

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA**



**MÉTODOS PERTURBATIVOS MODERNOS EN LA  
TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS.**

**EIBY NOHELIA ALVARADO GUTIERREZ**

Junio, 2021

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA**



**MÉTODOS PERTURBATIVOS MODERNOS EN LA  
TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS.**

**EIBY NOHELIA ALVARADO GUTIERREZ**

Proyecto de título presentado para optar al Título de Master en Física

Asesor de Tesis: Dr. BRYAN OBED LARIOS

Junio, 2021

# Agradecimientos

Mi agradecimiento especial a:

**Dios** todo poderoso quien guía mis pasos y me provee sabiduría en cada etapa y proceso de mi vida.

Cada uno de los miembros de **mi familia** que me motivan e inspiran a retarme y superarme; especialmente a mis hermanos **Rina y Carlos** que directamente estuvieron en el proceso de desarrollo de este trabajo de tesis.

Mi asesor, el **Dr. Larios**, quien dedicó su tiempo, comprensión y apoyo constante en el desafío que ha planteado el culminar este proceso de investigación y la redacción de esta tesis de Maestría.

**En memoria de mi hermano Jorge Leonel** a quien extrañaré al compartir el logro de finalizar mi tesis de Maestría en Física.

# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Justificación y Objetivo de investigación</b>	<b>7</b>
2.1	Justificación . . . . .	7
2.2	Objetivo General . . . . .	8
2.2.1	Objetivos Específicos . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Marco teórico</b>	<b>9</b>
3.1	Cinemática Relativista . . . . .	9
3.2	Ecuaciones de movimiento . . . . .	11
3.2.1	Ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	11
3.3	Teoría Cuántica de Campos . . . . .	13
3.3.1	Modelo Estándar de Física de Partículas . . . . .	13
3.3.2	Bosón de Higgs . . . . .	15
3.3.3	Materia Oscura . . . . .	16
3.4	Regla Dorada de Fermi . . . . .	18
3.4.1	Regla de oro en decaimientos ( $\Gamma$ ) . . . . .	18
3.4.2	Regla de oro para dispersiones ( $\sigma$ ) . . . . .	19
3.4.3	Dispersión en dos partículas en un marco de centro de momento (CM) . . . . .	19
3.5	Métodos perturbativos en la Teoría Cuántica de Campos . . . . .	21
3.5.1	Reglas de Feynman para la Electrodinámica cuántica . . . . .	21
3.5.2	Tecnología de traza . . . . .	23
3.6	Métodos perturbativos modernos en la Teoría Cuántica de Campos . . . . .	25
3.6.1	Formalismo de Espinores de Helicidad (caso sin masa) . . . . .	25
3.6.2	Principios fundamentales del Formalismo de Espinores de Helicidad . . . . .	27
3.6.3	Formalismo de Espinores de Helicidad (caso con masa) . . . . .	29
3.7	Cálculo de procesos . . . . .	30
3.7.1	Dispersión Electrón - Muón ( $e^- + \mu \rightarrow e^- + \mu$ ) . . . . .	30
3.7.2	Dispersión Electrón - Electrón ( $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$ ) . . . . .	33

<b>4</b>	<b>Producción de partículas del Modelo Estándar a partir de aniquilación de materia oscura</b>	<b>37</b>
4.1	Teorema de bajas energías . . . . .	37
4.2	Amplitud de Dispersión $X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}h$ (Caso sin masa) . . . . .	40
4.3	Amplitud de dispersión proceso $X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}h$ . . . . .	43
4.3.1	Escenario de materia oscura con masa y fermiones sin masa . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>48</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Con la motivación e interés de comprender y describir la estructura elemental de la formación del Universo; en los aceleradores de partículas como el Gran Colisionador de Hadrones (LHC por sus siglas en inglés) en el Centro Europeo de Investigación Nuclear (CERN por sus siglas en inglés), se realizan investigaciones importantes en Física de altas energías; promoviendo el desarrollo y el respaldo de algunas teorías que permiten actualmente comprender en gran manera cómo se estructura y comporta el universo (1; 2). El comportamiento de las partículas elementales a nivel subatómico es descrito por el Modelo Estándar de partículas elementales (3; 4). A gran escala la Teoría de la Relatividad General es crucial para la descripción de la dinámica del cosmos. Sin embargo, no contamos actualmente con una teoría o modelo consistente de una teoría de la gravedad cuántica que funcione en el ultravioleta (muy altas energías).

Los avances en la ciencia, particularmente en Física requiere una construcción de modelos formales que se apoyan en gran medida de los avances en Matemáticas. Sin embargo, son los experimentos los que validan o descartan los modelos matemáticos. En el micromundo, a escala cuántica el estudio de las partículas elementales y sus interacciones se basa en comprender los estados ligados, decaimientos y dispersión. La mecánica cuántica no relativista con las formulaciones de Schrödinger describen muy bien los estados ligados, mientras que para la descripción de los decaimientos y dispersiones tenemos la Teoría Cuántica de Campos (QFT por sus siglas en inglés)(1; 5; 6).

En este trabajo de tesis tenemos como interés particular el estudio de los siguientes observables físicos:

- Razón de decaimiento ( $\Gamma$ )

- Sección transversal ( $\sigma$ ).

Donde  $\Gamma$  es la razón de decaimiento, es decir la probabilidad por unidad de tiempo que una partícula dada se desintegre. En el caso de la dispersión, el observable es el área de la sección transversal  $\sigma$ , debido a que la probabilidad de que se produzca cualquier reacción dada es proporcional a su sección transversal (7). En la sección 4 del capítulo 3, se describen las definiciones matemáticas exactas, necesarias para calcular tanto  $\Gamma$  como  $\sigma$ ; dichas definiciones son las conocidas Reglas Doradas de Fermi, las cuales enuncian lo siguiente

$$\Gamma \propto |\mathcal{M}|^2, \quad \sigma \propto |\mathcal{M}|^2, \quad (1.1)$$

donde  $\mathcal{M}$  representa la amplitud de dispersión respectiva del proceso (7) (8). Tanto  $\Gamma$  como  $\sigma$  son directamente proporcionales al módulo cuadrado de la amplitud, tal como en Mecánica Cuántica no Relativista, la densidad de probabilidad de encontrar una partícula en una región es proporcional al módulo cuadrado de la función de onda (7).

Las amplitudes de dispersión han sido calculadas tradicionalmente como una perturbación en series de expansión que contiene el acoplamiento de las interacciones de partículas, Richard Feynman introdujo reglas y diagramas que organizan los cálculos de dichas amplitudes (7), descritas en la sección 3.5.1.

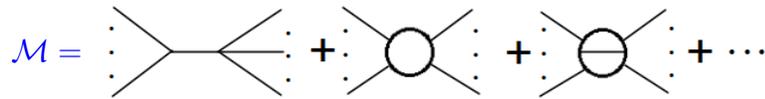


Figura 1.0.1: Amplitud de dispersión expresada como la suma de todos los posibles diagramas de Feynman

A pesar del tremendo éxito de la diagramática de Feynman, existe la necesidad de eficientizar los cálculos de  $|\mathcal{M}|^2$  y las predicciones dentro de la Teoría Cuántica de Campos (QFT). En esta tesis se presenta un método perturbativo moderno en la Teoría cuántica de Campos, el Formalismo de Espinores de Helicidad (9), una poderosa herramienta de cálculo, que permite calcular sin complicaciones, dispersiones entre partículas en un espacio de cuatro dimensiones, y cuyos principios fundamentales de aplicación parten del contexto de las reglas de Feynman (10). Apoyados con esta herramienta moderna nos permitimos abrir espacio a cálculos de dispersión donde dos partículas de materia oscura ( $X\bar{X}$ ) interactúan en el estado inicial y produciendo dos partículas de materia fermiónica ( $f\bar{f}h$ ) en el estado final, identificando en el proceso como propagador un bosón, reconociéndose además la producción del bosón de Higgs ( $X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}h$ ) (11).

Es propicio mencionar que los resultados de este trabajo de tesis, han sido presentados internacionalmente en el siguiente evento: **I Congreso Guatemalteco de Física, julio 2021.**

Además, ha sido seleccionado para ser presentado en el siguiente congreso internacional: **V Encuentro Bienal de Investigación y Postgrado, Centroamérica y El Caribe. Honduras 2021**

El orden de la tesis es el siguiente: en el Capítulo 1 presentamos una breve introducción con la descripción general del contenido, en el Capítulo 2, justificamos nuestra motivación y presentamos los objetivos, en el Capítulo 3 se presenta el marco teórico con los fundamentos que dan soporte a esta investigación, en el Capítulo 4 se muestra la aplicación del Formalismo de Espinores de Helicidad en el cálculo de  $|\mathcal{M}|^2$  del proceso de dispersión  $X\hat{X} \rightarrow f\hat{f}h$  y en el Capítulo 5 las conclusiones obtenidas de todo el trabajo y estudio.

## Capítulo 2

# Justificación y Objetivo de investigación

### 2.1. Justificación

En los aceleradores de partículas como el Gran colisionador de Hadrones (LHC por sus siglas en inglés) en el Centro Europeo de Investigación Nuclear (CERN por sus siglas en inglés), se obtiene una gran cantidad de datos que requieren análisis estadístico, los cuales permiten concluir sobre la posible detección de una nueva partícula o quizá el descubrimiento de un nuevo fenómeno cuántico. Por otro lado, estos datos experimentales de igual forma sirven para descartar o sustentar un modelo teórico. Justamente la construcción de modelos que describen la dinámica de las partículas interactuantes se establecen aplicando la teoría Cuántica de Campos (1).

Debido al volumen de datos experimentales, es cada vez más necesario aumentar la precisión del lado de la teoría (fundamentos). Durante casi 60 años la herramienta de cálculo más poderosa surge de la teoría cuántica de campos, sobre todo en sus aspectos perturbativos. Sin embargo, para contrastar la enorme cantidad de datos es necesario considerar la interacción de múltiples partículas (muchos cuerpos) y los métodos perturbativos tradicionales (a la Feynman) presentan múltiples dificultades que imposibilitan contrastar la teoría con el experimento (12; 10).

En este trabajo de tesis se presenta el Formalismo de Espinores de Helicidad, como método perturbativo moderno, el cual permite y facilita realizar cálculos que antes eran imposibles con métodos tradicionales y son de mucha importancia para el LHC y para futuros colisionadores. De igual manera estos métodos modernos permiten identificar nuevas conexiones entre diferentes teorías de la Física con diversas áreas de la Matemática(12; 10) .

Uno de los más grandes paradigmas actualmente en la Física Moderna es que el Modelo Estándar de Física de partículas elementales, no incluye materia oscura ni gravedad, en ese sentido es necesario recurrir a física más allá del Modelo Estándar que describa la posibilidad de que la materia oscura sea materia fermiónica. Sin embargo, este tipo de cálculos perturbativos con los métodos tradicionales muchas veces no permiten tener resultados compactos que ayuden a contrastar la teoría con el experimento de estos fenómenos. En este sentido, uno de los objetivos de esta tesis es implementar las mismas técnicas perturbativas modernas que han demostrado ser muy útiles en el Modelo Estándar en la posible detección indirecta de materia oscura, específicamente en el proceso  $X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}h$ .

## 2.2. Objetivo General

- Aplicar el Formalismo de Espinores de Helicidad para determinar amplitudes de dispersión en diferentes procesos y reacciones en Física más allá del Modelo Estándar.
- Implementar el Teorema de Bajas Energías, para generar bosones de Higgs en estados finales.

### 2.2.1. Objetivos Específicos

- Identificar la amplitud de dispersión como pieza clave del cálculo de la razón de decaimiento y la sección transversal de dispersión.
- Contrastar los métodos perturbativos tradicionales con los métodos perturbativos modernos.
- Calcular con el Formalismo de Espinores de Helicidad la amplitud de dispersión de un proceso de interacción de materia oscura.
- Aplicar el Teorema de Bajas Energías al proceso  $X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}$ , para general la amplitud del diagrama de Feynman asociada a  $X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}h$

# Capítulo 3

## Marco teórico

### 3.1. Cinemática Relativista

El desarrollo de la teoría de la relatividad especial y de la física cuántica al comienzo del siglo XX, proporcionó respuesta a todos los rompecabezas existentes en esa época y nos han proporcionado una profunda comprensión del comportamiento de la Naturaleza y ha revolucionado nuestro modo de vivir y pensar como físicos. En unas cuantas décadas estas teorías inspiraron nuevos desarrollos y teorías en los campos de la física atómica, la física nuclear y la física de la materia condensada.

Uno de los principios sólidos de la Física moderna es que todos los observadores inerciales son equivalentes y que las leyes de la Naturaleza deben ser las mismas para todos los observadores. Podemos decir entonces que las leyes físicas son covariantes (13). El otro postulado establecido por Einstein en su teoría especial de la relatividad es el que nos indica que la velocidad de la luz en el vacío posee el mismo valor en todos los sistemas de referencia inerciales. ( $c = 3 \times 10^8 m/s$ ).

También, ahora nos es conocido que la longitud de un objeto medido por alguien que se encuentra en un sistema de referencia en movimiento con respecto al objeto siempre es menor que la longitud propia, este efecto es conocido como contracción de la longitud.

