \sin\frac{\pi}{3}e^{i\frac{11\pi}{6}}|-\rangle = |+\rangle_{\hat{n}(\theta=\frac{2\pi}{3}, \phi=\frac{11\pi}{6})}$$

Fin de Tips

2. Has un nuevo estado desconocido utilizando la siguiente configuración con un imán entre dos analizadores de Stern Gerlach:



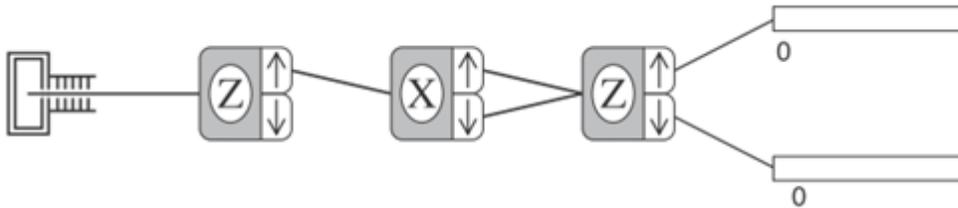
Por ahora, considera el imán como una caja negra que transforma el estado de entrada $|+\rangle_x$ en un nuevo estado $|\psi\rangle$. Utilice `Random` como el estado inicial y ajuste la intensidad del imán a un número entre 1-20 correspondiente a la posición de su computadora en el laboratorio (*en nuestro caso pueden utilizar cualquier número*). Utiliza el último analizador para medir las probabilidades de que el estado $|\psi\rangle$ tenga las seis posibles proyecciones de espín a lo largo de los ejes. Mantenga el analizador de Stern-Gerlach y el imán de en medio como orientado como en la figura. Llena la tabla en la hoja de trabajo y deduzca el estado $|\psi\rangle$, en términos de la base $|\pm\rangle$. Diseñe un experimento para verificar sus resultados. A partir de los resultados de toda la clase, ¿puede decir que hace el imán?

Tips

Este experimento no tiene otro objetivo más que reforzar el procedimiento utilizado en 1), solo que en este caso el estado desconocido lo dá el imán, ya que cambia el estado de entrada. Sin embargo, vale la pena mencionar que el imán “rota” el estado algunos grados, lo cual no es de nuestro interés actualmente. Claro está dependiendo del valor de intensidad dada obtendrán diferentes estados.

Fin de Tips

3. Has un interferómetro (*nota el nombre dados los términos de interferencia que encontramos en clase, ver ecuación 2.70*) como el mostrado:



Usa Random como el estado inicial. Mida las probabilidades relativas para espín hacia arriba y espín hacia abajo después del primer analizador de SG. Hacer esto para los tres casos: (1) se usa el haz de espín hacia arriba del analizador de en medio, (2) se usa el haz de espín hacia abajo del analizador de en medio, y (3) ambos haces del analizador de en medio se usan, (como lo muestra la figura). Escribir sus resultados experimentales en la tabla de la hoja de trabajo. Repetir para el caso en que el estado espín hacia abajo se usa del primer dispositivo de SG.

Ahora calcule las probabilidades teóricas esperadas y llene la parte de teoría de la hoja de trabajo. Cuando ambos haces se utilizan del analizador de en medio, el estado de entrada al último dispositivo SG (llámese $|\psi\rangle$) es una combinación (superposición) de los estados espín up y espín down con respecto al eje del analizador de SG de en medio. Para calcular $|\psi\rangle$ apropiadamente, utilice el postulado de proyección (5to postulado), el cual establece que el ket después de la medición es la proyección normalizada en el subespacio correspondiente a los resultados medidos. Para el caso en el que ambos resultados espín hacia arriba y hacia abajo se obtienen (porque ambos haces se envían al siguiente dispositivo), el operador de proyección es $P = |+\rangle_{xx}\langle+| + |-\rangle_{xx}\langle-|$. Por ejemplo, para el caso en el que la entrada al analizador de en medio es $|+\rangle$, la operación de proyección conlleva a:

$$P|+\rangle = |+\rangle_{xx}\langle+|+\rangle + |-\rangle_{xx}\langle-|+\rangle = {}_x\langle+|+\rangle|+\rangle_x + {}_x\langle-|+\rangle|-\rangle_x$$

Para encontrar $|\psi\rangle$, simplemente normalice este nuevo ket.

Tips

Este experimento de hecho lo analizamos en clase, lo que se pretende es realizar los cálculos teóricos con operadores de proyección. Favor repasar sección 2.2.4. Para la configuración mostrada en la figura, el estado que se obtiene antes del tercer analizador es:

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= (|+\rangle_{x,x}\langle+| + |-\rangle_{x,x}\langle-|)|+\rangle \\ &= |+\rangle_{x,x}\langle+|+\rangle + |-\rangle_{x,x}\langle-|+\rangle. \end{aligned}$$

Ya con este estado de entrada al 3er analizador, se pueden calcular las probabilidades que se piden. El ejercicio es muy sencillo, pero sienta las bases para experimentos más complejos, como el del interferómetro del sistema de espín 1.

Fin de Tips

4. Usando el interferómetro mostrado arriba, seleccionar `Watch` bajo el menú `Control`. Esta opción causa que una luz destelle en el puerto por el cual el átomo sale. El programa ahora permite únicamente el modo `Go`. Ejecutar el experimento y note como sus resultados se compararan a los resultados obtenidos arriba. Explicar sus nuevos resultados.

Tips

Aquí lo se pretende es que notan la diferencia entre superposiciones coherentes de estados y estados mixtos estadísticos. En general, tal como en el experimento anterior, nosotros trabajamos con estados coherentes en los que surge interferencia. Para el caso de estados mixtos la interferencia desaparece. Ver últimos tres párrafos de sección 2.2.4 para una discusión más amplia.