La relatividad especial en términos prácticos, consiste en estudiar la transformación de coordenadas de dos o más sistemas inerciales, lo que se conoce como grupo de Lorentz (7; 5). Así las transformaciones completas de coordenadas entre un evento que ocurre en  $(x, y, z)$  en el sistema de referencia inercial  $S$  y en  $(x', y', z')$  en  $S'$  se resumen en:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (3.1)$$

$$y' = y, \quad (3.2)$$

$$z' = z, \quad (3.3)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \quad (3.4)$$

con  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$  y con  $S'$  moviéndose a una velocidad  $v$  a lo largo de la dirección  $+x$ .

Por los principios de relatividad especial sabemos que si la cantidad de movimiento se conserva en un sistema de referencia inercial, debe conservarse en todos los demás sistemas de referencia inerciales y debe redefinirse como sigue (13)

$$\vec{p} = \gamma m \vec{u}, \quad \text{ó} \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v}, \quad (3.5)$$

donde  $\mathbf{u}$  es la velocidad de la partícula y  $m$  es la masa.

Siguiendo el principio de covarianza de las leyes de la física se redefine la energía cinética de una partícula como sigue

$$K = \gamma mc^2 - mc^2, \quad (3.6)$$

donde el término  $mc^2$  que es independiente de la velocidad  $\mathbf{u}$  por lo que se le denomina energía en reposo de la partícula; por lo tanto la energía total de la partícula es como sigue:

$$E = \gamma mc^2 + mc^2, \quad (3.7)$$

Según (13) en muchas situaciones en lugar de medir la velocidad de una partícula se mide su cantidad de movimiento o su energía por lo que es posible utilizar la expresión

$$E^2 = p^2 c^2 + (mc^2)^2, \quad (3.8)$$

donde se relaciona la energía total de la partícula con su cantidad de movimiento.

Como  $m$  es una constante entonces  $E^2 - p^2 c^2$  debe tener el mismo valor en todos los sistemas de referencias, es decir es invariante bajo una transformación de Lorentz (ecuaciones

3.1-3.4).

La simetría más pronunciada de la teoría de la relatividad muestra que, tanto la masa-energía como la cantidad de movimiento relativistas, siempre se conservan en una colisión, mientras que los métodos clásicos muestran que se conserva la cantidad de movimiento pero no la energía cinética, a menos que la colisión sea perfectamente elástica. La cantidad de movimiento y la energía relativistas están vinculadas de manera indisoluble debido a que la conservación de la cantidad de movimiento solo se cumple en todos los sistemas de referencia inerciales si se cumple la conservación de la masa-energía (13).

## 3.2. Ecuaciones de movimiento

En Física conocemos como ecuación de movimiento a la expresión matemática que permite predecir la evolución de una partícula o un sistema a través del espacio y el tiempo, además de la masa o cualquier otra variable que incida en su movimiento o en su estado inicial.

En la mecánica Newtoniana las ecuaciones de movimiento pueden obtenerse de la aplicación de la segunda ley de Newton

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (3.9)$$

Como una reestructuración de la mecánica clásica, surge la mecánica Lagrangiana que a diferencia de la Mecánica Newtoniana, se tienen ecuaciones de movimiento que no dependen del sistema de referencia elegido. Las ecuaciones de Euler Lagrange establecen que la integral de acción para un sistema es un mínimo (14). En la siguiente sub-sección se muestra a más detalle las ecuaciones de Euler-Lagrange.

### 3.2.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

En esta sección establecemos las ecuaciones de Euler-Lagrange, consideremos una partícula moviéndose en tres dimensiones sujeta a una fuerza conservativa neta  $F(r)$  con energía cinética de la siguiente forma:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (3.10)$$

y su energía potencial es la siguiente

$$U = U(r) = U(x, y, z). \quad (3.11)$$

La densidad Lagrangiana tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= T - U \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(r).\end{aligned}\tag{3.12}$$

Consideremos las dos siguientes derivadas parciales

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x,\tag{3.13}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = p_x.\tag{3.14}$$

De la segunda ley de Newton recordamos que  $F_x = \dot{p}_x$  y de las dos ecuaciones anteriores se deduce que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}.\tag{3.15}$$

De igual forma podemos extender esta deducción en  $y$  y  $z$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}},\tag{3.16}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}.\tag{3.17}$$

La ecuación de movimiento de una partícula es determinada por la segunda ley de Newton y es exactamente la misma que determinan las tres ecuaciones de Euler-Lagrange.

Es importante mencionar que la función Lagrangiana satisface el principio de Hamilton que establece que la trayectoria real que sigue una partícula entre dos puntos  $x_1$  y  $x_2$  en un intervalo de tiempo dado  $[t_1, t_2]$  es tal que la integral de acción toma la siguiente forma

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt,\tag{3.18}$$

dicha acción es estacionaria cuando es tomada la trayectoria real de la partícula. Las ecuaciones de Lagrange tienen la misma forma para cualquier elección de coordenadas generalizadas.

### 3.3. Teoría Cuántica de Campos

La teoría cuántica de campos (QFT por sus siglas en inglés) es una combinación de ideas y herramientas de tres de los más importantes temas de la física moderna: la teoría cuántica, el concepto de campo y los postulados de relatividad especial (13). Adicionalmente, la teoría cuántica de campos ha creado nuevos puentes entre la matemática y la física. Los conceptos y técnicas centrales de la teoría cuántica de campos son simples e intuitivos, esto es especialmente cierto por el uso de herramientas pictóricas como los diagramas de Feynman, para el caso perturbativo, que se describe con más detalles en la sección 3.5

Desde 1960 el estudio de QFT ha tenido enormes descubrimientos conceptuales en su campo de estudio y en sus áreas de aplicación, como los sistemas de materia condensada, el modelo estándar de partículas elementales de la física, entre muchos otros (1).

#### 3.3.1. Modelo Estándar de Física de Partículas

El ejemplo más emblemático del poder de predicción de QFT es el Modelo Estándar (SM). En esta sección se describe brevemente el Modelo Estándar de partículas elementales; reconociendo en primer lugar que éste, establece que leptones y quarks son partículas verdaderamente elementales, en el sentido de que no poseen estructura interna. Las partículas que tienen estructura interna se llaman hadrones; están constituidas por quarks: bariones cuando están formadas por tres quarks o tres antiquarks, o mesones cuando están constituidas por un quark y un antiquark. Hay seis leptones (electrón ( $e$ ), muón ( $\mu$ ), tau ( $\tau$ ), neutrino del electrón ( $\nu_e$ ), neutrino del muón ( $\nu_\mu$ ) y neutrino del tau ( $\nu_\tau$ )) y seis quarks [quark up ( $u$ ) quark down ( $d$ ), quark charm ( $c$ ), quark extraño ( $s$ ), quark bottom ( $b$ ) y quark top ( $t$ )]. Sin embargo, los quarks tienen una propiedad llamada color y cada uno puede presentar tres colores (rojo, verde y azul). Hay, por tanto, 18 quarks. Pero, como a cada partícula le corresponde una antipartícula, existirían en total 12 leptones y 36 quarks.(15)

A manera de resumen presentamos la siguiente tabla (16; 17; 4; 18):

	I	II	III	<b>Bosones</b>
<b>Quarks</b>	$u$	$c$	$t$	<b>fotón</b> ( $\gamma$ )
	$d$	$s$	$b$	<b>gluón</b> ( $g$ )
<b>Leptones</b>	$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$	<b>bosón Z</b> ( $Z^0$ )
	$e$	$\mu$	$\tau$	<b>bosón W</b> ( $W^\pm$ )

Tabla 3.3.1: Partículas elementales del Modelo Estándar

El electrón es el leptón más conocido y el protón y el neutrón son los hadrones más familiares. La estructura interna del protón es **(uud)**, o sea, dos quarks u y uno d; la del neutrón es **(udd)**, es decir, dos quarks d y uno u. El mesón  $\pi^+$  está formado por un antiquark d y un quark u, el mesón  $\pi^-$  está constituido por un antiquark u y un quark d.

La teoría que explica la dinámica de los quarks y los gluones, la Cromodinámica Cuántica (QCD en inglés) (19), no prohíbe la existencia de partículas con estructura más compleja que tres quarks, tres antiquarks o un par quark-antiquark, pero eso aún depende de resultados experimentales adicionales (7). Una característica peculiar de los quarks es que tienen carga eléctrica fraccionaria,  $(+2/3e)$  para algunos tipos y  $(-1/3e)$  para otros. Sin embargo, hasta el momento no se han detectado quarks libres, estos están siempre confinados en hadrones, de tal modo que la suma algebraica de las cargas de los quarks que constituyen un determinado hadrón es siempre un múltiplo entero de la carga del electrón  $e$ . El protón, por ejemplo, está formado por dos quarks de carga  $(+2/3e)$  y un quark de carga  $(-1/3e)$  de modo que su carga es  $(2/3 + 2/3 - 1/3)e$ , o, simplemente,  $e$ .

El Modelo Estándar de partículas elementales identifica las partículas básicas y especifica cómo interactúan éstas. Las interacciones de la naturaleza, conocidas hasta el momento son las siguientes:

- electromagnética
- nuclear fuerte
- nuclear débil
- gravitacional.

Cada una de ellas es debida a una propiedad fundamental de la materia: masa (interacción gravitacional), carga eléctrica (interacción electromagnética), color (interacción fuerte) y carga débil (interacción débil)(5).

El Modelo Estándar de partículas elementales es quizá la teoría científica más exitosa de todos los tiempos (20), ya que nos abre la puerta a descifrar enorme cantidad de enigmas y misterios del cosmos (21). Sin embargo no es la última palabra ya que no incorpora la interacción gravitacional. La densidad Lagrangiana del Modelo Estándar, capaz de describir casi todos los fenómenos físicos del mundo subatómico (electromagnetismo, nuclear fuerte y débil), es la siguiente (22):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\not{D}\psi + \psi\phi + h \cdot c + |D_{\mu}\phi|^2 - V(\phi) + h \cdot c. \quad (3.19)$$

El primer término  $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ , explica la interacción electromagnética y si se varía con respecto al campo  $A_{\mu}$  se obtienen las ecuaciones de Maxwell (22; 23)

$i\bar{\psi}\not{D}\psi$ , describe los fermiones (leptones y hadrones),  $V(\phi)$  es el potencial escalar asociado al bosón de Higgs, fundamental para que el modelo funcione por completo.  $x_i y_i x_j \phi$ , describe la forma en que las partículas adquieren masa a través de la acción del campo de Higgs (18; 24; 25).

La densidad Lagrangiana no solo nos dice lo que ocurre (cualitativamente) en procesos de colisiones de partículas, si no que nos permite calcular observables físicos (medibles experimentalmente) con mucha precisión (20). Sin embargo, el Modelo Estándar dista de ser una teoría final, ya que no incorpora la gravedad, la masa de los neutrinos, ni la materia y energía oscura (22).

En lo que sigue, presentamos una breve introducción al Bosón de Higgs y a materia oscura (). Aunque, nuestra tesis no requiere el estudio a profundidad de la descripción de estas partículas, ya que como mostraremos más adelante, nuestro principal aporte es un formalismo para cálculo perturbativo en cualquier teoría del campo cuántico.

### 3.3.2. Bosón de Higgs

El bosón de Higgs es una partícula elemental y la última pieza del Modelo Estándar de Física de Partículas (18; 24; 26), que debe su nombre al físico Peter Higgs, quien en 1964 estableció el reconocido mecanismo de Higgs, para explicar cómo obtienen masa las partículas como resultado de su interacción con el campo de Higgs. Se caracteriza por no poseer espín (cero), ni carga eléctrica, ni carga color, es muy inestable y se desintegra rápidamente: su vida media es del orden de  $10^{-25} s$  (17). El 4 de julio de 2012 (27), cuando el CERN reportó la identificación de una partícula con masa aproximada de  $125,3 \pm 0,6 GeV/c^2$  (28) que concordaba con las características teóricas del bosón de Higgs; sin embargo ya en 1967 Steven Weinberg y Abdus Salam fueron los primeros en aplicar el mecanismo de Higgs a la ruptura de la simetría electrodébil en una teoría invariante de gauge (4; 3).

### 3.3.3. Materia Oscura

Uno de los enigmas más fabulosos de la Física Moderna es la naturaleza de la materia oscura la cual actualmente no se conoce con certeza. Observando como se mueve un cúmulo de galaxias se puede saber sobre la masa del sistema, además esta masa se puede obtener a través del brillo de las estrellas, pero al comparar ambas debería ser la misma o parecida, sin embargo se observó que era unas cuatrocientas veces mayor la primera, como se muestra en la Figura ???. La teoría que se estaba aplicando no era la adecuada para explicar lo observado o había mucha masa en ese cúmulo que no se veía. Estamos hablando de una masa invisible a nuestros ojos y nuestros aparatos, denominada ¡Materia Oscura! Que no la podamos ver no significa que no se pueda medir o estudiar, podemos intentar medir sus efectos de forma indirecta o directa.

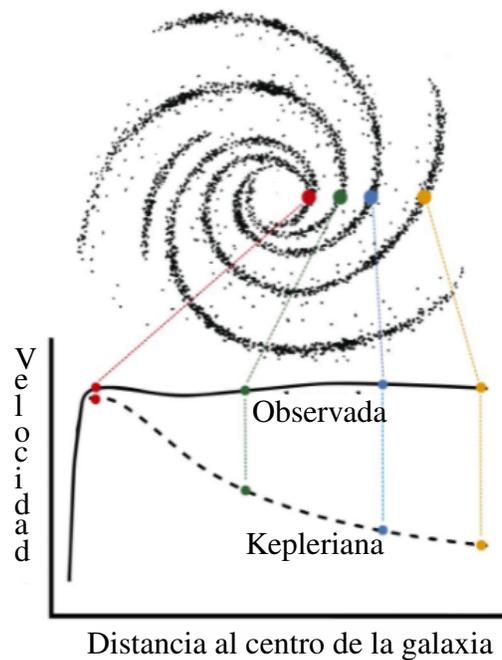


Figura 3.3.1: Curva de Rotación de Galaxias.