Fin de Tips

Hoja de trabajo SPINS Lab 2Unknown $|\psi_1\rangle$

Probabilities	Axis		
Result	x	y	z
spin up \uparrow			
spin down \downarrow			

Unknown $|\psi_2\rangle$

Probabilities	Axis		
Result	x	y	z
spin up \uparrow			
spin down \downarrow			

Unknown $|\psi_3\rangle$

Probabilities	Axis		
Result	x	y	z
spin up \uparrow			
spin down \downarrow			

Unknown $|\psi_4\rangle$

Probabilities	Axis		
Result	x	y	z
spin up \uparrow			
spin down \downarrow			

Estado $|\psi\rangle$ creado con imán. $B = \underline{\hspace{2cm}}$

Probabilities	Axis		
Result	x	y	z
spin up \uparrow			
spin down \downarrow			

Interferómetro Espín 1/2

Haces utilizados		Experimento		Teoría	
SG1	SG2	P ₊	P ₋	P ₊	P ₋
+⟩	+⟩ _x				
	-⟩ _x				
	+⟩ _x , -⟩ _x				
-⟩	+⟩ _x				
	-⟩ _x				
	+⟩ _x , -⟩ _x				

Apéndice B

Resultados encuesta de opinión

14 responses

[Publish analytics](#)

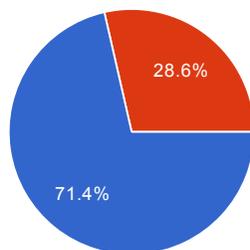
Summary

I - DATOS GENERALES

1. Nombre completo

Leslie Johana Martínez Banegas
 Wilmer Alexander Betanco Gonzalez
 Sheila Doreen Membreño Mejía
 KAREN ELENA LÓPEZ PALACIOS
 Noé Fernando Aguilar Perdomo
 Carlos Daniel Andrade Campos
 Hermes Paul Bautista Soto
 Jaime Valentin Diaz
 Claudia Aracely Vallejo Ham
 Samuel Obdulio Medina Fernández
 Gerson Rodanim Rivera Gallardo
 JULIO CESAR ZUNIGA RAN
 Elmer Josué Medina Fernandez
 Lucio David Villanueva Castillo

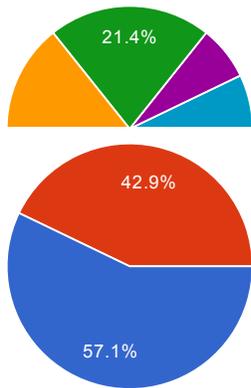
2. Sexo



Masculino	10	71.4%
Femenino	4	28.6%

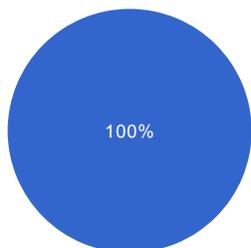
3. Edad

15-20 años	0	0%
20-25 años	3	21.4%
25-30 años	6	42.9%
30-35 años	3	21.4%
35-40 años	1	7.1%
40-50 años	1	7.1%



UNAH	8	57.1%
UPNFM	6	42.9%
UJCV	0	0%
UNICAH	0	0%
UNITEC	0	0%
UTH	0	0%
Otra	0	0%

5. Campus donde estudió



Tegucigalpa	14	100%
San Pedro Sula	0	0%
Comayagua	0	0%
Puerto Cortés	0	0%
La Ceiba	0	0%
El Progreso	0	0%
Danlí	0	0%
Otro	0	0%

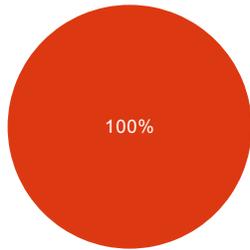
6. Carrera de pregrado (e.g. Ingeniería Eléctrica)

- Licenciatura en Física/Ingeniería Química Industrial
- Lic. en Física e Ing. Mecánica.
- Matemáticas
- Lic. Física e Ing. Química
- Profesor de Matemáticas en el grado de Licenciatura
- Licenciatura en Ciencias Naturales
- Física
- liceiado en Matematica con orientacion en Física
- Ingeniería Eléctrica
- Profesor de Matemáticas con Orientación en Física en el Grado de Licenciatura
- Licenciatura en Matematica
- FISICA
- Profe matematicas Grado de lic
- Licenciatura en Física

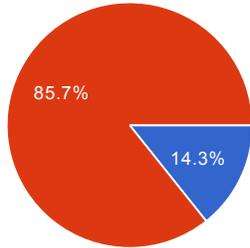
II - CONDICIONES DE ESTUDIO

5. ¿Está estudiando paralelamente algún otro pregrado o postgrado?

Sí	0	0%
No	14	100%

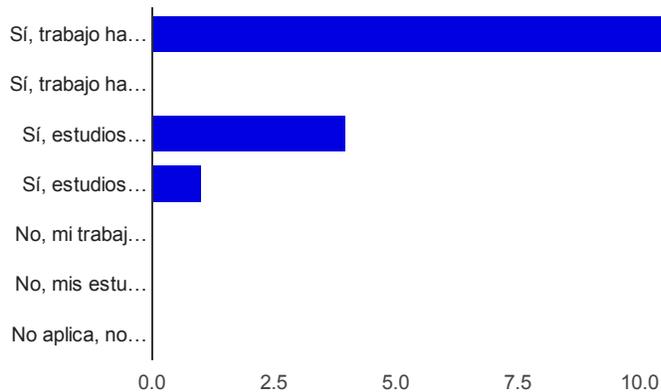


6. ¿Usted trabaja?



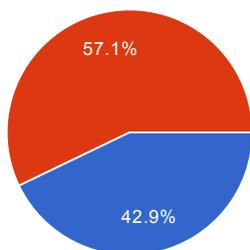
Sí, medio tiempo.	2	14.3%
Sí, a tiempo completo.	12	85.7%
Sí, tengo un negocio.	0	0%
No	0	0%

7. ¿Considera que otros estudios paralelos o su trabajo han influido en su aprendizaje?



Sí, trabajo ha influido considerablemente	12	85.7%
Sí, trabajo ha influido pero en menor grado	0	0%
Sí, estudios paralelos han influido considerablemente	4	28.6%
Sí, estudios paralelos han influido pero en menor grado	1	7.1%
No, mi trabajo no ha influido en mi aprendizaje	0	0%
No, mis estudios paralelos no han influido en mi aprendizaje	0	0%
No aplica, no estudio ni trabajo paralelamente	0	0%

8. ¿Había tomado algún curso de Mecánica Cuántica antes de MFS614?



Sí	6	42.9%
No	8	57.1%

9. ¿Con qué frecuencia estudió el curso de MFS614, tanto Módulo I (edX MIT) como Módulo II (edX UNAH). [Especifique "diariamente", "semanalmente" y número de horas]

En el edX MIT aproximadamente 3 horas diarias por 5 semanas, y en el edX UNAH, aproximadamente 1 hora diaria.

diariamente 1-2 horas

semanalmente 10hrs

7 horas semanales

semanalmente 6 horas

Semanalmente 10-15 horas

semanalmente 6 horas

tres horas diariamente

Modulo I 4-5 dias aprox 4 hrs x dia Modulo II semana aprox 2 hrs por trabajo

Diariamente, al menos 2 horas

6 Semanalmente

3 HORAS 3 VECES POR SEMANA

7 semanales

Semanalmente, 10 horas

10. ¿Merece mención alguna actividad que haya afectado la disponibilidad de tiempo de estudio para MFS614? (e.g.: me dedico mucho al deporte)

Trabajo

No

Quizas el hecho de Trabajar y estudiar al mismo tiempo, más otras responsabilidades en el hogar.

El trabajo de algún modo

Proyecto de Investigación asignado por el jefe

Actividades extras en el trabajo

dedico mucho a mi trabajo

el trabajo realizo mis actividades desde la 6:30 am hasta la 5:00 pm

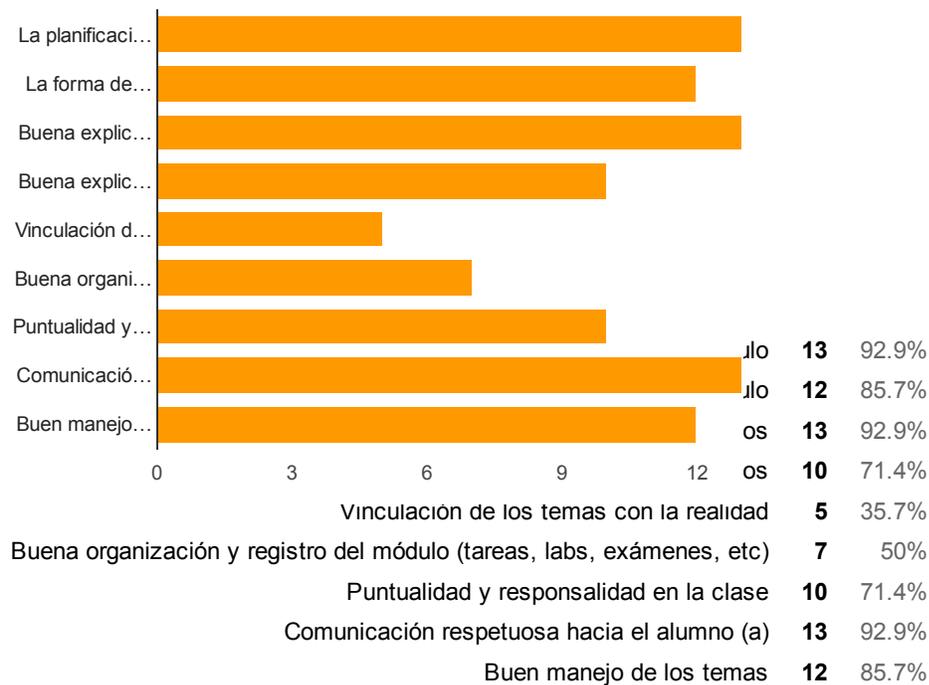
El horario de mi trabajo junto con el viaje desde Taulabé hasta Tegucigalpa

TRABAJO

Las actividades administrativas asignadas a mi persona no me dejaron mucho tiempo para dedicarme al estudio.

III - APRECIACIÓN DEL MÓDULO

11. Considera que su instructor proporcionó:



12. ¿Qué cualidades personales y profesionales identifica usted en el instructor?

Excelente la forma de explicar, es muy dinámico y hace que la clase sea muy amena, se nota que tiene mucho conocimiento del tema y que planifica todas sus clases.

Excelente persona y un profesional de primera.

Manejo del tema, claridad para explicar

Puntualidad y manejo del tema. Explicación clara del contenido.

Responsabilidad y dedicación.

Proactividad

puntualidad, respeto, disponibilidad

excelente preparación científica muy buen manejo de la tecnología, muy disciplinado en el desarrollo del curso

Para mi el tema no es sencillo y en cada clase había recordatorio muy útil sobre el tema a tratar

Muy buen manejo de los temas y da a conocer de forma clara las ideas lo cual ayuda a una mayor comprensión, siempre da un repaso al inicio de la clase, lo cual permite dale continuación a los contenidos, por último es hacer notar la puntualidad y responsabilidad de cumplir con el horario establecido.

Dominio Intelectual del tema, responsable en las clases

MANEJO DEL TEMA,

Puntualidad y orden

Respetuoso y responsable

13. A su criterio, ¿en qué aspectos puede mejorar el instructor?

Me parece bien todo, excelente maestro.

Talves se más de aspecto de tiempo, pero no es por el es más por el trabajo

Ninguno

Manejo del tiempo

Resolver más problemas.

Consideración de todo el grupo de estudiantes, no solo a los que trabajan en la UNAH
cumplir con el tiempo establecido para la clase.

muy satisfecho del desarrollo del curso muchas felicitaciones

En los ejercicios, a veces uno cree una cosa y es otra!