Sin la materia oscura el universo no sería igual, es fundamental para que se pudiera formar las galaxias por agregación de materia; también es necesaria para mantener la unidad de las galaxias y cúmulos de galaxias .

El nombre de materia oscura se atribuye debido a que no emite ni absorbe la luz, la luz la atraviesa y la materia oscura a su vez atraviesa todo a su paso, está por todas partes; se estima

que más del 23 % de la materia del universo es materia oscura ([citar materia oscura](#)).

Por la importancia que tiene en Cosmología y en Física de partículas se hacen muchos experimentos para detectar partículas de materia oscura de manera directa, intentar notar su paso o incluso producirlas en un colisionador de manera indirecta (). Con esto se crea la probabilidad de unir la física de partículas con la cosmología y ampliar la teoría de la composición del universo.

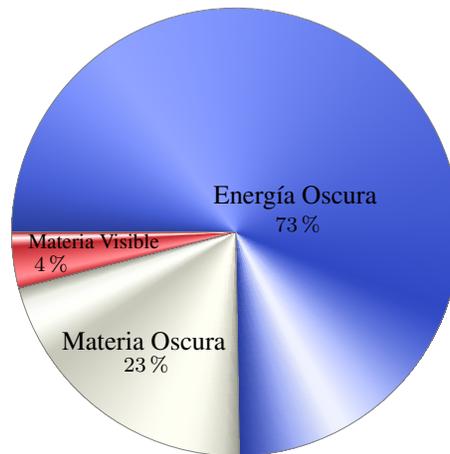


Figura 3.3.2: Diagrama de distribución porcentual de la cantidad de materia en el Universo.

Estas últimas subsecciones 3.3.2 y 3.3.3 serán importantes para testear el formalismo moderno que se motiva e impulsa en esta tesis, ya que nuestro interés es calcular la probabilidad de transición cuántica en un hipotético aniquilamiento de materia oscura fermiónica, radiando un bosón de Higgs desde un estado intermedio, es decir  $X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}h$ , donde  $X$  representa el campo de materia oscura fermiónica,  $h$  el campo del bosón de Higgs y  $f$  puede ser cualquier fermión, en nuestro caso será en electrón.

En lo que resta del marco teórico presentamos con cierto grado de detalle los fundamentos necesarios para evaluar la amplitud de probabilidad.

Por completez presentamos las herramientas tradicionales desarrollados en gran medida por el célebre Richard Feynman. Sin embargo, el objetivo es implementar las herramientas modernas (29; 12; 30).

### 3.4. Regla Dorada de Fermi

Para comparar la enorme cantidad de DATA experimental con la teoría es necesario calcular dos cantidades físicas: la amplitud y el espacio fase. Dado que en la amplitud está contenida toda la información dinámica de un sistema de partículas; mientras que el factor de espacio de fase es puramente cinemático y también llamado densidad de estado final (7). En esta tesis nos centramos en el cálculo de la amplitud, ya que el espacio de fase es competencia numérica y por ende un tema transversal a nuestro aporte.

La regla dorada de Fermi se utiliza para calcular la tasa de transición entre un autoestado dado y un continuo de autoestados; nos dice que la tasa de transición es igual al producto de el espacio de fase y el cuadrado de la amplitud.

En lo que sigue, presentamos la regla dorada de Fermi para procesos de decaimientos y colisiones de "n" partículas.

#### 3.4.1. Regla de oro en decaimientos ( $\Gamma$ )

Al considerar una partícula en reposo, etiquetada como "1" que decae en varias otras partículas con etiquetas "2, 3, 4, ..., n", se puede indicar de la siguiente manera:

$$1 \rightarrow 2 + 3 + 4 + \dots + n, \quad (3.20)$$

y la razón de decaimiento se puede expresar como

$$\Gamma = \frac{S}{2\hbar m_1} \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - \dots - p_n) \times \prod_{j=2}^n 2\pi \delta(p_j^2 - m_j^2 c^2) \theta(p_j^0) \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4}. \quad (3.21)$$

Donde  $m_i$  es la masa de la i-ésima partícula y  $p_i$  es su cuadri-momento,  $S$  es un factor estadístico para corregir el doble conteo cuando hay partículas idénticas en el estado final. Por cada grupo de  $s$  partículas (en el estado final)  $S$  toma el valor de  $\frac{1}{s!}$ . Por ejemplo (7) si tenemos  $a \rightarrow b + b + c + c + c$  entonces  $S = \left(\frac{1}{2!}\right) \left(\frac{1}{3!}\right) = \frac{1}{12}$ , para el cálculo de la amplitud  $\mathcal{M}$  se dedicará espacio más adelante, sobre el resto de factores es el espacio de fase que nos indica cómo hemos de integrar sobre los cuadri-momentos salientes tomando las siguientes restricciones:

- Por cada partícula saliente tenemos  $p_j^2 = m_j^2 c^2$ , forzado por la delta de Dirac, la cual es cero al menos que el argumento desaparezca.
- Si cada energía saliente es positiva  $p_j^0 = E_j/c > 0$  por lo tanto la función theta será 1.
- La energía y el momentum deben ser conservados  $p_1 = p_2 + p_3 + \dots + p_n$  y es asegurado en el factor  $\delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - \dots - p_n)$ .

Por cada  $\delta$  se toma un factor  $(2\pi)$  y por cada  $d$  un factor  $(\frac{1}{2\pi})$ .

La ecuación (3.21) puede reducirse a la siguiente expresión:

$$\Gamma = \frac{S}{2\hbar m_1} \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - \dots - p_n) \times \prod_{j=2}^n \frac{1}{2\sqrt{p_j^2 + m_j^2 c^2}} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3}, \quad (3.22)$$

tomando que  $p_0 \rightarrow \sqrt{p_j^2 + m_j^2 c^2}$ .

### 3.4.2. Regla de oro para dispersiones ( $\sigma$ )

Consideremos que las partículas “1” y “2” colisionan produciendo las partículas “3, 4, 5, ..., n” es decir:

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + 5 \dots + n; \quad (3.23)$$

la sección transversal de dispersión se puede expresar como:

$$\sigma = \frac{S\hbar^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} \int |\mathcal{M}|^2 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - \dots - p_n) \times \prod_{j=3}^n \frac{1}{2\sqrt{p_j^2 - m_j^2 c^2}} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3}, \quad (3.24)$$

considerando

$$p_j^0 = \sqrt{p_j^2 + m_j^2 c^2}. \quad (3.25)$$

### 3.4.3. Dispersión en dos partículas en un marco de centro de momento (CM)

Al considerar en el estado final únicamente dos partículas, la expresión (3.23), se reduce a la siguiente forma:

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4.$$

En el marco CM tenemos  $p_2 = -p_1$  y además

$$\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2} = (E_1 + E_2)|p_1|/c; \quad (3.26)$$

con lo que podemos reducir (3.24) a

$$\sigma = \frac{S\hbar^2 c}{64\pi^2(E_1 + E_2)|p_1|} \int |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{\sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_3^2 c^2} \sqrt{\mathbf{p}_4^2 + m_4^2 c^2}} d^3 \mathbf{p}_3 d^3 \mathbf{p}_4. \quad (3.27)$$

Si tomamos

$$\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) = \delta\left(\frac{E_1 + E_2}{c} - p_3^0 - p_4^0\right) \delta^3(\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4),$$

aplicando (3.25) y resolviendo la integral sobre  $\mathbf{p}_4$  (con la implicación que  $\mathbf{p}_4 \rightarrow \mathbf{p}_3$ ) tenemos que

$$\sigma = \left(\frac{\hbar}{8\pi}\right)^2 \frac{Sc}{(E_1 + E_2)|p_1|} \int |\mathcal{M}|^2 \times \frac{\delta((E_1 + E_2)/c - \sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_3^2 c^2} - \sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_4^2 c^2})}{\sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_3^2 c^2} \sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_4^2 c^2}} d^3 \mathbf{p}_3. \quad (3.28)$$

Considerando coordenadas esféricas podemos expresar  $d^3 \mathbf{p}_3 = r^2 dr d\Omega$  reemplazando  $|\mathbf{p}_3|$  por  $r$  obteniendo que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar}{8\pi}\right)^2 \frac{Sc}{(E_1 + E_2)|p_1|} \int_0^\infty |\mathcal{M}|^2 \times \frac{\delta((E_1 + E_2)/c - \sqrt{r^2 + m_3^2 c^2} - \sqrt{r^2 + m_4^2 c^2})}{\sqrt{r^2 + m_3^2 c^2} \sqrt{r^2 + m_4^2 c^2}} r^2 dr. \quad (3.29)$$

Para simplificar el argumento de la función delta tomamos

$$u = \sqrt{r^2 + m_3^2 c^2} + \sqrt{r^2 + m_4^2 c^2},$$

resolviendo la ecuación sobre  $u$  y tomando  $m_2 \rightarrow m_4$  y  $m_1 \rightarrow (E_1 + E_2)/c^2$  se concluye (7):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{S|\mathcal{M}|^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|}. \quad (3.30)$$

Conociendo  $\mathcal{M}$  el cálculo de  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  puede considerarse simple.

Haciendo análisis dimensional, la sección transversal  $\sigma$  toma dimensiones de área barns ( $1\text{barn} = 10^{-24}\text{cm}^2$ ), el diferencial de la sección transversal  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  tiene entonces dimensión de barns por steradians (steradians son como los radianes, adimensionales) y por último tenemos que las unidades de la amplitud  $\mathcal{M}$  dependen de las partículas involucradas, así que para  $n$  partículas (entrantes y salientes) entonces *Dimensión de  $\mathcal{M}$*  =  $(mc)^{4-n}$ (7).

### 3.5. Métodos perturbativos en la Teoría Cuántica de Campos

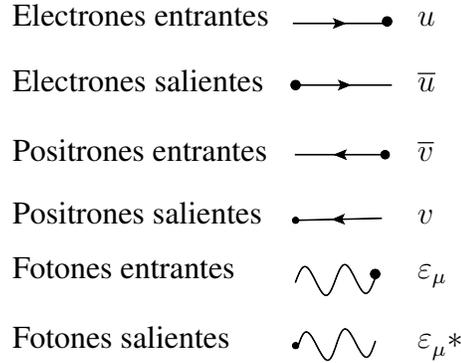
En esta sección se describen brevemente algunos métodos perturbativos que en la Teoría cuántica de campos, han sido tradicionalmente utilizados para calcular amplitudes de dispersión.

#### 3.5.1. Reglas de Feynman para la Electrodinámica cuántica

Se ha determinado que para calcular la razón de decaimiento y la sección transversal de dispersión es necesario mostrar cómo calcular la amplitud  $\mathcal{M}$  por lo que necesitamos aplicar las técnicas planteadas por el físico estadounidense Richard Feynman, que desarrolló alrededor del año 1949 y que hoy en su honor se conocen como Reglas de Feynman (7).

Las reglas de Feynman en espacio de momento aplicadas sobre un determinado diagrama de Feynman son:

1. Para la notación: cada línea externa asociada a un momentum  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , dibujando una flecha junto a la línea indicando la dirección positiva (Avance del tiempo). Para cada línea interna asociada a un momentum se utiliza  $q_1, q_2, \dots$  e igual dibujar flechas junto a las líneas indicando la dirección positiva (asignada arbitrariamente).
2. Las líneas externas contribuyen con factores de esta forma:



3. Por cada vértice se agrega un factor  $ig_e\gamma^\mu$ .
4. Por cada línea interna se agrega un factor  $\frac{i(\gamma^\mu q_\mu + mc)}{q^2 - m^2 c^2}$  si el propagador es un electrón o un positrón y en el caso de que el propagador sea un fotón agregar el factor  $\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$ .
5. Por cada vértice agregar una función delta de la forma  $(2\pi)^4\delta(k_1 + k_2 + k_3)$ .  
 Donde los  $k$  son cuádrimomentos y en el caso de ser cuádrimomentos de entrada al vértice entonces serán positivos y negativos en el caso de tratarse de cuádrimomentos salientes del vértice.
6. Por cada momento interno  $q$  se escribe un factor  $\frac{d^4q}{(2\pi)^4}$  e integrar.
7. El resultado incluirá el factor  $(2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 + \dots - p_n)$  que corresponde a la conservación de la energía y el momentum; eliminando ese factor y multiplicando por  $i$  lo que resulta es el valor de  $\mathcal{M}$ .

Para acoplar los factores matriciales se recomienda comenzar por una línea de salida de un electrón y seguir la flecha hacia atrás. Cada línea de fermion produce una matriz  $4 \times 4$ , spinor; mientras que cada vértice conlleva a un vector contravariante indexado, el cual se contrae con el covariante vector indexado por la línea del propagador. En el caso de tener varios diagramas debe calcularse la amplitud  $\mathcal{M}$  por cada diagrama y anexarlas para encontrar la amplitud total.

8. Incluir un signo menos entre los diagramas que difieren únicamente en el intercambio de dos entrantes (o salientes) electrones (o positrones) o de un intercambio de un electrón entrante con un positron saliente (o viceversa).