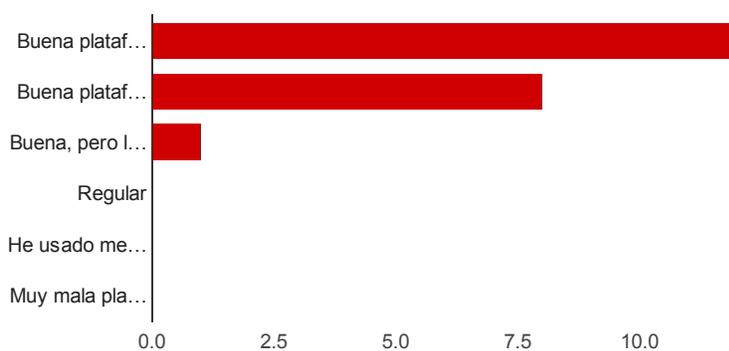
Organización de las tareas, laboratorios, exámenes

TODO BIEN

Pregunta en clase distribuidas equitativamente

Organización

14. ¿Que opinión le merece la plataforma edX?



Buena plataforma para apoyo a clases presenciales	12	85.7%
Buena plataforma para cursos totalmente en línea	8	57.1%
Buena, pero le hace falta mucho por mejorar mucho	1	7.1%
Regular	0	0%
He usado mejores	0	0%
Muy mala plataforma	0	0%

15. ¿Qué aspectos de la plataforma edX cambiaría o agregaría con el fin de mejorarla?

Tener mejor accesibilidad, ya que nunca pude entrar con google chrome y siempre costó que cargara en mozilla

Pues realmente poco, sería de agregarle mas vinculos

no sé si se el alumno puede subir documentos en la plataforma, sería una buena forma para evaluar algunos temas, no solo en física

Ninguno

De la plataforma nada, quizás del curso.

agregaría mas videos

nunca mire animaciones como las que nos presento en el modulo y sería buen agragar

Ejercicios prácticos

Considero que el curso de Mecánica Cuántica esta muy bien estructurado sin embargo considero debería considerarse el tiempo del desarrollo del curso ya que en muchas ocasiones es bastante tiempo el que se

necesita invertir, debería considerarse el tiempo en que cada estudiante trabaja, ya que es diferente para cada uno de nosotros.

TENER LA OPCION PARA SUBIR DOCUMENTOS

El control de la calidad del video

No

16. ¿Considera que el módulo 2 del curso de MFS614: Sistemas de Espín 1/2 orientado de forma práctica, ayudó al fortalecimiento de su conocimiento de la Mecánica Cuántica? ¿Por qué?

Por supuesto que si, ya que a través de los experimentos con el simulador pudo entenderse mejor la parte teórica que habiamos visto en clase.

Claro porque el uso de Brat y ket no suele ser claro y lo de la probabilidad excelente

sí, aprendí otro enfoque

Si, porque sirve de complemento indispensable para el desarrollo del módulo

Por medio de la experimentación se pudo entender la aleatoriedad de la mecánica cuántica.

Si, ayudo a mejorar el entendimiento de la Mecánica Cuántica

esclarece la parte teorica.

claro que si entendimos mejor el capitulo 1 y 2 del libro David H. McIntyre

A veces si. Me despejó algunas dudas pero me introdujo otras que tengo sin resolver

No solo fortaleció, si no que aclaro muchas de las cosas que no se comprendían de forma clara en el curso de EDX.

Se complemento los resultados teóricos con los resultados experimentales

SI. EL TEMA TRATADO FUE DE MUCHA UTILIDAD, PORQUE EN EL PREGRADO SE ESTUDIA LIGERAMENTE

Si. Por que en el curso anterior algunos conceptos no estaban claros

Si, Porque con ello visualizamos de mejor manera los principios de la Mecánica Cuántica.

17. En el curso del MIT se abordó el tema de Sistemas de Espín 1/2 en la Semana 2. ¿Considera que el enfoque usado en este módulo con software SPINS fue mejor, peor, o similar? ¿Por qué?

Fue mucho mejor, ya que se me facilitó más la comprensión de estos sistemas a través del software.

similar, muy bueno

Fue mejor, fue un aprendizaje mas práctico, con ejemplos mas específicos

Similar, pero sirvió para afianzar los conocimientos

Son enfoques diferentes, ya que en MIT se dedicaron a la solución de problemas y se dejó por un lado la parte experimental.

El software ayudó bastante al entendimiento, ya que muestra los resultados de Experimento S-G.

este enfoque fue mejor ya que existio ayuda visual del experimento que lleba al desarrollo de la teoria.

fue mejor, me gusto mucho y me facilitó encontrar la probabilidad

Fue mejor, más claro

Fue mucho mejor, ya que con el software nos permitía entender los conceptos de forma práctica.

Mejor, Facilita mayor la comprensión de la teoria

SI FUE MEJOR. POR LA SIMULACION Y FORMA DE ABORDAR

Fue mejor, el por que se verifica la parte teorica

Similar pero con metodologías muy diferentes

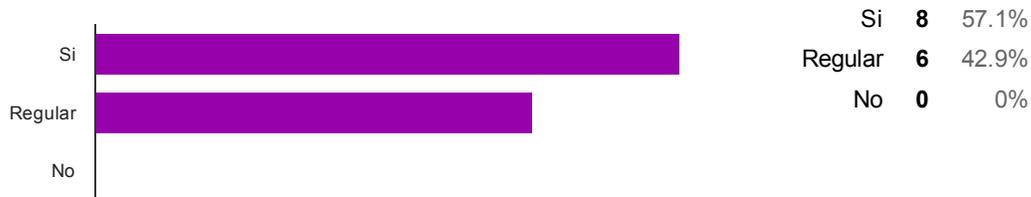
Claridad en la teoría expuesta [18. Considera que el libro de texto principal de David McIntyre contiene:]



Ejemplos muy bien explicados [18. Considera que el libro de texto principal de David McIntyre contiene:]



Amplia cantidad de ejercicios propuestos [18. Considera que el libro de texto principal de David McIntyre contiene:]



19. ¿Qué aspectos del libro de texto de McIntyre cambiaría o agregaría con el fin de mejorarlo?

Ninguno

Quería practicar haciendo los ejercicios del libro pero nunca supe si estaban correctos ya que no tenía la respuesta de ellos. Sería bueno incluirlas

Tendría que revisarlo más a fondo

No podría decirlo, no soy experto en Mecánica Cuántica. Quizás traducirlo.

ninguno

agregaría mas ejemplos propuestos

Los ejercicios explicados. Son pocos y no muy bien

Mayor cantidad de ejemplos y el idioma

DE LOS CAPITULOS ESTUDIADOS, TODO ESTA BIEN.

Traduccion

No lo revisamos todo, pero lo que pude ver esta muy bien.

Claridad en lo que pretende simular [20. Considera que el software SPINS tiene:]



Interfaz gráfica adecuada, es interactivo [20. Considera que el software SPINS tiene:]



Sirve como apoyo a la teoría presentada [20. Considera que el software SPINS tiene:]



21. ¿Qué aspectos del software SPINS cambiaría o agregaría con el fin de mejorarlo?

Agregar una opción para borrar los contadores y analizadores que pusimos en exceso y no tener que crear otro nuevo, al no poder hacerlo.

Pues mayor iconos de ayuda

Ninguno

Botones que se utilizan con frecuencia

La presentación.

ninguno

ninguna

No permite comparar dos sistemas distintos al mismo tiempo... se puede pero por separado

TODO BIEN

Compatibilidad con android

Mejorar su ambiente gráfico

Tuvieron un buen nivel, acorde a la teoría presentada [22. Considera que los laboratorios propuestos:]



Suficientemente claros por sí solos [22. Considera que los laboratorios propuestos:]



Sirvieron como soporte a la teoría presentada [22. Considera que los laboratorios propuestos:]



23. ¿Qué cambiaría de los laboratorios presentados? Por ejemplo: mayor claridad, mayor apoyo, tips o hints, etc...

Mayor apoyo

El laboratorio 2 por si solo no lo entendí, pero con el apoyo y los tips mostrados por el instructor pude hacerlo al final. Así que sugiero que siempre se presente ese apoyo en cada laboratorio.

Estaba claro lo que debía hacerse en cada laboratorio, tuvimos apoyo, una pista de lo que debíamos hacer, lo que nos permitió hacer los ejercicios; hubiese sido útil también poder consultar personalmente acerca del trabajo que hicimos luego de utilizar las pistas

Los tips son necesarios incluirlos en cada laboratorio.

mayor apoyo por el idioma.

Mayor claridad y Hints.

tips

nada

Mayor apoyo, no son sencillos.

Una mayor claridad.

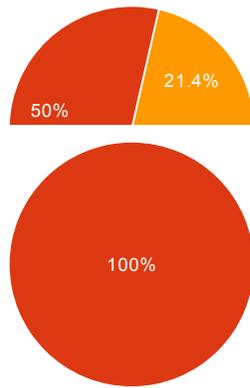
EN GENERAL BUENOS, AUNQUE TUVIMOS QUE REQUERIR AYUDA

Mayor claridad

En algunos ejemplos existía ambigüedad en lo que quería que se hiciera por lo tanto mayor claridad en las instrucciones.

24. ¿Considera que el idioma inglés fue un problema para usted en cuanto al libro y algunos recursos presentados?

Sí, bastante	4	28.6%
Sí, un poco	7	50%
No, en absoluto	3	21.4%



MFS614, ¿qué le parecieron?

Prefiero la modalidad del módulo del MIT, o sea, totalmente en línea (e-learning)	0	0%
Prefiero la modalidad del módulo 2: presencial pero con trabajos, recursos y apoyo en línea con edX (b-learning)	14	100%
Prefiero modalidad totalmente presencial	0	0%

26. Retroalimentación general: escriba aquí su percepción general del módulo y/o cualquier comentario adicional que desee.

Me siento satisfecha ya que todo lo abordado en clase quedó claro para mí, quizás lo único que sería bueno modificar es el tiempo para las tareas, debería ser un poco mayor, ya que todos trabajamos y estudiamos a la vez y se nos vuelve difícil hacerlo todo en poco tiempo. Pero en general me pareció excelente el módulo. Aprovecho felicitar al profesor Jonnathan López por su excelente dedicación.

muy bueno, y creo que ira mejorando con más actividades e información

Me gustó poder recibir un curso en línea de otra Universidad y al mismo tiempo la clase en el aula, pude apreciar dos enfoques diferentes, con personas preparadas en el tema, lo considero uno el complemento de otro y resultó bastante provechoso

Excelente módulo

Creo que faltaron más problemas y la cantidad de temas se quedó corta.

Interesante, necesita mejorar el desarrollo del mismo. Me dio la impresión de que muchos de los aspectos del curso fueron improvisados, faltando organización.

la experiencia fue de mucho provecho, algo muy novedoso que facilita el entendimiento de una de las ramas mas aridas de la fisica, y me parece que la parte presencial no puede faltar por muy buena que sea la modalidad en linea.

Disfrute mucho el modulo las retroalimentaciones fueron muy puntuales y me ayudaron a comprender con mayor claridad el curso de edx, lo felicito lo manejo con mayor claridad, sentí un poco de dificultad el segundo laboratorio hasta que subio el video pude entender

Me encantó la didáctica de Jonathan, en cierta forma mostraba la sencillez de lo que no es sencillo. Para mi mucho mejor que el de MIT, pero los ejercicios no son sencillos y por ahí me perdía!

Ya que fue una clase completamente nueva, estuvo muy buena, los diferentes módulos fueron complementarios entre si, sin embargo hubiese sido mejor el haber llevado las clases presenciales de forma paralela con la de EdX, para poder tener una mejor comprensión de lo que se vio en EdX.

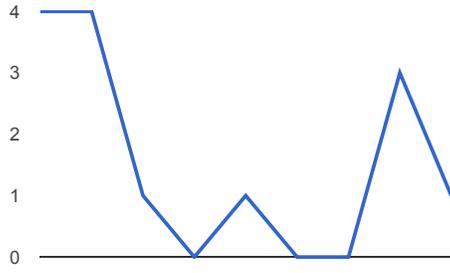
Muy gratificante y retador ya que es la primera vez que abordaba temas de la mecanica cuantica

CONSIDERO QUE EL TRABAJO HECHO FUE BUENO, AUNQUE NOS QUEDAMOS CORTOS EN EL CONTENIDO, SUPONGO QUE EN LA CLASE OPTATIVA CONTINUAREMOS,

Me Ayudo a conceptualizar bien ciertos aspecto no tan claros

No.