### 3.5.2. Tecnología de traza

Con el propósito de presentar la tecnología de traza, como un método tradicional para el cálculo del valor esperado del modulo cuadrado de la amplitud se presenta esta sección donde a manera de ejemplo consideraremos la dispersión electrón - muón, Figura 3.5.1.

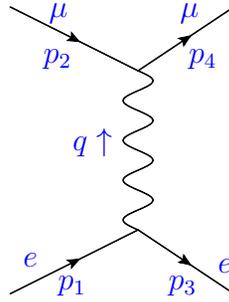


Figura 3.5.1: Diagrama de dispersión electrón - muón ( $e^- + \mu \rightarrow e^- + \mu$ ).

Aplicando Reglas de Feynman buscando la amplitud de dispersión del proceso mostrado en la Figura 3.5.1 obtenemos:

$$\mathcal{M} = -\frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)][\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2)]; \quad (3.31)$$

tomando  $m$  como la masa del electrón y  $M$  la masa del muón.

El cuadrado de la amplitud de la ecuación (3.31) es calculado de la siguiente forma:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g_e^4}{(p_1 - p_3)^4} [\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)][\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2)][\bar{u}(3)\gamma^\nu u(1)]^* [\bar{u}(4)\gamma_\nu u(2)]^*. \quad (3.32)$$

La ecuación (3.32), coincide con la expresión genérica requerida para aplicar el Truco de Casimir (7), esa estructura requerida es de la siguiente forma:

$$G = [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)][\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^*. \quad (3.33)$$

Al sumar sobre todos los espines de la expresión en (3.33), desaparecen los espinores y todo lo que queda es multiplicar matrices y obtener la traza, esto es lo que se conoce como truco de Casimir y cuya expresión es la siguiente:

$$\sum_{\text{todos los spins}} [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)][\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* = \text{Tr}[\Gamma_1(\not{p}_b + m_b c)\bar{\Gamma}_2(\not{p}_a + m_a c)]. \quad (3.34)$$

Regresando al proceso  $e^- + \mu \rightarrow e^- + \mu$  y al cuadrado del módulo de su amplitud de la ecuación (3.32), aplicando el truco de Casimir dos veces es posible obtener:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{g_e^4}{4(p_1 - p_3)^4} \text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p}_1 + mc)\gamma^\nu(\not{p}_3 + mc)] \times \text{Tr}[\gamma_\mu(\not{p}_2 + Mc)\gamma_\nu(\not{p}_4 + Mc)]. \quad (3.35)$$

Este proceso reduce los cálculos a determinar ambas trazas y para eso debemos aplicar teoremas del cálculo de trazas (7) que facilitan el manejo de las gammas así:

$$\text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p}_1 + mc)\gamma^\nu(\not{p}_3 + mc)] = \text{Tr}(\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_3) + mc[\text{Tr}(\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu) + \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \not{p}_3)] + (mc)^2 \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu), \quad (3.36)$$

$$\text{Tr}[\gamma_\mu(\not{p}_2 + Mc)\gamma_\nu(\not{p}_4 + Mc)] = \text{Tr}(\gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu \not{p}_4) + Mc[\text{Tr}(\gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu) + \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \not{p}_4)] + (Mc)^2 \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu). \quad (3.37)$$

Considerando término a término tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_3) &= (p_1)_\lambda (p_3)_\sigma \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\sigma) \\ &= (p_1)_\lambda (p_3)_\sigma 4(g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\lambda\nu}) \\ &= 4[p_1^\mu p_3^\nu - g^{\mu\nu} (p_1 \cdot p_3) + p_3^\mu p_1^\nu], \end{aligned} \quad (3.38)$$

considerando que  $\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$  y que los productos de cantidades impares de gammas, son cero, reducimos a

$$\text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p}_1 + mc)\gamma^\nu(\not{p}_3 + mc)] = 4\{p_1^\mu p_3^\nu + p_3^\mu p_1^\nu + g^{\mu\nu}[(mc)^2 - (p_1 \cdot p_3)]\}, \quad (3.39)$$

por tanto el resultado de la otra traza de (3.35) es

$$\text{Tr}[\gamma_\mu(\not{p}_2 + Mc)\gamma_\nu(\not{p}_4 + Mc)] = 4\{p_{2\mu} p_{4\nu} + p_{3\mu} p_{1\nu} + g_{\mu\nu}[(Mc)^2 - (p_2 \cdot p_4)]\}, \quad (3.40)$$

obteniendo el producto de ambas trazas, finalmente encontramos que

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = & \frac{4g_e^4}{(p_1 - p_3)^4} \{p_1^\mu p_3^\nu + p_3^\mu p_1^\nu + g^{\mu\nu} [(mc)^2 - (p_1 \cdot p_3)]\} \\ & \times \{p_{2\mu} p_{4\nu} + p_{4\mu} p_{2\nu} + g_{\mu\nu} [(Mc)^2 - (p_2 \cdot p_4)]\}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

es decir:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{8g_e^4}{(p_1 - p_3)^4} [(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) - (p_1 \cdot p_3)(Mc)^2 - (p_2 \cdot p_4)(mc)^2 + 2(mMc^2)^2]. \quad (3.42)$$

El resultado obtenido en la ecuación (3.42) y el proceso que se ha utilizado para obtenerlo, se compara en el próximo capítulo con técnicas más modernas en el caso sin masa, lo cual viene a ser una contribución de este trabajo de tesis.

## 3.6. Métodos perturbativos modernos en la Teoría Cuántica de Campos

El estudio de las amplitudes sugiere un paradigma que puede expresarse libremente evitando Lagrangianos, con todas sus ambigüedades de redefiniciones de campo y elecciones de calibre, y en cambio se centra en cómo la cinemática, simetrías, unitarismo y localidad impactan los observables físicos (9; 10). Las técnicas modernas de amplitudes nos permiten encontrar otro enfoque de los métodos perturbativos en la Teoría Cuántica de Campos. Con una formulación novedosa que capture la física de la matriz  $S$  perturbativa completa. Esta nueva formulación hace que los cálculos de amplitud mucho más eficientes y conducen a nuevos paradigmas (9). Por ejemplo, geometrización de las amplitudes (31), conexión con la gravedad, entre otros increíbles resultados.

### 3.6.1. Formalismo de Espinores de Helicidad (caso sin masa)

El Formalismo de Espinores de Helicidad (FEH) es un método eficiente y moderno, utilizado para calcular amplitudes de dispersión de partículas (9),(12; 10), particularmente se describe en esta sección su aplicación con partículas sin masa por ser físicamente bien motivado porque equivale al caso donde la energía de la colisión en el centro de masa es mucho mayor comparada con la energía de las partículas.

### 3.6. MÉTODOS PERTURBATIVOS MODERNOS EN LA TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS 26

Para fermiones sin masa reconocemos con  $\pm$  la helicidad ( $h = \pm 1/2$ ), que es una proyección del espín a lo largo del momento de la partícula (9).

Para identificar los fundamentos del FEH comenzamos recordando la ecuación de Dirac, (Weinberg)

$$(-i\not{p} + m)\Psi = 0, \quad (3.43)$$

en el caso cuando  $m = 0$  y con espinores de cuatro componentes como funciones de onda en la ecuación de Dirac tenemos

$$\not{p}v_{\pm}(p) = 0, \quad u_{\pm}(p)\not{p} = 0. \quad (3.44)$$

Donde asociamos  $v_{\pm}$  con anti-fermiones salientes y a  $\bar{u}_{\pm}$  con fermiones salientes y con intercambio simétrico de  $u_{\pm} = v_{\mp}$  y  $\bar{v}_{\pm} = \bar{u}_{\mp}$ . Las soluciones independientes de la ecuación (3.44) son las siguientes:

$$\begin{aligned} u_{-}(p) = v_{+}(p) &= \begin{pmatrix} |p]_a \\ 0 \end{pmatrix}, & u_{+}(p) = v_{-}(p) &= \begin{pmatrix} 0 \\ |p\rangle^{\dot{a}} \end{pmatrix}, \\ \bar{u}_{-}(p) = \bar{v}_{+}(p) &= (0, \langle p|_{\dot{a}}), & \bar{u}_{+}(p) = \bar{v}_{-}(p) &= ([p|^a, 0), \end{aligned} \quad (3.45)$$

La notación conveniente de  $|p]$ ,  $|p\rangle$ ,  $[p|$ ,  $\langle p|$  constituyen el núcleo del Formalismo de Espinores de Helicidad y son simplemente espinores numéricos de 2 componentes que satisfacen la ecuación de Weyl (9; 30).

$$p^{\dot{a}b}|p]_b = 0, \quad p_{a\dot{b}}|p\rangle^{\dot{b}} = 0, \quad [p|^b p_{b\dot{a}} = 0, \quad \langle p|_b p^{\dot{b}a} = 0. \quad (3.46)$$

Es necesario conocer a detalle la forma en la que FEH utiliza esta notación, por lo que describimos a continuación los principios fundamentales que hemos de considerar y aplicar en los cálculos de amplitudes de dispersión de partículas no masivas.

### 3.6.2. Principios fundamentales del Formalismo de Espinores de Helicidad

Para aprovechar las ventajas de trabajar con los métodos de helicidad en el formalismo de dos componentes, se deben considerar algunos aspectos fundamentales (10) que se presentan en esta sección.

Como se mencionó al inicio de esta sección, para seleccionar las helicidades de manera simple para partículas de espín  $\frac{1}{2}$ , únicamente las diferenciamos con signo + o signo - lo cual nos da dos opciones de helicidad por cada partícula involucrada en el sistema así haciendo uso de la estadística, podemos notar que al tener un sistema de tres partículas el número de posibilidades es  $2^3$  para cuatro partículas el análisis es de manera similar encontrando que en total se obtienen  $2^4$ , por lo que podemos concluir que dado un sistema de  $n$  partículas para determinar la amplitud de dispersión por el método de helicidades debemos analizar  $2^n$  posibilidades de combinación (9).

Siendo  $p$  y  $k$  dos cuádrimomentos, y sean  $\phi$  y  $\kappa$  los espinores correspondientes, es decir,  $\phi$  es el espinor de Weyl que representa a una partícula no masiva de espín ( $\frac{1}{2}$ ) y de cuádrimomento  $p$ , y similar para  $\kappa$  y  $k$ . La notación que se toma como base para la aplicación del FEH en este trabajo de tesis, es la siguiente:

$$[pk] \equiv [p]^a |k]_a \equiv \phi^a \kappa_a. \quad (3.47)$$

Definiendo que  $[p]^a \equiv \phi^a$  y  $|k]_a \equiv \kappa_a$ , y la notación  $[pk]$  es abreviación para la contracción de índices espinoriales.) Considerando el producto esponorial y el espinor nulo, se tiene que  $[kp] = -[pk]$  y  $[pp] = 0$ . A su vez, se define

$$\langle pk \rangle \equiv \langle p|_{\dot{a}} |k \rangle^{\dot{a}} \equiv \phi_{\dot{a}} \kappa^{\dot{a}}, \quad (3.48)$$

donde se ha definido  $\langle p|_{\dot{a}} \equiv \phi_{\dot{a}}$  y  $|k \rangle^{\dot{a}} \equiv \kappa^{\dot{a}}$ , y  $\langle pk \rangle$  como una abreviación para la contracción de índices espinoriales punteados), que implica que  $\langle kp \rangle = -\langle pk \rangle$  y  $\langle pp \rangle = 0$ . Usando  $\phi_{\dot{a}} = \phi_a^*$ ,  $\kappa^{\dot{a}} = \kappa^{a*}$ , tenemos

$$\langle pk \rangle = \phi_{\dot{a}} \kappa^{\dot{a}} = (\phi_a \kappa^a)^* = (\kappa^a \phi_a)^* = [kp]^*. \quad (3.49)$$

En el **FEH** se trabaja con espinores de dos componentes que no anticonmutan (también conocidos como twistores). En el límite ultraenergético los cálculos se vuelven muchos más

### 3.6. MÉTODOS PERTURBATIVOS MODERNOS EN LA TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS 28

sencillos con FEH que utilizando métodos convencionales de cuatro componentes. Donde el producto entre dos espinores bra-kets cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} [k|p] &= [k p], & \langle k|p \rangle &= \langle k p \rangle, \\ [k|p] &= 0, & \langle k|p \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Entre las muchas relaciones útiles de los bra-kets de twistores, se tiene la que los relaciona directamente con los 4-vectores de las partículas involucradas en el proceso de interés, y es la siguiente:

$$\begin{aligned} \langle k p \rangle [p k] &= \text{Tr} \left[ \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) k \not{p} \right] \\ &= -2k \cdot p \\ &= -(k + p)^2; \end{aligned} \quad (3.51)$$

donde se considera el hecho de que las partículas tienen masa cero. Es posible escribir cualquier 4-vector  $p$  “no masivo” en la forma siguiente:

$$-\not{p} = |p\rangle [p| + |p\rangle \langle p| \quad (3.52)$$

A la relación descrita en la ecuación 3.51, agregamos la definición de las variables de Mandelstam  $s_{ij}$ , de la forma siguiente (9):

$$\begin{aligned} s_{ij} &= -(k_i + p_j)^2 \\ &= \langle k_i p_j \rangle [p_j k_i]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Usaremos las Reglas de Feynman, dentro del Formalismo de espinores de helicidad con sus principales objetos matemáticos los twistores, expresando todo lo que el diagrama nos indica en términos de esos twistores. Los 4-vectores de polarización  $\varepsilon_{\lambda_i}^{\mu*}$  y  $\varepsilon_{\lambda_i}^{\mu}$  ( $\lambda_i$  representa la helicidad) de los fotones entrantes o salientes en términos de twistores se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_+^{\mu}(k) &= -\frac{\langle q | \gamma^{\mu} | k \rangle}{\sqrt{2} \langle q k \rangle}, \\ \varepsilon_-^{\mu}(k) &= -\frac{[q | \gamma^{\mu} | k \rangle}{\sqrt{2} [q k]}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

### 3.6. MÉTODOS PERTURBATIVOS MODERNOS EN LA TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS 29

Donde  $q$  es un momento de referencia arbitrario no masivo.