Number of daily responses



Apéndice C

Evaluación conceptual especial



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS
ESCUELA DE FÍSICA
MFS614 FÍSICA CUÁNTICA
EXAMEN FINAL
PRIMER PERÍODO DE 2016
SÁBADO 14 DE MAYO

NOTA

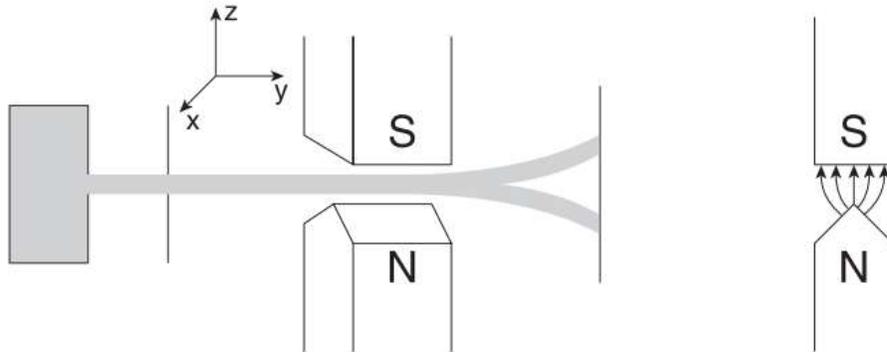
NOMBRE: _____ CUENTA: _____

PROFESOR: _____ SECCIÓN: _____

FIRMA (ASISTENCIA) _____ FIRMA (REVISIÓN) _____

Parte I – Selección Única [50%, 5% c/u]. A continuación se le presentan 10 preguntas, elija la opción correcta **justificando** su respuesta.

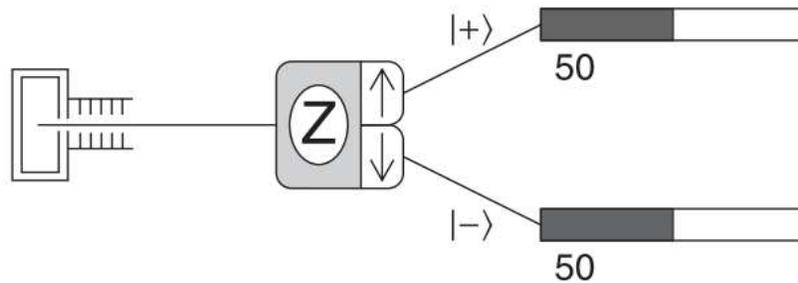
1. Considere el experimento original de Stern-Gerlach y elija el marco de referencia cartesiano mostrado: un haz de átomos neutros de plata se propagan en la dirección en $+y$ y pasan a través de un campo magnético no uniforme que lleva dirección en z , como mostrado en la figura. Escoja la afirmación incorrecta.



- a) Existen solo dos posibles desviaciones para los átomos ya que la fuerza magnética es proporcional a la cantidad de movimiento angular intrínseco o espín S_z el cual está cuantizado con dos posibles valores: $S_z = \pm \hbar/2$
- b) Clásicamente, lo esperable es que los átomos se esparzan de forma continuamente en la pantalla detectora
- c) Suponga por un momento el campo magnético es uniforme, en tal caso el haz de partículas no se desviará
- d) La contribución al momento dipolar magnético μ de cada átomo de plata es debido a un solo electrón: al electrón del orbital 5s
- e) Ninguna de las anteriores

Objetivo: comprensión de las variables involucradas en el experimento de Stern-Gerlach

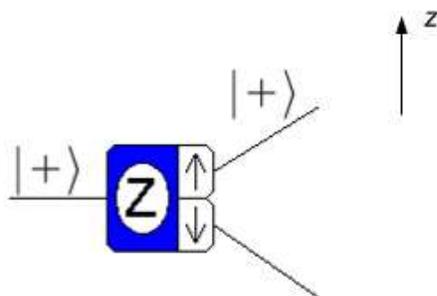
2. En el experimento original de Stern-Gerlach, esquematizado con SPINS mediante la figura mostrada abajo, ¿a qué se debe que la probabilidad de medir los átomos tengan espín hacia arriba $S_z = \hbar/2$ o espín hacia abajo $S_z = -\hbar/2$ sea del 50%?



- a) A que el vector estado de todos los átomos que dejan el horno es $|+\rangle_x$
b) A que el vector estado de todos los átomos que dejan el horno es $|+\rangle_y$
c) Debido al ambiente térmico del horno, esperamos distribuciones aleatorias de espín para los átomos
d) a) y b) son correctas
e) Ninguna de las anteriores

Objetivo: comprensión de la naturaleza del experimento original

3. En los experimentos de Stern-Gerlach que hemos realizado a lo largo de la clase con SPINS, en realidad el programa no especifica la dirección del gradiente del campo magnético. Para determinarlo, considere el ejemplo siguiente en el que ingresan átomos en un estado $|+\rangle$ y se desvían hacia arriba, en la dirección $+z$. ¿Cuál es la dirección del gradiente del campo magnético?



- a) $+x$
- b) $-x$
- c) $+z$
- d) $-z$
- e) No es posible saberlo

Objetivo: obtener detalles reales físicos del experimento. Hint: ver sección 1.1

4. Un haz de átomos neutros de plata que se propagan a lo largo de la dirección $+y$ en un estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$ pasan a través de un analizador de SG con un campo magnético vertical cuyo gradiente va en $-z$. ¿Cuál es el patrón correcto observado para las desviaciones?



A)



B)



C)



D)

- a) A)
b) B)
c) C)
d) D)
e) Ninguna de las anteriores

Objetivo: uso de diagramas y programa SPINS para modelar situación física

5. Un haz de átomos neutros de plata que se propagan a lo largo de la dirección $+y$ en un estado $|+\rangle$ pasan a través de un analizador de SG con un campo magnético vertical cuyo gradiente va en $-x$. ¿Cuál es el patrón correcto observado para las desviaciones?



A)



B)



C)

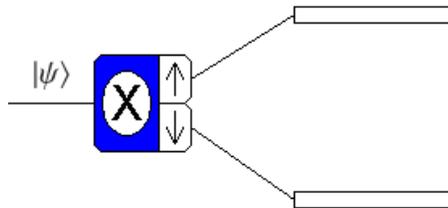


D)

- a) A)
- b) B)
- c) C)
- d) D)
- e) Ninguna de las anteriores

Objetivo: uso de diagramas y programa SPINS para modelar situación física

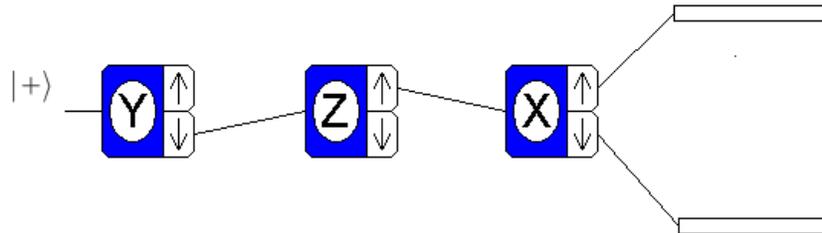
6. Observa el siguiente esquema del programa SPINS. Los átomos entran al analizador en un estado $|\psi\rangle = |-\rangle_y$. A partir esta información, escoja la afirmación incorrecta.



- a) El gradiente del campo magnético no uniforme debe estar en la dirección de x o $-x$
- b) Si entran 1000 átomos, sin considerar incertidumbres estadísticas, 500 átomos saldrán por el puerto de arriba y 500 por el puerto de abajo
- c) La probabilidad de obtener un valor de $S_x = +\hbar/2$ en una medición es de 50%
- d) La probabilidad de obtener un valor de $S_x = -\hbar/2$ en una medición es de 25%
- e) La dirección de propagación del haz de átomos es perpendicular al eje x

Objetivo: a partir de esquema de SPINS y MC determinar situación física.

7. Se envían átomos en un estado $|+\rangle$ a través de tres analizadores de SG como se muestra en la figura. ¿Cuál es la probabilidad de que un átomo de estos (que entra al primer analizador) salga por el puerto de arriba del último analizador?



- a) $1/2$
- b) $1/5$
- c) $1/6$
- d) $1/8$
- e) Cero

Objetivo: ser capaces de utilizar postulado 4 y simulador SPINS.

8. Un operador matemático A está dado por la siguiente matriz. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es incorrecta?

$$\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) Este operador es hermitiano pero no conmuta consigo mismo
- b) Es un operador hermitiano, por tanto, podría representar un observable físico
- c) Si representase un observable físico, los posibles valores de las mediciones en ese observable son \hbar , $-\hbar$ y cero
- d) Los valores propios de este operador son \hbar , cero y $-\hbar$, cuyos vectores propios son, respectivamente:

$$|1\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |0\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |-1\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- e) Si representase un observable físico, los vectores propios de esta matriz comprenden un conjunto completo de vectores de estado base

Objetivo: Interpretar postulados 2 y 3 de la MC

9. Existen otras partículas y átomos para las que el experimento de SG conlleva a tres desviaciones del haz original; este es el caso de partículas de espín 1 en el que el momento angular tiene valores cuantizados de $S_z = \hbar, -\hbar$ y $0\hbar$. Suponga que un sistema de espín-1 se prepara en el estado $|\psi_i\rangle$. Se encuentra que la probabilidad de medir el sistema en un estado $|\psi_f\rangle$ es $P_{\psi_f} = 0.524$

$$|\psi_i\rangle = \sqrt{\frac{1}{6}}|1\rangle - \sqrt{\frac{2}{6}}|0\rangle + i\sqrt{\frac{3}{6}}|-1\rangle$$

$$|\psi_f\rangle = \frac{1+i}{\sqrt{7}}|1\rangle_y + \frac{2}{\sqrt{7}}|0\rangle_y - i\frac{1}{\sqrt{7}}|-1\rangle_y$$

¿Si el sistema ahora se prepara en un estado $|\psi'_i\rangle = e^{3i}|\psi_i\rangle$, cuál es la probabilidad de medir el sistema en un estado $|\psi'_f\rangle = -|\psi_f\rangle$?

- a) 0
- b) 1
- c) 1/6
- d) 0.524
- e) 0.75

Objetivo: ser capaces de utilizar resultado de problema 1.3, el cual es un resultado importante que vimos en clase.

10. Dos operadores A y B están dados por la siguientes matrices. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

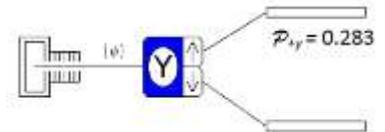
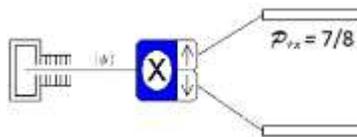
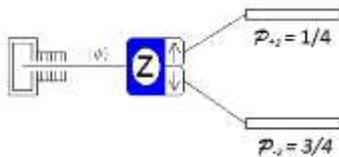
$$S_x \doteq \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_y \doteq \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Estos operadores conmutan y, por tanto, tienen los mismos vectores propios
- b) Son operadores hermitianos así que podrían representar observables físicos; en tal caso, los observables que representan son “compatibles”
- c) Estos operadores no conmutan
- d) En caso representasen observables físicos, el principio de incertidumbre nos asegura que no podremos medir ambos observables simultáneamente
- e) c) y d) son correctos

Objetivo: Teoría de conmutadores y principio de incertidumbre

Parte II – Problemas [60%]. A continuación se le presentan 3 problemas, resuelva cada uno de ellos en forma clara y ordenada dejando plasmado su procedimiento resuelto en las hojas en blanco que se le adjunta a su examen.