Es conveniente tener las expresiones para  $\not{\epsilon}_{\pm}(k)$ , ya que aparecen al escribir las amplitudes usando las reglas de Feynman; así

$$\begin{aligned}\not{\epsilon}_+(k; p) &= \frac{\sqrt{2}}{\langle q k \rangle} (|k\rangle \langle q| + |q\rangle [k]), \\ \not{\epsilon}_-(k; p) &= \frac{\sqrt{2}}{[q k]} (|k\rangle [q] + |q\rangle \langle k|).\end{aligned}\tag{3.55}$$

Recordando de las secciones 3.4.1 y 3.4.2,  $\Gamma \propto |\mathcal{M}|^2$  y  $\sigma \propto |\mathcal{M}|^2$ , por lo que es indispensable conocer cómo calcular el valor esperado del cuadrado del módulo de la amplitud utilizando el FHE, esto es de la siguiente forma:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \alpha \sum_{\lambda} |\mathcal{M}_{\lambda_1 \dots \lambda_n}|^2,\tag{3.56}$$

donde el factor  $\alpha$  se incluye porque se quiere el promedio sobre los espines iniciales y depende de la cantidad de partículas y sus dos posibles orientaciones.

Partiendo de este conjunto de principios fundamentales del FEH, es posible comenzar a implementarlo para el cálculo de amplitudes de dispersión en casi cualquier proceso de dispersión en el Modelo Estándar de partículas elementales o bien en física más allá del Modelo Estándar de partículas elementales ; además en el resto de esta tesis se muestra la eficiencia y el poder de cálculo del FEH, en comparación al método tradicional descrito en la sección anterior.

#### 3.6.3. Formalismo de Espinores de Helicidad (caso con masa)

A manera de ilustrar las virtudes del formalismo de helicidad, en esta sección, introducimos el Formalismo de Espinores de Helicidad para partículas con masa (32), considerando los casos donde físicamente la masa de las partículas no es despreciable comparado con la energía del centro de masa, como es el caso del quark top (masa del quark top  $m_t = 173,34 GeV/c^2$ ). Comenzamos recordando la ecuación de Dirac mostrada en la sección anterior como ecuación (3.43), cuyas soluciones exactas, son expresadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
u_+(p) &= \frac{m}{[rq]}|q\rangle + |r\rangle, & u_-(p) &= |r\rangle + \frac{m}{\langle rq\rangle}|q\rangle, \\
v_-(p) &= -\frac{m}{[rq]}|q\rangle + |r\rangle, & v_+(p) &= |r\rangle - \frac{m}{\langle rq\rangle}|q\rangle, \\
\bar{u}_-(p) &= \frac{m}{[qr]}[q| + \langle r|, & \bar{u}_+(p) &= [r| + \frac{m}{\langle qr\rangle}\langle q|, \\
\bar{v}_+(p) &= -\frac{m}{[qr]}[q| + \langle r|, & \bar{v}_-(p) &= [r| - \frac{m}{\langle qr\rangle}\langle q|;
\end{aligned} \tag{3.57}$$

donde  $m$  representa la masa de la partícula,  $p$  es el cuadrimento de la partícula,  $|q\rangle$ ,  $|r\rangle$ ,  $[q]$  y  $[r]$  son espinores con cuadrimento  $r^2 = q^2 = 0$ , sin masa y que cumplen todas las propiedades descritas en la sección 3.6.1. La relación entre  $q$ ,  $r$  y  $p$  es la siguiente:

$$p = q + \frac{m^2}{2q \cdot r}r \tag{3.58}$$

Este conjunto de soluciones se describen en esta sección y serán de extrema importancia para su implementación en el próximo capítulo.

## 3.7. Cálculo de procesos

En esta sección retomamos el proceso de dispersión electrón-muón ( $e^- + \mu \rightarrow e^- + \mu$ ) y el cálculo de su amplitud de dispersión, implementando el Formalismo de Espinores de Helicidad (caso sin masa). El resultado obtenido en esta sección, lo comparamos con el presentado en la sección 3.5.2 utilizando Tecnología de traza.

Además en esta sección se presenta otro ejemplo de la implementación del FEH, en el cálculo de la amplitud de dispersión del proceso electrón-electrón ( $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$ ), con el objetivo de familiarizar al lector con los principios o reglas utilizados en este método perturbativo moderno como es el FEH.

### 3.7.1. Dispersión Electrón - Muón ( $e^- + \mu \rightarrow e^- + \mu$ )

Considerando el diagrama mostrado en la figura 3.5.1, por conservación de momento sabemos que  $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ , aplicando las reglas de Feynman encontramos que la amplitud de dispersión es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} &= [\bar{u}_{\lambda_3}(3)\gamma^\mu u_{\lambda_1}(1)][ig_e]^2 i \left[ \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right] [\bar{u}_{\lambda_4}(4)\gamma^\nu u_{\lambda_2}(2)] \\
&= -\frac{g_e^2}{q^2} [\bar{u}_{\lambda_3}(3)\gamma^\mu u_{\lambda_1}(1)][\bar{u}_{\lambda_4}(4)\gamma_\nu u_{\lambda_2}(2)].
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Escribiendo  $u$  y  $\bar{u}$  en términos de variables espinoriales (como se muestra en la ecuación 3.45) y tomando las diferentes combinaciones de helicidad, se obtiene lo siguiente:

$$\bar{u}_+(3)\gamma^\mu u_+(1) = [3|\gamma^\mu|1], \tag{3.60}$$

$$\bar{u}_+(3)\gamma^\mu u_-(1) = [3|\gamma^\mu|1] = 0, \tag{3.61}$$

$$\bar{u}_-(3)\gamma^\mu u_+(1) = \langle 3|\gamma^\mu|1\rangle = 0, \tag{3.62}$$

$$\bar{u}_-(3)\gamma^\mu u_-(1) = \langle 3|\gamma^\mu|1\rangle. \tag{3.63}$$

De igual forma tenemos las siguientes expresiones:

$$\bar{u}_+(4)\gamma_\nu u_+(2) = [4|\gamma_\nu|2], \tag{3.64}$$

$$\bar{u}_+(4)\gamma_\nu u_-(2) = [4|\gamma_\nu|2] = 0, \tag{3.65}$$

$$\bar{u}_-(4)\gamma_\nu u_+(2) = \langle 4|\gamma_\nu|2\rangle = 0, \tag{3.66}$$

$$\bar{u}_-(4)\gamma_\nu u_-(2) = \langle 4|\gamma_\nu|2\rangle. \tag{3.67}$$

Existen 16 combinaciones de helicidad en la amplitud 3.59, si tomamos por ejemplo la amplitud  $\mathcal{M}_{++--}$ , y considerando la implementación de los principios del FEH en las ecuaciones 3.62 y 3.66 tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{++--} &= [3|\gamma^\mu|1]\langle 4|\gamma_\nu|2\rangle \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

De igual forma tenemos que las otras combinaciones nulas son:  $\mathcal{M}_{++++}$ ,  $\mathcal{M}_{-+++}$ ,  $\mathcal{M}_{-+-}$ ,  $\mathcal{M}_{--++}$ ,  $\mathcal{M}_{--+-}$ ,  $\mathcal{M}_{+---}$ ,  $\mathcal{M}_{+----}$ ,  $\mathcal{M}_{+++-}$ ,  $\mathcal{M}_{+-}$ ,  $\mathcal{M}_{----}$ ,  $\mathcal{M}_{+---}$ .

Las únicas combinaciones de helicidad no nulas para la amplitud de la ecuación 3.59 son las siguientes:

$$\mathcal{M}_{++++}, \mathcal{M}_{----}, \mathcal{M}_{+--+}, \mathcal{M}_{-+-+}.$$

Del diagrama de Feynman mostrado en la figura 3.5.1, podemos deducir que  $q = p_1 - p_3$  y sustituyendo en la ecuación 3.59, las variables espinoriales de las ecuaciones 3.60 y 3.64 se obtiene:

$$\mathcal{M}_{++++} = \frac{-g_e^2}{(p_1 - p_3)^2} [3 | \gamma^\mu | 1 \rangle [4 | \gamma_\nu | 2 \rangle = \frac{-2g_e^2}{\langle 13 \rangle [31]} \langle 12 \rangle [34], \quad (3.69)$$

de acuerdo a la ecuación 3.51, tomamos  $(p_1 - p_3)^2 = \langle 13 \rangle [31]$ . De manera análoga es posible expresar las tres restantes amplitudes de dispersión de la siguiente forma:

$$\mathcal{M}_{----} = \frac{-2g_e^2}{\langle 13 \rangle [31]} \langle 34 \rangle [12], \quad (3.70)$$

$$\mathcal{M}_{+--+} = \frac{-2g_e^2}{\langle 13 \rangle [31]} \langle 14 \rangle [32], \quad (3.71)$$

$$\mathcal{M}_{-+-+} = \frac{-2g_e^2}{\langle 13 \rangle [31]} \langle 32 \rangle [14]. \quad (3.72)$$

Es necesario calcular el cuadrado de cada una de las anteriores amplitudes de dispersión y aplicar lo descrito en la ecuación 3.56, para poder comparar con el resultado obtenido en la sección 3.5.2. Por lo que a continuación se detallan dichos cálculos.

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{++++}|^2 &= (\mathcal{M}_{++++})(\mathcal{M}_{++++})^* \\ &= g_e^4 \frac{2\langle 12 \rangle [34]}{\langle 13 \rangle [31]} \frac{2\langle 34 \rangle [12]}{\langle 13 \rangle [31]} \\ &= g_e^4 \frac{4s_{12}s_{34}}{(s_{13})^2}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

No es necesario realizar un cálculo para obtener  $|\mathcal{M}_{----}|^2$  ya que  $|\mathcal{M}_{----}|^2 = |\mathcal{M}_{++++}|^2$ .

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{+--+}|^2 &= (\mathcal{M}_{+--+})(\mathcal{M}_{+--+})^* \\ &= g_e^4 \frac{2\langle 14 \rangle [32]}{\langle 13 \rangle [31]} \frac{2\langle 23 \rangle [41]}{\langle 13 \rangle [31]} \\ &= g_e^4 \frac{4s_{14}s_{23}}{(s_{13})^2}, \end{aligned} \quad (3.74)$$

tomando  $|\mathcal{M}_{+--+}|^2 = |\mathcal{M}_{-++-}|^2$  entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{g_e^4}{4} (2|\mathcal{M}_{++++}|^2 + 2|\mathcal{M}_{+--+}|^2) \\ &= \frac{g_e^4}{4} \left( \frac{8s_{12}s_{34}}{(s_{13})^2} + \frac{8s_{14}s_{23}}{(s_{13})^2} \right). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Como  $s_{12} = -2p_1 \cdot p_2$ ,  $s_{14} = -2p_1 \cdot p_4$ ,  $s_{23} = -2p_2 \cdot p_3$ ,  $s_{34} = -2p_3 \cdot p_4$  y  $s_{13} = (p_1 - p_3)^2$ , por lo tanto:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{8g_e^4}{(p_1 - p_3)^4} [(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)]. \quad (3.76)$$

Debemos recordar que hemos aplicado el FEH en este caso tomando partículas sin masa, por lo que al comparar el resultado obtenido en la ecuación 3.76, con el obtenido en la ecuación 3.42, eliminamos los términos dependientes de la masa de las partículas y podremos notar la igualdad de ambos resultados.

### 3.7.2. Dispersión Electrón - Electrón ( $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$ )

Al inicio de esta sección indicamos que pretendemos mostrar la aplicación del FEH en otro proceso de dispersión ya conocido dentro de la literatura de Física de Partículas, por lo que consideraremos el procesos de dispersión Electrón-Electrón ( $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$ ) cuyo diagrama se muestra en la figura 3.7.1.

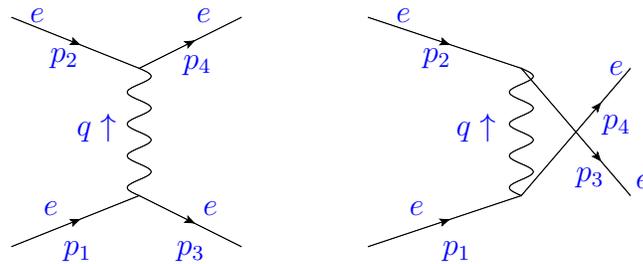


Figura 3.7.1: Diagrama (a) de dispersión electrón - electrón ( $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$ ).

A continuación se muestra el cálculo de la amplitud de dispersión de dicho proceso, implementando el FEH. Partimos de la aplicación de las reglas de Feynman a ambos diagramas (figura 3.7.1), obteniendo la amplitud de dispersión  $\mathcal{M}$ , de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} &= -\frac{g_e^2}{q^2} [\bar{u}_{\lambda_3}(3)\gamma^\mu u_{\lambda_1}(1)][\bar{u}_{\lambda_4}(4)\gamma_\nu u_{\lambda_2}(2)] \\ &\quad + \frac{g_e^2}{q^2} [\bar{u}_{\lambda_4}(4)\gamma^\mu u_{\lambda_1}(1)][\bar{u}_{\lambda_3}(3)\gamma_\nu u_{\lambda_2}(2)]. \end{aligned} \quad (3.77)$$

El primer término de la ecuación 3.77, es idéntico a la ecuación (3.59) por lo que conservamos la combinación de helicidades descritas en la dispersión Electrón - Muón, utilizaremos el índice  $a$  para indicar que corresponden al primer término de la amplitud; y son las siguientes:

$$\mathcal{M}_{++++}^a = \frac{-2g_e^2}{\langle 13 \rangle [31]} \langle 12 \rangle [34], \quad (3.78)$$

$$\mathcal{M}_{----}^a = \frac{-2g_e^2}{\langle 13 \rangle [31]} \langle 34 \rangle [12], \quad (3.79)$$

$$\mathcal{M}_{+--+}^a = \frac{-2g_e^2}{\langle 13 \rangle [31]} \langle 14 \rangle [32], \quad (3.80)$$

$$\mathcal{M}_{-+++}^a = \frac{-2g_e^2}{\langle 13 \rangle [31]} \langle 32 \rangle [14]. \quad (3.81)$$

Las combinaciones no nulas para las amplitudes de helicidad del segundo término, utilizamos índice  $b$  para diferenciarlas y relacionarlas a dicho término de la amplitud de la ecuación 3.77 y son:

$$\mathcal{M}_{++++}^b, \mathcal{M}_{----}^b, \mathcal{M}_{+--+}^b, \mathcal{M}_{-+++}^b.$$

Al reemplazar en términos de variables espinoriales se obtiene:

$$\mathcal{M}_{++++}^b = \frac{2g_e^2}{\langle 14 \rangle [41]} \langle 12 \rangle [43], \quad (3.82)$$

$$\mathcal{M}_{----}^b = \frac{2g_e^2}{\langle 14 \rangle [41]} \langle 34 \rangle [12], \quad (3.83)$$

$$\mathcal{M}_{+--+}^b = \frac{2g_e^2}{\langle 14 \rangle [41]} \langle 42 \rangle [13], \quad (3.84)$$

$$\mathcal{M}_{-+++}^b = \frac{2g_e^2}{\langle 14 \rangle [41]} \langle 13 \rangle [42]. \quad (3.85)$$

Dado que tenemos combinaciones de helicidades iguales para ambos diagramas (3.7.1), eso se interpreta como una interferencia, como en el caso de  $\mathcal{M}_{++++}^a + \mathcal{M}_{++++}^b$ , sumando ambas, expresamos una sola amplitud  $\mathcal{M}_{++++}$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{++++} &= -\frac{2g_e^2}{\langle 13 \rangle [31]} \langle 12 \rangle [34] + \frac{2g_e^2}{\langle 14 \rangle [41]} \langle 12 \rangle [43] \\
&= -2g_e^2 \langle 13 \rangle [31] \langle 12 \rangle [34] \left( \frac{1}{s_{14}} + \frac{1}{s_{13}} \right) \\
&= -2g_e^2 \langle 13 \rangle [31] \langle 12 \rangle [34] \left( \frac{s_{14} + s_{13}}{s_{14}s_{13}} \right). \tag{3.86}
\end{aligned}$$

De igual manera reconocemos la interferencia entre las amplitudes  $\mathcal{M}_{----}^a$ ,  $\mathcal{M}_{----}^b$  y aplicando el mismo proceso que en la ecuación 3.86, obtenemos una sola amplitud  $\mathcal{M}_{----}$ , así:

$$\mathcal{M}_{----} = -2g_e^2 \langle 14 \rangle [41] \langle 34 \rangle [12] \left( \frac{s_{14} + s_{13}}{s_{14}s_{13}} \right) \tag{3.87}$$

Al no haber interferencia entre las amplitudes de helicidad de las ecuaciones 3.80, 3.81, 3.84 y 3.85, eliminamos los índices  $a$  y  $b$  y las nombramos respectivamente de ahora en adelante como:  $\mathcal{M}_{+--+}$ ,  $\mathcal{M}_{-+-+}$ ,  $\mathcal{M}_{-++-}$ ,  $\mathcal{M}_{+---}$ .

Al calcular el cuadrado del módulo de cada amplitud de helicidad, que se ha obtenido para este proceso de dispersión, notamos que:  $|\mathcal{M}_{++++}|^2 = |\mathcal{M}_{----}|^2$ ,  $|\mathcal{M}_{+--+}|^2 = |\mathcal{M}_{-+-+}|^2$ ,  $|\mathcal{M}_{-++-}|^2 = |\mathcal{M}_{+---}|^2$ . Escribiendo esos módulos cuadrados en términos de las variables de Mandelstam de la ecuación 3.53 y sustituyendo en la ecuación 3.56, se obtiene que el valor esperado del módulo cuadrado de la amplitud de dispersión es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{4} (2|\mathcal{M}_{++++}|^2 + 2|\mathcal{M}_{+--+}|^2 + 2|\mathcal{M}_{-+-+}|^2) \\
&= 2g_e^4 \left( \frac{s_{34}s_{12}(s_{13} + s_{14})^2}{s_{14}^2 s_{13}^2} + \frac{s_{23}s_{14}}{s_{13}^2} + \frac{s_{24}s_{13}}{s_{14}^2} \right) \\
&= 2g_e^4 \left( \frac{s_{34}s_{12}(s_{13} + s_{14})^2 + s_{23}s_{14}^3 + s_{24}s_{13}^3}{s_{14}^2 s_{13}^2} \right). \tag{3.88}
\end{aligned}$$

Por conservación de momento sabemos que  $p_1 \cdot p_2 = p_3 \cdot p_4$ ,  $p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_4$ ,  $p_1 \cdot p_4 = p_2 \cdot p_3$  y de la ecuación 3.53 sabemos que  $s_{ij} = p_i \cdot p_j$ , podemos sustituir en la ecuación (3.88) para finalmente obtener:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{2g_e^4}{(p_1 \cdot p_3)^2 (p_1 \cdot p_4)^2} [(p_1 \cdot p_2)^4 + (p_1 \cdot p_4)^4 + (p_1 \cdot p_3)^4]. \tag{3.89}$$

Finalmente con la ecuación 3.89 llegamos al resultado buscado del valor esperado del módulo cuadrado de la amplitud de dispersión del proceso  $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$ ; dicho resultado es el conocido en la literatura, calculado con Tecnología de traza (7). Además se ha ampliado los ejemplos de la implementación y a la vez la eficiencia del FEH en el caso sin masa.

En el siguiente capítulo, se presenta los aportes principales de esta tesis, los cuales son los siguientes:

- Cálculo de  $X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}h$  utilizando el Teorema de Bajas Energías, partiendo de un diagrama  $X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}$ .
- Cálculo directo de  $X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}h$  utilizando el formalismo de helicidad. Las reglas de Feynman son tomadas de la referencia (11).

## Capítulo 4

# Producción de partículas del Modelo Estándar a partir de aniquilación de materia oscura

En este capítulo, se calcula la amplitud de dispersión de la aniquilación de materia oscura fermiónica a fermión - antifermión. Se aplica el Teorema de Bajas Energías y además se analiza la aniquilación de materia oscura produciendo tres cuerpos en el estado final, es decir  $XX \rightarrow f\bar{f}h$ . Nuestros resultados son originales, en el sentido que son calculados por primera vez con un método perturbativo moderno. Al final del capítulo mostramos como coinciden con resultados previos utilizando técnicas tradicionales.

### 4.1. Teorema de bajas energías

Consideremos el proceso de aniquilación de dos partículas de materia oscura en el estado inicial que producen un par de fermión - antifermión ( $XX \rightarrow f\bar{f}$ ), como se muestra en la Figura 4.1.1.

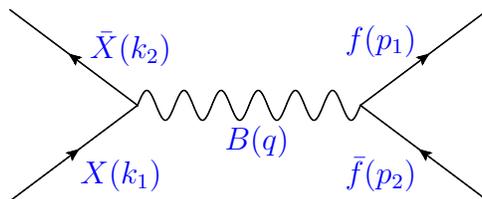


Figura 4.1.1: Diagrama de dispersión  $X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}$ .

De acuerdo al diagrama de la figura 4.1.1, por conservación de los cuadrimomento tenemos las siguientes ecuaciones:

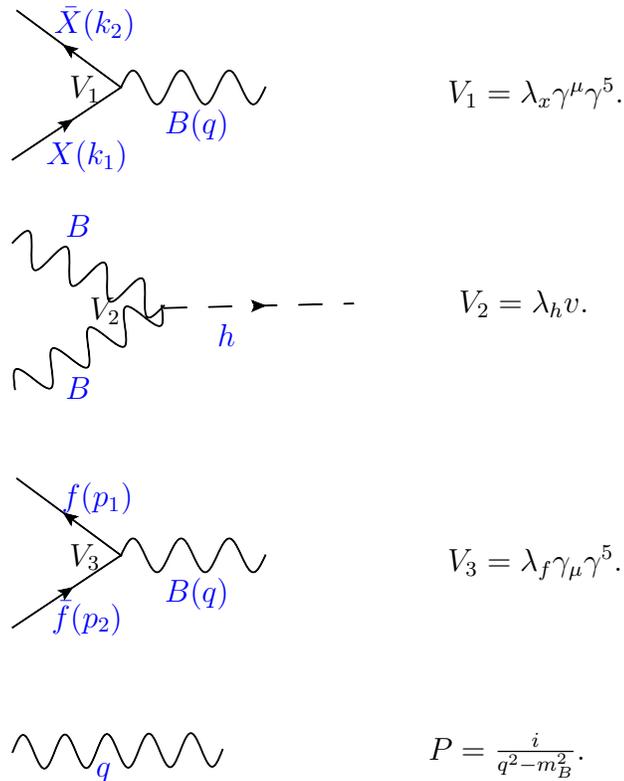
$$k_1 + k_2 = q, \tag{4.1}$$

$$q = p_3 + p_4,$$

y por tanto :

$$k_1 + k_2 = p_3 + p_4. \tag{4.2}$$

Además, es posible establecer la amplitud de dispersión del proceso, aplicando las siguientes reglas de Feynman (11)



Tomando los vértices  $V_1$  y  $V_3$  y el propagador  $P$ , expresamos la amplitud de dispersión del proceso  $X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}$  (Figura: 4.1.1) de la siguiente forma:

Figura 4.1.2: Reglas de Feynman para el proceso  $X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}$ 

$$\mathcal{M}(X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}) = i\lambda_x\lambda_f[\bar{v}(k_2)\gamma^\mu\gamma^5u(k_1)]\frac{1}{q^2 - m_B^2}[\bar{u}(p_4)\gamma_\mu\gamma^5v(p_3)], \quad (4.3)$$

donde  $\lambda_x$  y  $\lambda_f$  son las respectivas constantes de acoplamiento de los vértices. Tomando una de las equivalencias para  $q$  de la ecuación 4.1 y sustituyendo en la ecuación 4.3 tenemos:

$$\mathcal{M}(X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}) = i\lambda_x\lambda_f\frac{[\bar{v}(k_2)\gamma^\mu\gamma^5u(k_1)][\bar{u}(p_4)\gamma_\mu\gamma^5v(p_3)]}{(k_1 + k_2)^2 - m_B^2}. \quad (4.4)$$

El Teorema de baja energía (LET, por sus siglas en inglés), relaciona las amplitudes de dos procesos de dispersión cuya diferencia es que en uno de ellos se incluye o identifica en el estado final un Bosón de Higgs (Campo constante  $\phi^0$ ) con cuádrimomento tendiendo a cero (33). El efecto de un campo constante ( $\phi^0$ ) es equivalente a redefinir todos los parámetros de masa, permitiendo establecer el **Teorema de Baja Energía** (33) de la siguiente forma:

$$\frac{1}{v}\left(\sum_f m_f \frac{\partial}{\partial m_f} + \sum_V m_V \frac{\partial}{\partial m_V}\right)\mathcal{M}(A \rightarrow B) = \lim_{p_\phi \rightarrow 0} \mathcal{M}(A \rightarrow B + \phi^0). \quad (4.5)$$

Donde  $v \equiv (\sqrt{2}G_F)^{-\frac{1}{2}} = 2m_W/g \approx 246\text{GeV}$  y las sumatorias se realizan sobre todos los fermiones y sobre todos los bosones del proceso.