1. Se llevan a cabo los tres experimentos de SG mostrados en los que los átomos dejan el horno en un estado cuántico definido pero desconocido. Los experimentos arrojan las probabilidades mostradas:



A partir de esta información determine el estado de entrada $|\psi\rangle$:

$|\psi\rangle = |+\rangle_y$

$|\psi\rangle = |+\rangle_x$

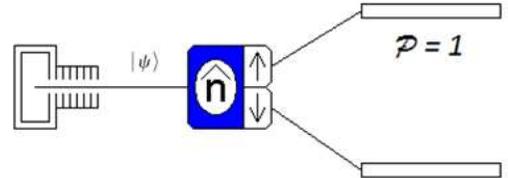
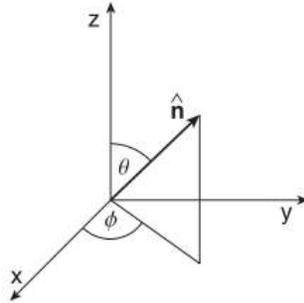
$|\psi\rangle = \frac{1}{2} |+\rangle - \frac{1}{2} |-\rangle$

$|\psi\rangle = \frac{1}{2} |+\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{11\pi}{8}} |-\rangle$

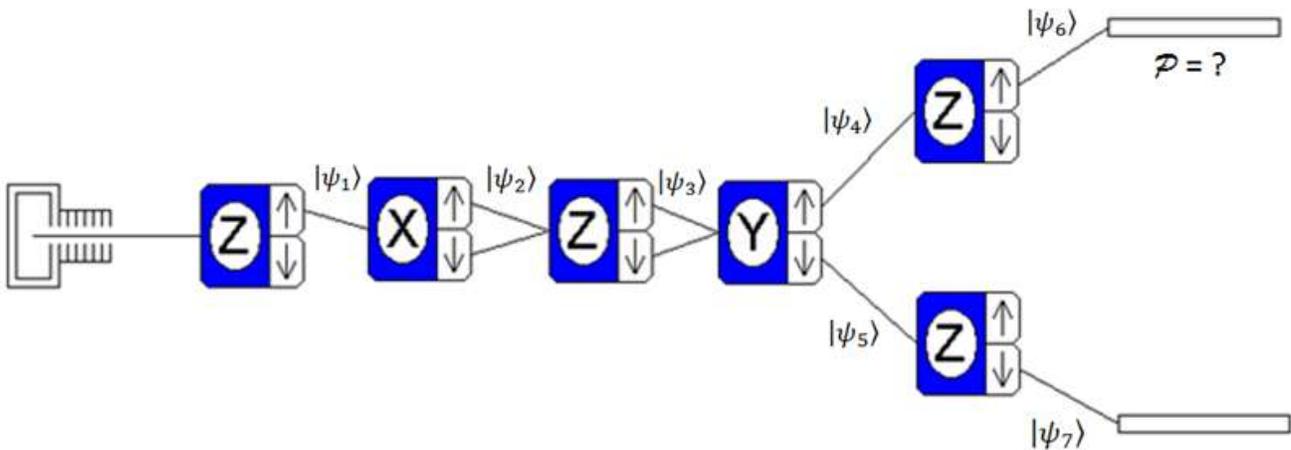
$|\psi\rangle = \frac{1}{2} |+\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{7\pi}{8}} |-\rangle$ ✓

Encuentre la dirección del gradiente del campo magnético (ángulos θ y ϕ) del analizador de Stern Gerlach tal que la probabilidad de que los átomos salgan por el puerto de espín hacia arriba sea 1.

- a) $\theta = 60^\circ, \phi = 330^\circ$
- b) $\theta = 120^\circ, \phi = 60^\circ$
- c) $\theta = 0^\circ, \phi = 90^\circ$
- d) $\theta = 120^\circ, \phi = 330^\circ$
- e) $\theta = 90^\circ, \phi = 0^\circ$



2. Remítase al experimento mostrado en la figura. Determine la probabilidad de que un átomo que entre al segundo analizador salga por el puerto de arriba del ultimo analizador superior.



- a) $P = 1/2$
- b) $P = 1/4$
- c) $P = 1/8$
- d) $P = 1$
- e) $P = 0.35$

Encuentre los vectores de estado a la salida de cada analizador de SG:

- a) $|\psi_1\rangle = |+\rangle, |\psi_2\rangle = |+\rangle, |\psi_3\rangle = |+\rangle, |\psi_4\rangle = |+\rangle_y, |\psi_5\rangle = |-\rangle_y, |\psi_6\rangle = |+\rangle, |\psi_7\rangle = |-\rangle$
 b) $|\psi_1\rangle = |+\rangle, |\psi_2\rangle = |+\rangle_y, |\psi_3\rangle = |+\rangle_x, |\psi_4\rangle = |+\rangle_y, |\psi_5\rangle = |-\rangle_y, |\psi_6\rangle = |+\rangle, |\psi_7\rangle = |-\rangle$
 c) $|\psi_1\rangle = |+\rangle, |\psi_2\rangle = |+\rangle_y, |\psi_3\rangle = |+\rangle_y, |\psi_4\rangle = |+\rangle_y, |\psi_5\rangle = |-\rangle_y, |\psi_6\rangle = |-\rangle, |\psi_7\rangle = |+\rangle$
 d) $|\psi_1\rangle = |+\rangle, |\psi_2\rangle = |+\rangle_x, |\psi_3\rangle = |+\rangle_y, |\psi_4\rangle = |+\rangle_y, |\psi_5\rangle = |-\rangle_y, |\psi_6\rangle = |-\rangle, |\psi_7\rangle = |+\rangle$
 e) $|\psi_1\rangle = |+\rangle, |\psi_2\rangle = |+\rangle_x + |-\rangle_x, |\psi_3\rangle = |+\rangle + |-\rangle, |\psi_4\rangle = |+\rangle_y, |\psi_5\rangle = |-\rangle_y, |\psi_6\rangle = |+\rangle, |\psi_7\rangle = |-\rangle$

3. En la base de S_z , el operador S_x para un sistema de espín 1 es:

$$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determine los valores y vectores para este operador.

Respuesta:

Valores propios: $1\hbar, 0\hbar, -1\hbar$. Vectores propios:

$$1\hbar \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad 0\hbar \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad -1\hbar \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Donde, respectivamente:

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}, a = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}, b = 0, c = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$b = -\frac{1}{\sqrt{2}}, a = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}$$