Particularmente para el proceso de dispersión presentando en esta sección, diagramáticamente la aplicación del LET se representa de la siguiente forma:

$$\frac{1}{v}\left(\sum_f m_f \frac{\partial}{\partial m_f} + \sum_V m_V \frac{\partial}{\partial m_V}\right) \begin{array}{c} \bar{X} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ X \end{array} \begin{array}{c} f \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ \bar{f} \end{array} \begin{array}{c} B \\ \text{---} \\ B \end{array} = \lim_{p_\phi \rightarrow 0} \begin{array}{c} \bar{X} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ X \end{array} \begin{array}{c} f \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ \bar{f} \end{array} \begin{array}{c} B \\ \text{---} \\ B \end{array} \begin{array}{c} h \\ \text{---} \\ h \end{array}$$

Figura 4.1.3: Diagrama aplicación de LET :  $\mathcal{M}(X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}) \leftrightarrow \mathcal{M}(X\bar{X} \rightarrow f\bar{f} + h)$ 

Aplicando LET a la amplitud de dispersión de la ecuación 4.4, obtenemos el resultado si-

guiente:

$$i\lambda_x\lambda_f[\bar{v}(k_2)\gamma^\mu\gamma^5u(k_1)][\bar{u}(p_4)\gamma_\mu\gamma^5v(p_3)]\frac{m_B}{v}\left[\frac{\partial}{\partial m_B}\left(\frac{1}{(k_1+k_2)^2-m_B^2}\right)\right]=$$

$$i\lambda_x\lambda_f\left(\frac{2m_B^2}{v}\right)[\bar{v}(k_2)\gamma^\mu\gamma^5u(k_1)][\bar{u}(p_4)\gamma_\mu\gamma^5v(p_3)]\frac{1}{((k_1+k_2)^2-m_B^2)^2}, \quad (4.6)$$

considerando la ecuación 4.2 podemos reescribir la ecuación 4.6 de la siguiente forma:

$$i\lambda_x\lambda_f(\lambda_h v_{ew})\frac{[\bar{v}(k_2)\gamma^\mu\gamma^5u(k_1)][\bar{u}(p_4)\gamma_\mu\gamma^5v(p_3)]}{[(k_1+k_2)^2-m_B^2][(p_3+p_4)^2-m_B^2]}=\mathcal{M}(X\bar{X}\rightarrow f\bar{f}h), \quad (4.7)$$

donde  $\lambda_h = \frac{2m_B^2}{v^2}$ .

En el proceso  $X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}h$ , dos partículas de materia oscura se aniquilan produciendo dos partículas fermiónicas del Modelo Estándar (fermion / anti-fermion) y emitiendo además en el proceso un bosón de Higgs. La partícula mediadora en este proceso es  $B_\mu$  un bosón de spin-1.

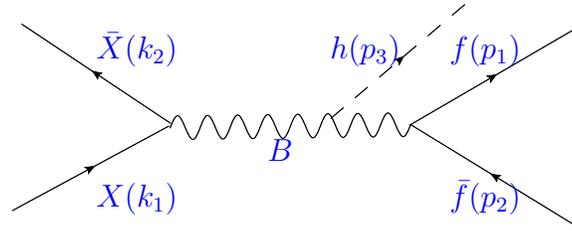
El Lagrangiano que describe este acoplamiento (11) es:

$$\mathcal{L} = \frac{\lambda X}{2}\bar{X}\gamma^\mu\gamma^5XB_\mu + \lambda_f\bar{f}\gamma_\mu(\sin\theta + \cos\theta\gamma^5)fB_\mu + \frac{\lambda h}{4}H^2B^\mu B_\mu, \quad (4.8)$$

En las siguientes secciones tomaremos este escenario ya que está mucho menos limitado para las búsquedas del LHC, también arroja predicciones para los espectros de rayos cósmicos que surgen de la aniquilación de materia oscura que pueden utilizarse en búsquedas indirectas (11).

## 4.2. Amplitud de Dispersión $X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}h$ (Caso sin masa)

En esta sección centramos la atención en el proceso de dispersión  $X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}h$ , calculamos sus amplitudes de helicidad aplicando los principios del Formalismos de Espinores de Helicidad en el caso sin masa; para representar dicho proceso de dispersión utilizaremos el siguiente diagrama.


 Figura 4.2.1: Diagrama de dispersión  $X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}h$ .

En la sección 4.1 a partir de las Reglas de Feynman y la aplicación de LET, se calculó la amplitud de dispersión  $\mathcal{M}(X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}h)$  y es la siguiente:

$$\mathcal{M}(X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}h) = \lambda_x \lambda_f (i\lambda_h v_{ew}) \frac{[\bar{v}(k_2)\gamma^\mu \gamma^5 u(k_1)][\bar{u}(p_1)\gamma_\mu \gamma^5 v(p_2)]}{[(k_1 + k_2)^2 - m_B^2][(p_1 + p_2)^2 - m_B^2]}. \quad (4.9)$$

Recordemos que

$$\gamma^5 = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

además

$$\begin{aligned} u_-(p) &= \begin{pmatrix} |p\rangle \\ 0 \end{pmatrix}; & u_+(p) &= \begin{pmatrix} 0 \\ |p\rangle \end{pmatrix}; \\ v_-(p) &= \begin{pmatrix} 0 \\ |p\rangle \end{pmatrix}; & v_+(p) &= \begin{pmatrix} |p\rangle \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \gamma^5 u_+(p) &= |p\rangle; & \gamma^5 u_-(p) &= -|p\rangle; \\ \gamma^5 v_+(p) &= -|p\rangle; & \gamma^5 v_-(p) &= |p\rangle. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Haciendo las combinaciones de helicidad de los factores del numerador de la amplitud de la ecuación 4.9, obtenemos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \bar{v}_+(2)\gamma^\mu \gamma^5 u_+(1) &= \langle 2|\gamma^\mu|1\rangle = 0, \\ \bar{v}_+(2)\gamma^\mu \gamma^5 u_-(1) &= -\langle 2|\gamma^\mu|1\rangle, \\ \bar{v}_-(2)\gamma^\mu \gamma^5 u_+(1) &= [2|\gamma^\mu|1\rangle, \\ \bar{v}_-(2)\gamma^\mu \gamma^5 u_-(1) &= -[2|\gamma^\mu|1\rangle = 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

además,

$$\begin{aligned}
\bar{u}_+(4)\gamma^\mu\gamma^5v_+(3) &= -[4|\gamma^\mu|3] = 0, \\
\bar{u}_+(4)\gamma^\mu\gamma^5v_-(3) &= [4|\gamma^\mu|3], \\
\bar{u}_-(4)\gamma^\mu\gamma^5v_+(3) &= -\langle 4|\gamma^\mu|3\rangle, \\
\bar{u}_-(4)\gamma^\mu\gamma^5v_-(3) &= \langle 4|\gamma^\mu|3\rangle = 0.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Para lo que sigue conviene hacer la siguiente sustitución:  $\beta = \frac{\lambda_x\lambda_f(i\lambda_h v_{ew})}{[(k_1+k_2)^2-m_B^2][(p_3+p_4)^2-m_B^2]}$  en la ecuación 4.9. Considerando todas las posibles combinaciones de helicidad en la amplitud de la ecuación 4.9 y el álgebra de los espinores de 4.13 - 4.14 nos damos cuenta que las únicas combinaciones de helicidad no nulas (de un total de 16) son las siguientes:

$$\mathcal{M}_{-++-} = 2\beta\langle 24\rangle[13], \tag{4.15}$$

$$\mathcal{M}_{-+++} = -2\beta\langle 23\rangle[14], \tag{4.16}$$

$$\mathcal{M}_{+--+} = 2\beta[24]\langle 13\rangle, \tag{4.17}$$

$$\mathcal{M}_{+--} = -2\beta[23]\langle 14\rangle. \tag{4.18}$$

De acuerdo a la ecuación 3.56, es necesario conocer el promedio del módulo cuadrado de las amplitudes del proceso  $X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}h$ , por lo que debemos calcular los módulos cuadrados de cada amplitud de helicidad de 4.15 - 4.18. Calculando los cuadrados de esas amplitudes de helicidad encontramos:

$$|\mathcal{M}_{-++-}|^2 = 4\beta^2\langle 24\rangle[42]\langle 31\rangle[13], \tag{4.19}$$

$$|\mathcal{M}_{-+++}|^2 = 4\beta^2\langle 23\rangle[32]\langle 41\rangle[14]. \tag{4.20}$$

Considerando  $\langle ij\rangle[ji] = s_{ij} = -(p_i + p_j)^2$  y que  $|\mathcal{M}_{+--+}|^2 = |\mathcal{M}_{-++-}|^2$  y  $|\mathcal{M}_{-+++}|^2 = |\mathcal{M}_{+--+}|^2$ .

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{4}(2|\mathcal{M}_{-+++}|^2 + 2|\mathcal{M}_{-++-}|^2), \\
&= 2\beta^2(s_{23}s_{14} + s_{24}s_{13}), \\
&= 2\beta^2[(-2k_2 \cdot p_3)(-2k_1 \cdot p_4) + (-2k_2 \cdot p_4)(-2k_1 \cdot p_3)].
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Finalmente se obtiene

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 8 (\lambda_x \lambda_f (i\lambda_h v_{ew}))^2 \frac{(k_2 \cdot p_3)(k_1 \cdot p_4) + (k_2 \cdot p_4)(k_1 \cdot p_3)}{[(k_1 + k_2)^2 - m_B^2]^2 [(p_3 + p_4)^2 - m_B^2]^2}. \quad (4.22)$$

Este resultado viene de la aplicación de LET, en la siguiente sección consideramos todos los acoplamientos desde el inicio.

### 4.3. Amplitud de dispersión proceso $X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}h$

#### 4.3.1. Escenario de materia oscura con masa y fermiones sin masa

En esta sección se describe el proceso del cálculo del cuadrado de la amplitud de dispersión del proceso  $X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}h$ , considerando en el estado inicial dos partículas de materia oscura (DM) con masa  $m_x$  y en el estado final dos fermiones sin masa, además del bosón de Higgs. Para aplicar el Formalismo de Espinores de Helicidad, al igual que en la sección anterior partimos de la amplitud de dispersión ya conocida

$$\mathcal{M}(X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}h) = \lambda_x \lambda_f (i\lambda_h v_{ew}) \frac{[\bar{v}(k_2)\gamma^\mu\gamma^5 u(k_1)][\bar{u}(p_4)\gamma_\mu\gamma^5 v(p_3)]}{[(k_1 + k_2)^2 - m_B^2][(p_3 + p_4)^2 - m_B^2]}. \quad (4.23)$$

Conservamos de la sección anterior en el estado final los fermiones sin masa, por lo que tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{u}_+(4)\gamma^\mu\gamma^5 v_+(3) &= -[4|\gamma^\mu|3] = 0, \\ \bar{u}_+(4)\gamma^\mu\gamma^5 v_-(3) &= [4|\gamma^\mu|3], \\ \bar{u}_-(4)\gamma^\mu\gamma^5 v_+(3) &= -\langle 4|\gamma^\mu|3 \rangle, \\ \bar{u}_-(4)\gamma^\mu\gamma^5 v_-(3) &= \langle 4|\gamma^\mu|3 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

De donde podemos diferenciar algunas combinaciones de helicidades que serán nulas.

Considerando que tenemos en el estado inicial partículas con masa, tomamos:

$$\begin{aligned} u_+(p) &= \frac{m}{[rq]}|q\rangle + |r\rangle, & u_-(p) &= |r\rangle + \frac{m}{\langle rq\rangle}|q\rangle, \\ \bar{v}_+(p) &= -\frac{m}{[qr]}[q| + \langle r|, & \bar{v}_-(p) &= [r| - \frac{m}{\langle qr\rangle}\langle q|. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Es conveniente como en la sección anterior, realizar la siguiente sustitución:

$$\beta = \frac{\lambda_x \lambda_f (i \lambda_h v_{ew})}{[(k_1 + k_2)^2 - m_B^2][(p_3 + p_4)^2 - m_B^2]}, \quad (4.26)$$

de las amplitudes de helicidad resultantes de las combinaciones de helicidad  $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$  las que son no nulas son las siguientes:

$$\mathcal{M}_{++++} = -2m_x \beta \left( \frac{[q_2 4] \langle r_1 3 \rangle}{[q_2 r_2]} + \frac{\langle r_2 3 \rangle [q_1 4]}{[r_1 q_1]} \right), \quad (4.27)$$

$$\mathcal{M}_{+++-} = 2m_x \beta \left( \frac{[q_2 3] \langle r_1 4 \rangle}{[q_2 r_2]} + \frac{\langle r_2 4 \rangle [q_1 3]}{[r_1 q_1]} \right), \quad (4.28)$$

$$\mathcal{M}_{+--+} = -2\beta \left( \frac{m_x^2 [q_2 4] \langle q_1 3 \rangle}{[q_2 r_2] \langle r_1 q_1 \rangle} + \langle r_2 3 \rangle [r_1 4] \right), \quad (4.29)$$

$$\mathcal{M}_{+---} = 2\beta \left( \frac{m_x^2 [q_2 3] \langle q_1 4 \rangle}{[q_2 r_2] \langle r_1 q_1 \rangle} + \langle r_2 4 \rangle [r_1 3] \right), \quad (4.30)$$

$$\mathcal{M}_{-++-} = 2\beta \left( [r_2 4] \langle r_1 3 \rangle + \frac{m_x^2 \langle q_2 3 \rangle [q_1 4]}{\langle q_2 r_2 \rangle [r_1 q_1]} \right), \quad (4.31)$$

$$\mathcal{M}_{-+-+} = -2\beta \left( [r_2 3] \langle r_1 4 \rangle + \frac{m_x^2 \langle q_2 4 \rangle [q_1 3]}{\langle q_2 r_2 \rangle [r_1 q_1]} \right), \quad (4.32)$$

$$\mathcal{M}_{----} = 2m_x \beta \left( \frac{[r_2 4] \langle q_1 3 \rangle}{[r_1 q_1]} + \frac{\langle q_2 3 \rangle [r_1 4]}{[q_2 r_2]} \right), \quad (4.33)$$

$$\mathcal{M}_{-+++} = -2m_x \beta \left( \frac{[r_2 3] \langle q_1 4 \rangle}{[r_1 q_1]} + \frac{\langle q_2 4 \rangle [r_1 3]}{[q_2 r_2]} \right), \quad (4.34)$$

Fijaremos los cuadvectores de referencia  $q_1$  y  $q_2$  como sigue:

$$\begin{aligned} q_1 &= p_4, \\ q_2 &= p_3, \end{aligned} \quad (4.35)$$

esta fijación de  $q_1$  y  $q_2$  nos ayudarán a simplificar los cálculos de los módulos cuadrados de las amplitudes de helicidad de las ecuaciones 4.27 - 4.34, como se muestran en la tabla 4.3.1.

$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$	$\mathcal{M}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$	$ \mathcal{M}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} ^2$
+++-	$-2m_x\beta^2 \frac{[34]\langle r_13 \rangle}{[3r_2]}$	$4m_x^2\beta^2 \frac{s_{r_13}s_{34}}{s_{3r_2}}$
+- -+	$2m_x\beta \frac{\langle r_24 \rangle [43]}{[r_14]}$	$4m_x^2\beta^2 \frac{s_{r_24}s_{34}}{s_{4r_1}}$
+ - + -	$-\frac{2\beta}{\langle r_14 \rangle [3r_2]} (m_x^2 s_{34} - s_{r_23} s_{r_14})$	$\frac{4\beta^2}{s_{r_14} s_{r_23}} (m_x^2 s_{34} - s_{r_23} s_{r_14})^2$
+ - - +	$2\beta \langle r_24 \rangle [r_13]$	$4\beta^2 s_{r_24} s_{r_13}$

Tabla 4.3.1: Combinaciones no nulas de Amplitudes de Helicidad del proceso  $X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}h$ , (fermiones sin masa) y sus respectivos cuadrados.

Por las propiedades del FEH podemos además reconocer lo siguiente:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{++++}|^2 &= |\mathcal{M}_{----}|^2, & |\mathcal{M}_{+++-}|^2 &= |\mathcal{M}_{--+-}|^2, \\ |\mathcal{M}_{+--+}|^2 &= |\mathcal{M}_{-+-+}|^2, & |\mathcal{M}_{+---}|^2 &= |\mathcal{M}_{-+++}|^2, \end{aligned} \quad (4.36)$$

lo que nos permite escribir el valor esperado del cuadrado de la amplitud de dispersión de forma simplificada, esto es como sigue:

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{4} (2|\mathcal{M}_{+--+}|^2 + 2|\mathcal{M}_{++++}|^2 + 2|\mathcal{M}_{+++-}|^2 + 2|\mathcal{M}_{+---}|^2) \\ &= \frac{2\beta^2}{s_{r_14} s_{r_23}} \left[ s_{r_24} s_{r_13} s_{r_14} s_{r_23} + m_x^2 s_{r_24} s_{34} s_{r_23} + m_x^2 s_{r_13} s_{34} s_{r_14} + (m_x^2 s_{34} - s_{r_23} s_{r_14})^2 \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

Recordando  $s_{ij} = -(p_i + p_j)^2 = -2p_i \cdot p_j$  y por conservación de energía-momento

$$k_1 + k_2 = p_3 + p_4 + p_5, \quad (4.38)$$

además

$$p_3^2 = p_4^2 = 0, \quad (4.39)$$

$$p_5^2 = M_h^2, \quad (4.40)$$

donde  $M_h$  es la correspondiente masa del Bosón de Higgs.

En el sistema de referencia del centro de masa estático tenemos lo siguiente:

$$E_X = E_{\bar{X}} = m_x. \quad (4.41)$$

Por tanto, podemos expresar cada una de las  $s_{ij}$  de la ecuación 4.37 de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
s_{4r_1} &= 2E_{\bar{f}}m_x, \\
s_{4r_2} &= -\frac{m_x}{2E_f} (4E_fE_{\bar{f}} + M_h^2 - 4m_xE_h + 4m_x), \\
s_{34} &= M_h^2 - 4m_xE_h + 4m_x^2, \\
s_{3r_1} &= \frac{E_f}{E_{\bar{f}}} s_{4r_2}, \\
s_{3r_2} &= \frac{E_f}{E_{\bar{f}}} s_{4r_1}.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Sustituyendo las expresiones de la ecuaciones de 4.42, en el valor esperado del cuadrado de la amplitud de la ecuación 4.37, obtenemos lo siguiente:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = -[\lambda_x \lambda_f (i\lambda_h v_{ew})]^2 \frac{4m_x^2 [-4E_{\bar{f}}E_f + M_h^2 + 4m_x(-E_h + m_x)]}{[m_B^2 - M_h^2 + 4(E_h - m_x)m_x]^2 (m_B^2 - 4m_x^2)^2} \tag{4.43}$$

donde

$$E_X + E_{\bar{X}} = E_f + E_{\bar{f}} + E_h, \tag{4.44}$$

$$2m_x = E_f + E_{\bar{f}} + E_h, \tag{4.45}$$

$$2 = x_1 + x_2 + x_h. \tag{4.46}$$

Con  $x_1 = \frac{E_f}{m_x}$ ,  $x_2 = \frac{E_{\bar{f}}}{m_x}$ ,  $x_3 = \frac{E_{\bar{f}}}{m_x}$ , si tomamos  $r_h = \left(\frac{M_h}{m_x}\right)^2$  y  $r_B = \left(\frac{m_B}{m_x}\right)^2$  podemos escribir la ecuación (4.43) como:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = -4[\lambda_x \lambda_f (i\lambda_h v_{ew})]^2 \frac{[r_h - 4(-1 + x_1x_2 + x_h)]}{m_x^4 (r_B - 4)^2 (4 - r_B + r_h - 4x_h)^2}. \tag{4.47}$$

Con el propósito de comparar nuestro resultado con el mostrado en (11) de la amplitud de dispersión en el proceso de aniquilación de materia oscura a materia fermiónica ( $X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}h$ ), tomaremos una nueva amplitud que llamaremos  $A$  y calculamos de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{128\pi^3}, \\
&= \frac{[\lambda_x \lambda_f (i\lambda_h v_{ew})]^2}{32\pi^3 m_x^4} \frac{r_h - 4(-1 + x_1x_2 + x_h)}{m_x^4 (r_B - 4)^2 (4 - r_B + r_h - 4x_h)^2}.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

El resultado de la ecuación 4.48 coincide de manera exacta con el encontrado en la referencia (11) donde implementaron el método tradicional a la Feynman; en este trabajo de tesis al aplicar el Formalismo de Espinores de Helicidad, hemos ratificado el valor esperado para la amplitud del proceso. Esperando el mismo pueda ser de utilidad en la profundización de los estudios de materia oscura.

# Capítulo 5

## Conclusiones

1. Se ha implementado el Formalismo de Espinores de Helicidad, que es una herramienta moderna en la Teoría Cuántica de Campos, para calcular observables que pueden ayudar a predecir hipotéticas partículas fermiónicas que posiblemente describan materia oscura.
2. Nuestros resultados muestran que a pesar de trabajar Física de Partículas con interacciones muy complicadas, el Formalismo de Espinores de Helicidad permite hacer los cálculos de observables físicos (medibles experimentalmente) de forma simple y eficiente, teniendo control sobre las diferentes amplitudes de helicidad que nos llevan a resultados que coinciden con cálculos en la literatura realizados previamente con técnicas de Feynman y análisis numérico.
3. En el cálculo de  $X\bar{X} \rightarrow f\bar{f}h$  se encontró dieciseis amplitudes de helicidad, sin embargo al aplicar las propiedades de los productos espinoriales, los cálculos se reducen considerablemente al eliminar aquellas que son nulas (12 combinaciones de helicidades) y las cuatro no nulas resultan ser simples.
4. Hemos demostrado, que si consideramos diagramas de Feynman con cuatro partículas, aplicando el Teorema de Baja Energía, a partir de dicho diagrama obtenemos de forma eficiente y novedosa la amplitud de un diagrama de Feynman que incluye además de las cuatro partículas un bosón de Higgs, coincidiendo dicho resultado con nuestro propio cálculo completo y además con los de la literatura.
5. Nuestro resultado es válido a muy altas energías (caso sin masa), sin embargo, para tener mejor precisión y promover el interés para posteriores estudios experimentales en la Física de Partículas Elementales, también hemos agregado el caso que incluye la

masa de las partículas candidatas a materia oscura fermiónica.

6. Como opción interesante a posteriores estudios, planteamos el reproducir nuestros cálculos utilizando interacciones a partir de simetrías internas del grupo de Lorentz, sin considerar Lagrangianos ni Hamiltonianos de interacción y estudiar las simetrías y lo que eso implica conforme a los nuevos resultados que se han obtenido en los últimos años.

## Bibliografía

- [1] Steven Weinberg. *Frontmatter*, volume 1, pages i–viii. Cambridge University Press, 1995. 4, 7, 13
- [2] Particle Data Group, PA Zyla, RM Barnett, J Beringer, O Dahl, DA Dwyer, DE Groom, C-J Lin, KS Lugovsky, E Pianori, et al. Review of particle physics. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2020(8):083C01, 2020. 4
- [3] S.L. Glashow. Partial symmetries of weak interactions. *arXiv preprint hep-ph/9601359*, 1961. 4, 15
- [4] Abdus Salam and John Clive Ward. Electromagnetic and weak interactions. 1964. 4, 13, 15
- [5] Steven Weinberg. *The quantum theory of fields*, volume 2. Cambridge university press, 1995. 4, 9, 14
- [6] Steven Weinberg. *The quantum theory of fields: volume 3, supersymmetry*. Cambridge university press, 2005. 4
- [7] D Griffiths. Introduction to elementary particles-david griffiths, 2008. 5, 9, 14, 18, 20, 21, 23, 24, 36
- [8] Mark Srednicki. *Quantum field theory*. Cambridge University Press, 2007. 5
- [9] Henriette Elvang and Yu-tin Huang. *Scattering amplitudes in gauge theory and gravity*. Cambridge University Press, 2015. 5, 25, 26, 27, 28
- [10] JL Díaz Cruz, B Larios, O Meza Aldama, and J Reyes Pérez. Espinores de weyl y el formalismo de helicidad. *Revista mexicana de física E*, 61(2):104–112, 2015. 5, 7, 25, 27
- [11] Jason Kumar, Jiajun Liao, and Danny Marfatia. Dark matter annihilation with s-channel internal higgsstrahlung. *Physics Letters B*, 759:277–281, 2016. 5, 36, 38, 40, 46, 47

- [12] Lance Dixon. Calculating scattering amplitudes efficiently. *Phys* 22, 579, 1996. 7, 17, 25
- [13] Raymond A Serway, Clement J Moses, and Curt A Moyer. *Física moderna*. Number 539.1 SER. 2010. 9, 10, 11, 13
- [14] John R Taylor. *Classical mechanics*. University Science Books, 2005. 11
- [15] Marco Antonio Moreira. El modelo estándar de la física de partículas. *Revista Brasileña de Enseñanza de Física*, 31(1):1306, 2009. 13
- [16] Steven Weinberg et al. *The discovery of subatomic particles revised edition*. Cambridge University Press, 2003. 13
- [17] Juerg Beringer et al. Particle data group. *Phys. Rev. D*, 86(010001), 2012. 13, 15
- [18] Peter W Higgs. Broken symmetries, massless particles, and gauge fields. *Phys. Letters*, 12, 1964. 13, 15
- [19] David J Gross. The discovery of asymptotic freedom and the emergence of qcd. *International Journal of Modern Physics A*, 20(25):5717–5740, 2005. 14
- [20] Javier Santaolalla. *El bosón de Higgs no te va a hacer la cama: la física como nunca te la han contado*. La Esfera de los libros, 2016. 14, 15
- [21] Gerard 't Hooft. Partículas elementales. *Barcelona, Crítica*, 2001. 14
- [22] Michael Peskin. *An introduction to quantum field theory*. CRC press, 2018. 14, 15
- [23] John David Jackson. *Classical electrodynamics*, 1999. 15
- [24] Tom WB Kibble. Symmetry breaking in non-abelian gauge theories. *Physical Review*, 155(5):1554, 1967. 15
- [25] R. Brout F. Englert. Broken symmetry and the mass of the gauge vector mesons. *Physical Review*, 1964. 15
- [26] R Brout and François Englert. Spontaneous symmetry breaking in gauge theories: A historical survey. *arXiv preprint hep-th/9802142*, 1998. 15
- [27] Sean Carroll. *La partícula al final del universo: del bosón de Higgs al umbral de un nuevo mundo*. Debate, 2013. 15
- [28] M Dührssen, S Heinemeyer, H Logan, D Rainwater, Georg Weiglein, and D Zepfenfeld. Extracting higgs boson couplings from cern lhc data. *Physical Review D*, 70(11):113009, 2004. 15

- [29] Henriette Elvang and Yu-tin Huang. Scattering amplitudes. *arXiv preprint arXiv:1308.1697*, 2013. 17
- [30] Bryan O Larios. Helicity amplitudes for production of massive gravitino/goldstino. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 912. 17, 26
- [31] Arkani-Hamed Nima, Cachazo Freddy, and Jared Kaplan. What is the simplest quantum field theory? *Journal of High Energy Physics*, 2010(9), 2010. 25
- [32] J Lorenzo Diaz-Cruz, Bryan O Larios-López, and O Meza-Aldama. An introduction to the massive helicity formalism with applications to the electroweak sm. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 761, page 012012. IOP Publishing, 2016. 29
- [33] John F Gunion. *The Higgs hunter's guide*. CRC Press, 2018. 39